P

La concepción axiomática de la geometría de David Hilbert (1891-1905)

Autor:
Giovannini, Eduardo
Tutor:
Roetti, Jorge

2013

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía

Posgrado

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Filosofía y Letras

Tesis doctoral

La concepción axiomática de la geometría de David Hilbert (1891–1905)

Director:

Dr. Jorge Roetti

Autor:

Eduardo N. Giovannini

Co–director:

Dr. Javier Legris

Buenos Aires, Octubre de 2012

Agradecimientos

Numerosas personas e instituciones han sido determinantes para que esta tesis de doctorado haya podido ser llevada a cabo. En primer lugar, quisiera expresar mi profundo agradecimiento al CONICET, quien a través de dos becas internas de posgrado han financiado por completo mi investigación doctoral. Aprovecho para agradecer también aquí al Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) y al Ministerio de Educación de la Nación, por la beca de doctorado sándwich otorgada. La beca del DAAD–ME me permitió realizar una estadía de investigación en la *Universität Paderborn*, que resultó fundamental para que esta tesis pudiera ser completada. Dejo constancia además de mi agradecimiento a la *Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen*, y en particular a la *Handschriftenabteilung* y al Dr. Helmut Rohlfing, por el permiso para citar y reproducir los manuscritos de Hilbert. Por otro lado, quisiera manifestar mi sentido agradecimiento a mi director y a mi co–director de tesis, los doctores Jorge Roetti y Javier Legris, a Adriana Gonzalo y a Volker Peckhaus, por el constante apoyo y estímulo durante toda mi investigación de doctorado. Finalmente, sin el aliento permanente de mi familia a lo largo de todo este proceso, me hubiese resultado imposible culminarlo. A ellos, y en especial a María, les agradezco su paciencia, comprensión y amor incondicionales.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

0.1. David Hilbert y el método axiomático formal

A pesar de sus notables y numerosas contribuciones a prácticamente todas las ramas fundamentales de la matemática (álgebra, análisis, teoría de números y funciones, geometría, física matemática), el nombre de David Hilbert (1862–1943) ha sido y es vinculado comúnmente por los filósofos e historiadores matemática y de la ciencia, con la corriente 'formalista' en la llamada 'crisis de los fundamentos' y con la concepción moderna del método axiomático. Más precisamente, respecto de su concepción formalista de la matemática, es habitual distinguir dos etapas principales. La primera se extiende aproximadamente entre 1891 y 1905, período en el que Hilbert concentra mayormente su atención en el problema de los fundamentos de la geometría. Esta etapa inicial es por ello denominada 'geométrica' y encuentra en la articulación de la concepción formal o abstracta del método axiomático su desarrollo teórico más notable. En cambio, la segunda etapa, que tiene lugar entre 1917 y 1930, aborda principalmente el problema de la consistencia de la aritmética y del análisis. La creación de la "teoría de la demostración" [*Beweistheorie*] – una de las ramas de la lógica matemática más pujante en la actualidad – se reconoce como su contribución más importante. El famoso 'programa de Hilbert', cuyo objetivo central fue presentar una prueba directa o sintáctica de la consistencia de la aritmética en la que se utilicen estrictamente métodos 'finitistas' de demostración, se circunscribe así a esta segunda "etapa aritmética".[1]

[1] La distinción entre una "etapa geométrica" y una "etapa aritmética" de los trabajos de Hilbert en torno a los fundamentos de la matemática, se ha vuelto ya estándar en la literatura. Bernays (1967) fija prácticamente esta misma periodización al distinguir estas dos etapas, la cual es además compartida por (Ewald 1996, p. 1088). Por otro lado, Weyl (1944) distingue cinco períodos principales en la producción intelectual general de Hilbert: *i.* Teoría de invariantes (1885–1893). *ii.* Teoría de los cuerpos de números algebraicos (1893–1898). *iii.* Fundamentos, (a) de la geometría (1898–1902), (b) de la matemática en general (1922-1930). *iv.* Ecuaciones integrales (1902–1912). *v.* Física (1910–1922) (Cf. Weyl 1944, p. 617). Esta periodización es compartida por Abrusci (1978). Sin embargo, ambos autores no toman en consideración las notas manuscritas para cursos dictados por Hilbert, principalmente aquellas dedicadas a la geometría durante toda la última década del siglo XIX. Finalmente,

Luego, la presente tesis doctoral se ocupa exclusivamente de la “etapa geométrica”, a la que pertenece la contribución quizás más influyente de Hilbert a los fundamentos de la matemática: *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1999). En este célebre trabajo, publicado originalmente en 1899, Hilbert logró conformar una nueva lista de axiomas a partir de los cuales era posible construir íntegramente la geometría euclídea elemental y deducir de un modo riguroso – i.e., sin recurrir a construcciones diagramáticas o figuras geométricas – sus teoremas fundamentales. Sin embargo, junto a este notable logro matemático, el enorme impacto de la obra se debió en gran medida a las novedades metodológicas introducidas y a las nuevas perspectivas de investigación matemática inauguradas. Más aún, como lo ha señalado Bernays (1922a), podría decirse que en este aspecto residió la gran novedad y el atractivo del trabajo de Hilbert:

> A través de los nuevos y fructíferos métodos y puntos de vista que presentó, esta investigación ha ejercido una poderosa influencia en los desarrollos de la investigación matemática. Sin embargo, la importancia de *Fundamentos de la geometría* de Hilbert de ningún modo descansa solamente en los contenidos puramente matemáticos. Lo que le confirió popularidad a este libro e hizo célebre el nombre de Hilbert, mucho más allá del círculo de sus colegas, fue el nuevo giro metodológico dado a la idea de axiomática. (Bernays 1922a, p. 94)[2]

El giro metodológico introducido por Hilbert consistió en la elaboración del “método axiomático formal”, siguiendo la designación utilizada posteriormente en (Hilbert y Bernays 1934, p. 2). La novedad de esta nueva concepción axiomática formal o abstracta puede ser ilustrada fácilmente si se la contrasta con la concepción clásica del método axiomático, representada originalmente en la exposición sistemática de la geometría griega llevada a cabo por Euclides. En los *Elementos*, partimos de una serie de definiciones, postulados y nociones comunes completamente interpretadas, en el sentido de que los términos como ‘punto’, ‘línea’, etc., refieren a objetos de la intuición geometría y los axiomas predican verdades acerca de estos objetos. Todo el conocimiento geométrico es así organizado a partir de un conjunto de principios básicos, considerados como verdades intuitivas evidentes por sí mismas, y de estas proposiciones verdaderas pueden derivarse, por medio de deducciones lógicas, el resto de las verdades geométricas.

Detlefsen (1993a, p. 286) advierte que, dentro de esta distinción entre una “etapa geométrica” y una “etapa aritmética”, (Hilbert 1905a) debe considerarse como un trabajo de transición.

[2] Freudenthal (1962, p. 619) describe de un modo similar la importancia y la novedad de la monografía de Hilbert.

Hilbert llama a esta concepción clásica la 'axiomática material' [*inhaltliche Axiomatik*], para aclarar que ella "introduce sus nociones básicas a través de la referencia a experiencias comunes y presenta sus primeros principios o bien como hechos evidentes, de los cuales uno puede convencerse, o bien los formula como extractos de complejos de experiencias [*Erfahrungskomplexen*]" (Hilbert y Bernays 1934, p. 2).

Por el contrario, con su nueva concepción formal del método axiomático, Hilbert adopta desde un inicio una perspectiva más abstracta y general. Renuncia por lo tanto a dar una definición descriptiva de los elementos básicos, y comienza en cambio presuponiendo la existencia de un conjunto de cosas u objetos [*Dinge*], a los que se les asigna su denominación geométrica habitual ('punto', 'línea', 'plano'), pero que sin embargo no refieren a objetos particulares dados en la intuición geometría. Antes bien, todo aquello que resulta geométricamente relevante de estos objetos, son las *relaciones* establecidas en los axiomas, por medio de las cuales reciben una "caracterización matemática completa y precisa" (Hilbert 1999, p. 2). En breve, para construir la geometría elemental Hilbert propone asumir simplemente la existencia de tres sistemas de objetos llamados 'puntos', 'líneas' y 'planos', sobre los que se imponen siete relaciones primitivas: una relación ternaria de *orden* que relaciona a los puntos, tres relaciones binarias de *incidencia* y tres relaciones binarias de *congruencia* (Hilbert 1999, pp. 2–3).

Una consecuencia inmediata de este nuevo modo de concebir el método axiomático es que los axiomas de la geometría dejan de ser considerados como *verdades* inmediatas o evidentes acerca de un dominio intuitivo fijo, i.e., el espacio físico. Más bien, un sistema axiomático constituye un "entramado de conceptos" [*Fachwerk von Begriffen*] o 'estructura relacional' que no se refiere a un dominio fijo de objetos, sino que puede recibir diferentes interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas como físicas. En otras palabras, la enorme contribución de Hilbert a los fundamentos de la geometría consistió en presentar a esta disciplina matemática como un sistema axiomático desprovisto de un significado específico, donde los elementos básicos ('puntos', 'líneas', 'planos') podían ser reemplazos por otros objetos cualesquiera, como "sillas, mesas y jarras de cerveza", bajo la condición de que se postule que estos nuevos objetos satisfacen las relaciones establecidas en los axiomas.

De esta manera, desde un punto de vista metodológico, una consecuencia fundamental de este nuevo abordaje axiomático a la geometría fue que, por primera vez, la cuestión del estatus epistemológico de los axiomas – *qua* verdades geométricas intuitivas sobre el espacio físico – pudo ser distinguida de un modo preciso de la investigación de carácter puramente matemático en torno a los fundamentos axiomáticos de la geometría. Es decir, la nueva concepción axiomática de la geometría de Hilbert permitió trazar una separación estricta entre la esfera espacial–intuitiva y la esfera lógico–matemática, y en consecuencia, entre los fundamentos matemáticos y los fundamentos gnoseológicos de la geometría. Nuevamente en palabras de Bernays (1922a):

> Ahora bien, lo esencial en *Fundamentos de la geometría* de Hilbert fue que allí, por primera vez, desde el comienzo mismo en el establecimiento del sistema de axiomas, la separación entre los [aspectos] matemáticos y lógicos y los [aspectos] espaciales–intuitivos es llevada a cabo totalmente y expresada con completo rigor.
>
> Hablando estrictamente, en la introducción de su libro Hilbert expresa la idea de que, el establecimiento de los axiomas de la geometría y la investigación de sus relaciones, equivale a la tarea de "un análisis lógico de nuestra intuición espacial", e incluso señala en el primer párrafo que cada grupo particular de axiomas expresa "ciertos hechos básicos relacionados de nuestra intuición". Sin embargo, estas afirmaciones se ubican completamente fuera de la construcción axiomática, que tiene lugar sin ningún tipo de referencia a la intuición espacial. (Bernays 1922a, p. 95)

Ahora bien, esta separación estricta entre la esfera lógico–matemática y la esfera espacial–intuitiva, propiciada por el abordaje axiomático de Hilbert, ha sido equiparada con un golpe radical al valor y relevancia de la intuición en geometría. Más precisamente, la presentación de la geometría euclídea elemental como un sistema axiomático formal, sumada a su posterior programa para la fundamentación de la aritmética y el análisis, han contribuido a formar una *imagen excesivamente formalista* de su concepción axiomática de la geometría. Dada la importancia de estas interpretaciones formalistas para el presente trabajo, resultará oportuno dar cuenta de ellas brevemente.

0.2. Las interpretaciones formalistas

En mi opinión, la imagen de la geometría excesivamente formalista, y en ocasiones sobremanera modernizante, utilizada usualmente para caracterizar la concepción axiomática de Hilbert, no consiste en un único punto de vista, sino más bien en tres tesis interpretativas diferentes, que es conveniente distinguir.[3] Me referiré a estas tesis

[3] Algo similar ocurre con la concepción formalista de la matemática en general. En un trabajo reciente, Detlefsen (2005) ha advertido que "propiamente considerado, el formalismo no es un único punto

como las interpretaciones *formalista radical*, *deductivista* y *formalista estructural*.[4]

0.2.1. La interpretación 'formalista radical'

De acuerdo con la interpretación *formalista radical*, la idea detrás de la concepción del método axiomático de Hilbert es que la geometría consiste básicamente en el estudio de los *formalismos*, entendidos como el esquema de signos o símbolos gráficos vacíos o sin significado, sujeto a un conjunto de reglas predeterminadas, que componen el sistema axiomático. Más precisamente, los defensores de la interpretación formalista radical afirman que, del hecho de que los conceptos básicos de su sistema axiomático no poseen un significado geométrico fijo, se sigue que para Hilbert el conocimiento geométrico y matemático en general consiste estrictamente en la manipulación de ciertos signos o símbolos gráficos de acuerdo con reglas formales previamente establecidas.[5] Del mismo modo, de acuerdo con esta interpretación formalista radical, la exhortación de Hilbert de que los axiomas de la geometría no deben ser concebidos como *verdades* intuitivas acerca del espacio físico, significa en realidad que los principios fundamentales de toda teoría geométrica axiomática constituyen reglas, en principio *arbitrarias*, para la manipulación de los signos o símbolos gráficos allí utilizados. De allí que la imagen de la geometría que se encuentra en la base de la concepción axiomática de Hilbert puede ser útilmente ilustrada, según esta interpretación, si se la compara con un juego como el ajedrez, donde las piezas son reemplazadas por signos gráficos, manipulados de acuerdo con ciertas reglas de combinación (las reglas del juego).[6]

En mi opinión, el origen de la interpretación formalista radical se encuentra en la identificación de la nueva concepción axiomática presentada por Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899), con las concepciones formalistas de la aritmética desarrolladas por los matemáticos alemanes Hermann Hankel (1839–1873), Eduard Heine (1821–1881) y Johannes Thomae (1840–1921).[7] En particular, tras la aparición de su monografía en

de vista respecto de la naturaleza de la matemática, sino más bien, una familia de puntos de vista relacionados que comparte un esquema común" (Detlefsen 2005, p. 236). Una opinión similar es defendida por Simons (2009).

[4] Es oportuno aclarar que, incluso aquellos que han criticado recientemente las 'interpretaciones formalistas' de la concepción axiomática de Hilbert, han tendido a fundir estas tres posiciones en una única 'interpretación formalista'. Véase, por ejemplo, (Rowe 1994; 2000) y (Corry 2004a; 2006).

[5] En efecto, ello sería incluso más evidente cuando el sistema axiomático se construye utilizando un lenguaje formal, como por ejemplo en (Hilbert y Bernays 1934).

[6] Resnik (1980), Shapiro (2000) y Weir (2011) han llamado a esta posición 'formalismo de juego'.

[7] Aunque con diferencias importantes, la concepción formalista de la aritmética fue desarrollada por Hankel (1867), Heine (1872) y más en detalle por Thomae (1898; 1906). Sin embargo, la articulación más precisa y coherente de este punto de vista fue elaborada por Frege. A los efectos de criticarla duramente, Frege presentó en los §86–§137 de sus *Grundgesetze der Arithmetik, II* (1903) una

1899, diversos fueron los autores que señalaron que la imagen de la geometría allí esgrimida coincidía en lo esencial con la 'aritmética formal' de Thomae (1898), para quien la aritmética consistía en la manipulación formal de signos o símbolos gráficos sin significado, de acuerdo con reglas estrictamente prescriptas.[8] Puntualmente, esta identificación fue promovida por la célebre controversia, inicialmente epistolar, entre Hilbert y Frege respecto de la naturaleza del método axiomático. En efecto, Frege señala allí que el objetivo del abordaje axiomático de Hilbert es "separar a la geometría de la intuición espacial y convertirla en una ciencia puramente lógica como la aritmética".[9] E incluso más concretamente, Frege llega a sostener que la concepción axiomática de la geometría de Hilbert comparte con la aritmética formal de Thomae la idea de que la matemática podría ser bien considerada como "un juego de signos vacío, carente de significado, y cosas por el estilo; como rigurosa asociación legal de las proposiciones no precisa de ninguna otra 'dignidad' especial" (Frege 1906b, p. 317).

Por otro lado, la mencionada identificación es explícitamente introducida por Alwin Korserlt (1864–1947), quien en un par de artículos intentó defender a Hilbert de los ataques de Frege, cuando el primero decidió interrumpir abruptamente el intercambio epistolar.[10] Por mencionar sólo un ejemplo, al intentar aclarar cómo es posible que los términos básicos que aparecen en los axiomas de Hilbert no posean un significado intuitivo dado de antemano, Korselt señala que:

> si un 'axioma' contiene un signo hasta el momento desconocido, entonces es simplemente el caso de que este 'axioma' es en sí mismo una regla, una proposición que determina el uso de los signos. (Korselt 1903, p. 403)[11]

detallada descripción de la concepción formalista de la aritmética.

[8] "La concepción formal de los números se traza límites más modestos que la concepción lógica. Ella no se pregunta qué son y qué hacen los números, sino que se pregunta qué es lo que se requiere de ellos en la aritmética. Para la concepción formal, la aritmética es un juego con signos, a los que se puede llamar vacíos, en el sentido de que (en el juego de calcular [*Rechenspiel*]) éstos no tienen otro contenido que el que se les atribuye en relación a ciertas reglas de combinación (las reglas del juego). El jugador de ajedrez opera de un modo similar con sus piezas, pues les asigna ciertas propiedades que determinan su comportamiento en el juego, y las piezas son así sólo los signos externos de este comportamiento. Por supuesto, entre el ajedrez y la aritmética existe una diferencia fundamental. Las reglas del ajedrez son arbitrarias, [en cambio] el sistema de las reglas de la aritmética es tal clase, que los números pueden ser referidos a multiplicidades intuitivas a través de simples axiomas, y así pueden hacer una contribución importante al conocimiento de la naturaleza" (Thomae 1898, p. 3). Para una discusión histórica sobre el 'formalismo de juego', véase (Epple 1994).

[9] Frege a Hilbert, 6 de enero de 1900; en (Frege 1976, p. 70).

[10] Cf. (Korselt 1903; 1908).

[11] Del mismo modo, Korselt (1903, p. 407) llega a afirmar que la *imagen de la geometría* que se sigue del método axiomático formal se ilustra fácilmente, si se compara a la matemática con un juego de ajedrez.

Ahora bien, esta interpretación formalista radical de la concepción hilbertiana de la geometría ganó adherentes y pareció verse confirmada en la segunda 'etapa aritmética' (1917–1930), dedicada primordialmente al problema de la consistencia de la aritmética. En su llamado 'programa formalista' – o mejor, 'programa finitista', como se lo designa actualmente[12] –, Hilbert se planteó la tarea de hallar una prueba directa o sintáctica de la consistencia de la aritmética (y del análisis), en la que se utilicen exclusivamente métodos estrictamente finitistas de demostración. Teniendo en vista tales objetivos, Hilbert se propuso llevar a cabo una *completa formalización* de la aritmética y el análisis; o en otras palabras, una formalización estricta tanto de las proposiciones que componían a las teorías matemáticas en cuestión, como de los métodos deductivos o de inferencia. En breve, el programa de Hilbert proponía axiomatizar y formalizar completamente a las teorías aritméticas clásicas, y luego proporcionar una prueba de la consistencia de estos sistemas, en la que se utilicen rigurosamente métodos finitistas de demostración. Luego, esta estrategia metodológica ideada por Hilbert para dar una solución definitiva al problema de la consistencia de la aritmética, tenía a primera vista como resultado la reducción de las distintas ramas de la matemática clásica a un inventario de fórmulas, manipuladas de acuerdo con ciertas reglas fijadas de antemano: "En lugar de la ciencia matemática concreta, lo que en último término obtenemos con todo ello es un inventario de fórmulas que contiene signos tanto lógicos como matemáticos, y que se ordenan según reglas definidas" (Hilbert 1926, p. 103).[13]

La propuesta de Hilbert consistía entonces en buscar una demostración 'finitista' de la consistencia de la aritmética que permitiera, por un lado, responder a las críticas de los intuicionistas, y por otro, conservar la totalidad de los resultados de la matemática clásica. Sin embargo, esta estrategia metodológica pensada específicamente para dar una respuesta a dicho problema, fue tomada por muchos como una expresión de su concepción general de la naturaleza de la matemática y su posición filosófica respecto del conocimiento matemático. Puntualmente, Hermann Weyl (1885–1955) fue uno de los principales promotores de la interpretación formalista radical, repitiendo en diversos lugares la metáfora de la matemática como un 'mero juego con símbolos', al momento de describir la *concepción de la matemática* propugnada por Hilbert:

> La matemática no es más conocimiento sino un *juego de fórmulas*, condu-

[12] Esta designación se explica en virtud de que, para referirse a su propia propuesta, Hilbert hablaba usualmente del 'punto de vista finitista o finitario' [*finite Einstellung*]. La expresión 'formalismo' fue en cambio introducida por Brouwer (1927). Dentro de la escuela de Hilbert, Bernays (1930) y von Neumann (1931) hablan de 'programa formalista'.

[13] Hilbert realiza observaciones similares, por ejemplo, en (Hilbert 1922, p. 45); (Hilbert 1926, p. 95).

> cido de acuerdo con ciertas convenciones, muy similar al juego de ajedrez. En lugar de las piezas de ajedrez tenemos en la matemática un acervo limitado de *signos*, y la configuración arbitraria de las piezas en el tablero se corresponde con la composición de una *fórmula* hecha de signos. Una o unas pocas fórmulas son tomadas como *axiomas*; su contraparte es la configuración prescripta de piezas al comienzo del juego de ajedrez. Y del mismo modo en que aquí una configuración dada en el juego es transformada en la siguiente por medio de un movimiento que debe cumplir las reglas del juego, allí nuevas fórmulas son obtenidas o 'deducidas' de otras fórmulas, de acuerdo con ciertas reglas formales de inferencia. (Weyl 1925, pp. 136–7)[14]

En suma, un rasgo central de la interpretación formalista radical consiste en ver al programa de Hilbert para la fundamentación de la aritmética como una radicalización de su abordaje axiomático formal a la geometría, a comienzos del siglo XX. Es decir, en esta segunda etapa, Hilbert no sólo va a requerir que en sus teorías matemáticas axiomatizadas se prescinda del significado (intuitivo) concreto de los conceptos básicos, sino que además exigirá una completa abstracción del significado de las inferencias lógicas, que pasan a ser concebidas ahora como un 'juego combinatorio' o mecánico de fórmulas sujeto a ciertas reglas precisas. El punto crucial de esta interpretación es entonces, que ella identifica la *estrategia metodológica* para dar específicamente una respuesta al problema de la consistencia de la aritmética, con la *concepción general de la matemática y de la naturaleza del conocimiento matemático* propuesta por Hilbert. Más aún, los defensores de esta interpretación afirman explícitamente que dicha concepción de la matemática no es sino una continuación de su concepción axiomática de la geometría, tal como fuera desarrollada en *Fundamentos de la geometría* (1899).

Finalmente, entre los defensores más importantes de la interpretación formalista radical es posible mencionar al mítico grupo de matemáticos franceses Nicolas Bourbaki, quien en sus numerosas alusiones al moderno método axiomático describe la concepción de la matemática de Hilbert en estos términos.[15] En particular, esta lectura es impulsada por Jean Dieudonné (1906–1992) en un artículo muy difundido, en donde afirma que un corolario de la nueva concepción del método axiomático de Hilbert es que "la matemática se vuelve un juego, cuyas piezas son los símbolos gráficos que se distinguen unos de otros por sus formas; con estos símbolos hacemos grupos que puede llamarse relaciones de términos de acuerdo con sus formas, en virtud de ciertas reglas" (Dieudonné

[14] Opiniones similares pueden verse en (Weyl 1944; 1949; 1951; 1985).
[15] Véase, especialmente, Bourbaki (1962; 1994).

1971, p. 261). Por último, ésta es la imagen de Hilbert que presenta (Mehrtens 1990, pp. 114–142) en su influyente libro sobre los orígenes de la 'crisis de los fundamentos de la matemática', hacia fines del siglo XIX y comienzos del XX.

0.2.2. La interpretación 'deductivista'

La interpretación *deductivista* mantiene con la interpretación formalista radical algunos puntos en común. En particular, tanto la interpretación deductivista como la formalista radical hacen hincapié en que, puesto que en la concepción axiomática formal de la geometría de Hilbert los axiomas no son entendidos como verdades intuitivas autoevidentes acerca del espacio físico, su elección es *en principio* arbitraria. Sin embargo, la interpretación deductivista difiere de la formalista radical en que no enfatiza el papel de las fórmulas matemáticas. Por el contrario, esta interpretación sostiene que la 'novedosa' concepción presentada sistemáticamente en *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1999), reduce la geometría esencialmente al estudio de las *consecuencias lógicas* que se siguen de un conjunto cualquiera de postulados o axiomas, en principio arbitrariamente escogidos. En otras palabras, la interpretación deductivista sostiene que, dado que en la presentación axiomática formal de Hilbert las inferencias lógicas son independientes de las interpretaciones particulares que puedan hacerse de los términos y relaciones básicas de la teoría, su *objetivo fundamental* es entonces convertir a la geometría en el estudio de las consecuencias que pueden ser obtenidas deductivamente a partir de un conjunto cualquiera de postulados. Para la interpretación deductivista, la imagen de la *naturaleza de la matemática* que pregona Hilbert, sobre la base de su concepción axiomática de la geometría, consiste así en concebirla como una colección de sistemas deductivos abstractos, construidos a partir de un conjunto arbitrariamente dado de postulados, sin un significado intrínseco.

Entre los primeros en proponer esta interpretación deductivista se encuentra Poincaré (1902). En efecto, en su recesión de *Fundamentos de la geometría*, el brillante matemático francés señala que el objetivo fundamental del método axiomático de Hilbert es desarrollar una especie de *máquina de razonamiento lógico*, que permita construir la geometría de un modo puramente mecánico, a partir de un conjunto cualquiera dado de postulados. Poincaré resume elocuentemente esta idea en el siguiente pasaje:

> Las palabras punto, línea y plano no deben provocar en la mente ninguna representación sensible. Ellas podrían designar indiferentemente objetos de cualquier clase, siempre y cuando uno pueda establecer entre estos objetos

> una correspondencia tal que a cada par de objetos llamados puntos le corresponda uno y sólo uno de los objetos llamados líneas. (...) Así, el Prof. Hilbert ha buscado, por decirlo de algún modo, formular los axiomas de un modo tal que pudieran ser aplicados por una persona que no sería capaz de comprender su significado, debido a que nunca vio ni un punto, ni un plano, ni una línea. Debería ser posible, en su opinión, reducir el razonamiento a reglas puramente mecánicas, y para construir la geometría, debería bastar con aplicar sumisamente [*servilement*] estas reglas a los axiomas, sin saber lo que ellos significan. Deberíamos ser entonces capaces de construir toda la geometría, no diría precisamente sin entenderla de ninguna manera, puesto comprenderíamos el encadenamiento lógico de las proposiciones, pero sin verla en ningún momento. Podríamos confiar los axiomas a un aparato de razonamiento como el *piano lógico* de Stanley Jevons, y veríamos salir de allí toda la geometría. (Poincaré 1902, pp. 252–253)

Por otra parte, la obra de Hilbert ejerció casi inmediatamente una notable influencia en el grupo de matemáticos conocido como los "teóricos postulacionales norteamericanos" (*American Postulate Theorist*).[16] Como es bien sabido, su objetivo era extender la aplicación del método axiomático formal a diversas disciplinas matemáticas como el álgebra real y compleja, algunas partes de la teoría de números y el análisis, el álgebra de la lógica y la geometría (especialmente la euclídea y la proyectiva). Sin embargo, al emprender esta tarea, este grupo adoptó una perspectiva marcadamente abstracta, en el sentido de que el 'análisis postulacional' (*postulational analisis*) no era concebido como una herramienta subordinada a la investigación de una teoría matemática particular preexistente. Por el contrario, el examen de distintos sistemas de postulados abstractos libremente propuestos, en tanto actividad autónoma y valiosa por sí misma, era considerado ahora por los teóricos postulacionales como el objetivo esencial de la matemática:

> Una *ciencia matemática*, como la llamaremos aquí, es cualquier cuerpo de proposiciones conforme a una serie de deducciones lógicas, i.e., ordenada de tal manera que toda proposición del conjunto que *sigue a otra cualquiera* es una consecuencia lógica formal de varias o de todas las proposiciones que la preceden. (Young 1911, p. 2)[17]

Luego, es dable señalar que varios de los representantes más importantes de este grupo

[16] Véase (Scalan 1991).
[17] Citado también en (Scalan 2003, p. 314).

– especialmente, Eliakim Hastings Moore (1862–1932), Edward Huntington (1847–1952) y Oswald Veblen (1880–1960) – afirmaron abiertamente que *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899) expresaba con claridad el tipo de 'abordaje axiomático' o 'análisis postulacional' que ellos pretendían llevar a cabo. De ese modo, Moore (1902), Huntington (1902) y Veblen (1903; 1904; 1908) le atribuyen expresamente a Hilbert una concepción deductivista de la geometría.[18] Sin embargo, hasta donde se conoce, Hilbert nunca manifestó explícitamente ningún tipo de interés por el tipo de abordaje axiomático desarrollado por los teóricos postulacionales norteamericanos.[19] Todo lo contrario, cuando más tarde tuvo la oportunidad de dedicarse nuevamente al estudio de la geometría, adoptó una perspectiva abiertamente opuesta a la de aquellos trabajos, tal como puede verse en su libro *Geometría de la intuición* [Anschauliche Geometrie] (Hilbert y Cohn-Vossen 1996).[20]

Por otro lado, Nagel (1939) ha defendido también, en su clásico artículo, una interpretación deductivisata de la concepción axiomática hilbertiana de la geometría. Y más recientemente, (Resnik 1980, pp. 105–119) y (Shapiro 2000, 148–157) se han referido al Hilbert de la 'etapa geométrica' como uno de los primeros y más influyentes representantes de la concepción deductivista de la matemática.

Finalmente, entre los autores que han criticado las interpretaciones formalista radical y deductivista de su concepción de la matemática, se encuentran Rowe (1994; 2000) y Corry (1997; 2006; 2004a). Asimismo, Peckhaus (1990; 1994b; 2003) ha criticado también la

[18] Fraenkel (1928, §18) toma a (Hilbert 1899; 1900c) y a los trabajos de los 'teóricos postulacionales' como expresando la misma concepción 'moderna' del método axiomático.

[19] Véase (Corry 2004a, 111–116) y (Corry 2004b, 172–182).

[20] Este libro es el resultado de curso dictado por Hilbert en el semestre de invierno de 1920/21, y luego repetido en varias oportunidades. Las notas de clases correspondientes son (Hilbert 1920/21). En la introducción de su libro, cuya primera edición data de 1932, Hilbert advierte la dicotomía entre una presentación abstracta y una intuitiva de la geometría, a la vez que sigue reconociendo el valor de esta última:

> En la matemática, como en cualquier otra investigación científica, nos encontramos con dos tendencias: la tendencia hacia la abstracción – que busca extraer los puntos de vistas lógicos del material diverso, para llevarlo una unidad sistemática – y la otra tendencia hacia la intuitividad [*Anschaulichkeit*], que más bien parte de la comprensión inmediata de los objetos y de sus relaciones concretas.
>
> En lo que respecta a la geometría, la tendencia hacia la abstracción ha conducido a las magníficas teorías sistemáticas de la geometría algebraica, la geometría de Riemann y la topología, en donde los métodos del razonamiento abstracto, del simbolismo [*Symbolik*] y del cálculo han sido utilizados de manera abundante. Sin embargo, todavía hoy la comprensión intuitiva en la geometría sigue teniendo un papel destacado, y de hecho no sólo una fuerza reflexiva del investigador, sino también para la comprensión y la apreciacion de los resultados de la investigación. (Hilbert y Cohn-Vossen 1996, p. VII)

interpretación deductivista del ‘programa temprano de Hilbert’ para la fundamentación de la matemática, aunque basándose más bien en los manuscritos (Hilbert 1905b;c).

0.2.3. La interpretación ‘formalista estructural’

Por último, en la actualidad es relativamente habitual caracterizar la concepción axiomática de la geometría de Hilbert por medio de una tercera línea de interpretación, a la que me he referido más arriba como *formalista estructural*. Uno de los primeros en describir en estos términos al ‘formalismo’ de Hilbert en la ‘etapa geométrica’ ha sido Detlefsen (1993a;b; 1998), aunque apoyándose en gran medida en el modo en que Bernays explica la novedad del método axiomático hilbertiano, especialmente en su aplicación a la geometría. Según la interpretación formalista estructural, la tesis central de la concepción del método axiomático de Hilbert afirma que la geometría axiomática, y de hecho cualquier otra teoría matemática axiomatizada, no debe ser considera como una ciencia acerca de un dominio particular de objetos, sino en cambio como una ‘ciencia abstracta’, es decir, una ciencia que puede ser aplicada a una variedad de dominios diferentes, en el sentido de que puede tener diversas realizaciones o interpretaciones. En otras palabras, para Detlefsen, el formalismo temprano de Hilbert consiste en afirmar que las teorías matemáticas definen objetos abstractos llamados ‘estructuras relacionales’, y que estas estructuras relacionales, que son propiamente el objeto de investigación matemática, constituyen ‘formas’ que diferentes dominios tienen en común (Cf. Detlefsen 1993b, p. 286). Bernays expresa también con gran claridad esta misma idea:

> Una característica principal de la axiomatización de la geometría llevada a cabo por Hilbert es que el método axiomático es presentado y practicado dentro del espíritu de la concepción abstracta de la axiomática que surgió al final del siglo diecinueve y que ha sido generalmente adoptada en la matemática moderna. Consiste en abstraer el significado intuitivo de los términos para los tipos de términos primitivos (individuos) y para las relaciones fundamentales y en entender las afirmaciones (teoremas) de la teoría axiomatizada en un sentido hipotético, esto es, como siendo verdaderas para cualquier interpretación o determinación de los tipos de individuos y de relaciones fundamentales para las que los axiomas son satisfechos. De esta manera, un sistema axiomático no es considerado como un sistema de proposiciones acerca de un dominio particular, sino como un sistema de condiciones que podría ser llamado estructura relacional. Tal estructura relacional debe ser tomada como el objeto inmediato de la teoría axiomática; su aplicación a un tipo de

> objeto intuitivo o a un dominio de las ciencias naturales debe ser llevada a cabo por medio de interpretaciones. (Bernays 1967, p. 358)[21]

En suma, para la interpretación 'formalista estructural', la concepción axiomática de Hilbert en la 'etapa geométrica' se resume básicamente en la idea de que las teorías matemáticas definen 'estructuras relacionales' o formas generales, que pueden ser compartidas por diversos sistemas o dominios de objetos. En este sentido, estas estructuras relacionales – a las que Hilbert llama 'esquema' o 'entramado de conceptos' [*Fachwerk von Begriffen*] – resultan explícitamente caracterizadas o definidas por los axiomas, y por lo tanto, son el objeto de estudio propio de las teorías geométricas axiomáticas. El punto crucial de esta interpretación es entonces que, a la hora de describir la concepción axiomática de la geometría defendida por Hilbert en este período, ella se limita a resaltar el carácter formal o abstracto de su nuevo método axiomático.

Como he señalado, la interpretación 'formalista estructural' es ampliamente compartida en la actualidad, en el sentido de que es usual describir a la contribución de Hilbert a los fundamentos de la geometría y a la axiomática en estos términos. Entre los trabajos que proponen estas línea de interpretación es dable mencionar: Detlefsen (1993b;a; 1998), Mancosu (1998), Shapiro (1997; 2005), Chihara (2004), Cassini (2007), Torres (2009) y Franks (2009).

En mi opinión, éstas son las tres interpretaciones más relevantes e influyentes de la concepción axiomática de la geometría de Hilbert. Ahora bien, es importante mencionar que estas tres interpretaciones se apoyan *exclusivamente* en las siguientes fuentes textuales: en primer lugar, obviamente, en la exitosa presentación axiomática de la geometría euclídea de *Fundamentos de la geometría*. En segundo lugar, en la controversia epistolar ya mencionada entre Hilbert y Frege, en donde aquél presenta algunas observaciones generales sobre su idea de axiomática, con el objetivo de disipar ciertos errores en la interpretación del segundo. Finalmente, en la descripción de la concepción formal del método axiomático que realiza Hilbert en trabajos bastante posteriores; principalmente en (Hilbert 1918) y (Hilbert y Bernays 1934). Luego, una crítica importante que se les puede realizar a las interpretaciones formalista radical, deductivista y formalista estruc-

[21] La misma interpretación se encuentra en Bernays (1922a;b). Por otra parte, Weyl reconoce también este rasgo de la concepción axiomática de Hilbert:

> La matemática pura, desde un punto de vista moderno, equivale a un teoría general hipotético–deductiva de las relaciones; ésta desarrolla la teoría de los 'moldes' lógicos sin atarse a sí misma a una u otra de las posibles interpretaciones concretas. (Weyl 1949, p. 27)

tural es que no consideran *las fuentes manuscritas* que Hilbert utilizó para elaborar su notable monografía de 1899.

0.3. Las notas de clases para cursos sobre geometría y aritmética (1891–1905)

Contrariamente a la impresión de Weyl, para quien *Fundamentos de la geometría* significó un quiebre radical respecto de los intereses anteriormente exhibidos por Hilbert[22], este trabajo no fue el resultado de una incursión repentina y aislada en esta disciplina, sino que fue más bien el producto de su preocupación por los fundamentos de la geometría por un período de casi diez años. Afortunadamente, contamos con un volumen importante de manuscritos dejados por Hilbert que no sólo permite justificar esta afirmación, sino que además da cuenta exhaustivamente del proceso que lo llevó a la elaboración de su nueva concepción axiomática de la geometría. Estos manuscritos consisten en notas de clases, cuidadosamente elaboradas, para cursos [*Vorlesungen*] sobre fundamentos de la geometría y la aritmética. Más precisamente, los cursos correspondientes a este período fueron impartidos por Hilbert primero en Königsberg y luego en Göttingen, y han sido publicados, aunque sólo *parcialmente*, en el primer volumen de la *Hilbert Edition* (Hallett y Majer 2004).

Brevemente, estas notas de clases pueden dividirse en dos tipos distintos. Por un lado, los primeros cursos sobre geometría consisten en una serie de notas escritas por el propio Hilbert (1891a; 1894; 1893/4; 1894/5; 1897b; 1898b). Por otro lado, Hilbert adopta a partir de (Hilbert 1898a) la metodología de designar, al comienzo de cada clase, a un alumno para su redacción [*Ausarbeitung*]. Tras una revisión por parte de Hilbert, los cursos eran depositados en la biblioteca del Instituto de Matemática de la Universidad de Göttingen, donde podían ser libremente consultados por los estudiantes. Entre los manuscritos de esta segunda, correspondientes a este período, se encuentran (Hilbert 1902c; 1905b;c). Asimismo, entre los alumnos y colaboradores más destacados que se ocuparon de la redacción de estas notas podemos mencionar a Max Born, Ernst Zermelo, Paul Bernays, Hermann Weyl y Richard Courant. En la actualidad estos cursos se encuentran en la *Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung* y en el *Mathematisches Institut, Lesesaal, Georg–August-Universität*

[22] "No pudo haber habido un quiebre más completo que aquel que divide al último artículo de Hilbert sobre la teoría de cuerpos numéricos y su clásico libro *Fundamentos de la geométrica*" (Weyl 1944, 635). Blumenthal (1935, p. 402) señala además que, en el momento de la publicación de aquella obra, el nombre de Hilbert estaba asociado en Göttingen exclusivamente con la teoría de cuerpos numéricos.

Göttingen.[23]

La enorme importancia de estas fuentes, hasta el momento escasamente indagadas, reside en que en ellas, a diferencia de su célebre trabajo de 1899, Hilbert acompaña los diversos resultados geométricos alcanzados con numerosas observaciones y reflexiones de las implicancias metodológicas y filosóficas de su nuevo abordaje axiomático a la geometría. Es decir, en sus notas de clases Hilbert no se limita a *aplicar* el método axiomático (abstracto) a la geometría, sino que además realiza importantes consideraciones respecto de las consecuencias que su nueva concepción del método axiomático conlleva para la explicación de la naturaleza de la geometría y de la matemática en general. En consecuencia, estos cursos constituyen un recurso imprescindible para comprender la concepción axiomática de la geometría de Hilbert, en esta etapa inicial.

El primero en llamar la atención sobre las notas de clases de Hilbert para cursos sobre fundamentos de la geometría, correspondientes a esta etapa inicial, ha sido Toepell (1986). Este trabajo es uno de los antecedentes más importantes de la presente investigación. El libro de Toepell persigue dos objetivos principales. Por un lado, gran parte del texto está dedicado a reproducir las notas manuscritas de Hilbert, publicadas casi veinte años más tarde en el primer volumen de la *Hilbert Edition*. En segundo lugar, Toepell utiliza estas fuentes para dar cuenta de un conjunto de problemas geométricos fundamentales, que despertó el interés de Hilbert en los fundamentos axiomáticos de la geometría. Esta tarea es emprendida a partir de una indagación histórica, centrada en el tratamiento que estos problemas tuvieron en el siglo XIX, principalmente por parte de los geómetras alemanes. Luego, aunque el trabajo pionero de Toepell posee un enorme valor y se ha convertido en una referencia ineludible, se trata de un trabajo escrito con una preocupación centrada exclusivamente en la historia de la matemática. En tal sentido, Toepell no profundiza en ningún momento en lo que he denominado la "concepción axiomática de la geometría", elaborada por Hilbert en sus notas de clases para cursos sobre fundamentos de la geometría.

Por otro lado, más recientemente Corry (1997; 2004a) se ha interesado por el estudio de estas fuentes, con el objetivo central de arrojar luz sobre una cuestión por largo tiempo eludida, a saber: las contribuciones de Hilbert a la axiomatización de distintas ramas de la física. En particular, Corry ha intentado mostrar que el interés de Hilbert respecto de las discusiones en torno a los principios fundamentales de la física, en especial de la mecánica, en la última década del siglo XIX y en las dos primeras del siglo XX,

[23] Un listado completo de los cursos dictados por Hilbert se encuentra en (Hallett y Majer 2004, pp. 609–623).

resulta crucial para entender "el papel real que Hilbert le adscribió a la axiomatización en la matemática y en la ciencia (en general)" (Corry 2004a, p. 6). En este sentido, en (Corry 1997; 2004a; 2006) es posible encontrar numerosas referencias a los manuscritos de Hilbert correspondientes al período que nos ocupa. Especialmente, al resaltar el papel que desempeñó este interés temprano por los fundamentos de la física en la elaboración de su nueva concepción del método axiomático, Corry ha criticado las interpretaciones formalista radical y deductivistas de la concepción de la geometría de Hilbert. Asimismo, el autor le ha adjudicado ha Hilbert una posición fuertemente empirista, profundizada aún más con el advenimiento de la teoría de la relatividad.[24]

Finalmente, en los últimos años estas fuentes han sido utilizadas para abordar ciertas cuestiones metodológicas y tesis puntuales, que emergen de la obra de Hilbert. Hallett (2008) y Arana y Mancosu (2012) han apelado a las notas de clases sobre fundamentos de la geometría, para abordar la cuestión metodológica de la 'pureza del método', a la que Hilbert alude circunstancialmente en la conclusión de *Fundamentos de la geometría*. Asimismo, Hallett (1995b) y Ferreirós (2009) han intentado aclarar, sobre la base de estas fuentes, la noción de 'existencia matemática' que Hilbert parece defender a partir de su nueva concepción axiomática formal. Majer (1995; 2006) recurre superficialmente a estas fuentes para ofrecer una interpretación del célebre epígrafe kantiano con el que Hilbert inicia su monografía. Por último, Hallett (1994; 2010; 2012) ha acudido a estos manuscritos para analizar las diferencias entre los proyectos fundacionales de Hilbert y Frege, puestas de manifiesto elocuentemente en la controversia epistolar ya referida.

0.4. Tesis y objetivos de esta investigación

La tesis general que defenderé en este trabajo consiste en afirmar que en sus notas para clases sobre geometría, correspondientes al período 1891–1905, Hilbert elaboró y presentó la concepción de la geometría que *subyace* a su abordaje axiomático en *Fundamentos de la geometría* (1899). Por *concepción de la geometría* no entenderé aquí una exposición de carácter sistemático, en el sentido de una filosofía de la geometría cuidadosamente elaborada y completamente articulada. Por el contrario, con ello aludiré más bien a una serie de reflexiones y observaciones, de un tenor claramente filosófico, respecto de: *a)* la naturaleza de la geometría y del conocimiento geométrico en general; *b)* el lugar que ocupa la geometría en el contexto de la matemática en general y cómo se relaciona esta disciplina con otras ramas de la matemática; *c)* el papel que desempeña

[24] Cf. (Corry 1997; 2000; 2004a; 2006).

la intuición en las teorías geométricas, particularmente en el proceso de axiomatización; *d)* la naturaleza y función del método axiomático, en particular en su aplicación a la geometría.[25]

El objetivo central de esta tesis doctoral será, entonces, reconstruir la temprana concepción axiomática de la geometría desarrollada por Hilbert en este período inicial de sus trabajos sobre los fundamentos de la matemática. Asimismo, sostendré que, además de ser interesante de suyo, esta concepción de la geometría resulta sumamente relevante y valiosa para: *i.)* ofrecer una interpretación mejor contextualizada e históricamente más adecuada de la concepción del método axiomático defendida por Hilbert en este período, cuyo punto culminante fue (Hilbert 1999); *ii.)* examinar uno de los resultados geométricos más importantes alcanzados en *Fundamentos de la geometría* – i.e., el cálculo de segmentos – , pero cuyo notable significado metodológico y epistemológico para la naturaleza del método axiomático en general no es explícitamente enfatizado por Hilbert en esta obra; *iii.)* evaluar el lugar que ocuparon en sus investigaciones axiomáticas en el campo de la geometría, las nociones metalógicas de consistencia, independencia y completitud de un sistema axiomático, y precisar a su vez cómo se vincula esta última propiedad – tal como es concebida por Hilbert en este período – con su célebre axioma de completitud [*Vollständigkeitsaxiom*].

Intentaré justificar el punto *i)* recién mencionado, en función de una defensa de las siguientes tesis particulares:

1. La concepción axiomática de la geometría elaborada por Hilbert en sus notas para cursos sobre geometría y aritmética (1891–1905) es claramente incompatible con las interpretaciones formalista radical y deductivista, según fueron descritas arriba.

2. En efecto, la concepción de la geometría desarrolla allí por Hilbert se opone explícitamente a la idea de que naturaleza de la matemática puede ser comparada con un *juego*, ya sea en el sentido de *a)* un juego jugado con signos o símbolos gráficos vacíos, manipulados de acuerdo con ciertas reglas precisas preestablecidas, o bien *b)* el estudio de las consecuencias lógicas que se siguen de un conjunto dado cualquiera de postulados, elegidos en principio arbitrariamente.

[25] El carácter no sistemático, desde un punto de vista filosófico, de estas reflexiones tempranas de Hilbert en torno a la geometría, ha sido ya reconocido por Corry (2006). Especialmente, esta autor afirma que "la imagen de la geometría [que presenta Hilbert en sus manuscritos] no es la de un filósofo sistemático; aunque ciertamente tampoco existen razones para esperar que así sea. Después de todo, Hilbert fue un '*working mathematician*' permanentemente involucrado en diversas corrientes de investigación en varias ramas de la matemática, pura y aplicada, y tampoco tuvo ni el tiempo ni, aparentemente, la paciencia y el tipo de interés específicamente enfocado, para dedicarse a la clase de tareas llevadas a cabo por los filósofos" (Corry 2006, p. 134).

3. Por otro lado, la concepción formal o abstracta del método axiomático presentada por Hilbert en estas notas manuscritas, y en consonancia con *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), es totalmente compatible con la interpretación formalista estructural. Más precisamente, esta interpretación describe correctamente el modo en que Hilbert concebía ya en esta etapa inicial el objeto de la geometría axiomática (y de cualquier otra teoría axiomática).

4. Sin embargo, la interpretación formalista estructural no logra describir o captar íntegramente la concepción de la geometría y del método axiomático defendida por Hilbert en este período temprano. En particular, un defecto importante es que no toma en consideración reflexiones importantes de Hilbert respecto de cómo debe proceder la axiomatización de la geometría elemental; estas reflexiones son a su vez una consecuencia de la imagen de la naturaleza de esta teoría matemática, que Hilbert presenta en sus manuscritos.

5. Entre los aspectos que estas reflexiones ponen en evidencia, y que no son tenidos en cuenta por la interpretación formalista estructural, se encuentra una explicación de cómo se relacionan la intuición y el formalismo en su nuevo abordaje axiomático a la geometría. Es decir, Hilbert ofrece en estas notas una clara explicación, que la mencionada interpretación ignora, de cómo debe concebirse la relación entre el conjunto de hechos [*Tatsachen*] geométricos fundados en la experiencia y la intuición, que conforma el acervo fundamental sobre el que se erige nuestro conocimiento geométrico, y la estructura relacional o esquema de conceptos, que es el producto de la axiomatización formal.

6. Las referencias de Hilbert en sus notas a la *Bildtheorie* de Hertz resultan muy significativas para comprender el espíritu con el cual Hilbert aborda, a partir de 1894, la empresa de axiomatizar la geometría euclídea elemental. Más precisamente, dicha comparación ilustra de un modo elocuente el proceso bajo el cual Hilbert pretende transformar a la geometría, con su contenido empírico factual, en una teoría matemática pura.

Por otra parte, intentaré justificar los puntos *ii)* y *iii)* a partir de las siguientes tesis parciales:

1. La construcción de distintos cálculos de segmentos en (Hilbert 1899) revela que uno de los rasgos más novedosos que Hilbert vislumbró en su nueva concepción

axiomático, consistió en la capacidad del método axiomático de exhibir *conexiones internas o estructurales* entre diversas teorías matemáticas. En otras palabras, para Hilbert una contribución fundamental del método axiomático a las ciencias matemáticas, era su capacidad para trazar nuevos puentes entre diferentes teorías, y así contribuir a la unidad del conocimiento matemático.

2. Por otro lado, las mencionadas notas de clases permiten caracterizar con claridad no sólo la manera en que Hilbert concebía en este período las nociones metalógicas de consistencia, independencia y completitud de un sistema axiomático, sino también el lugar que estas propiedades o 'criterios de adecuación' ocupaban efectivamente en sus investigaciones geométricas.

3. Más aún, los manuscritos de Hilbert aportan elementos sumamente interesantes para analizar las vicisitudes que rodearon la incorporación del novedoso axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría euclídea; este axioma es considerado, por lo general, una de sus contribuciones más importantes a la axiomática moderna.

0.5. Organización de la investigación

La tesis doctoral se articula en dos partes. En la parte I reconstruyo y analizo, desde una perspectiva a la vez histórica y sistemática, lo que denomino la concepción temprana de la geometría de Hilbert, tal como es desarrollada en sus notas para clases sobre geometría y aritmética, entre 1891 y 1905. En la parte II examino y destaco la importancia de esta concepción de la geometría para la comprensión histórica del trabajo geométrico de Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899), puntualmente, de algunos resultados matemáticos alcanzados allí. De este modo, la división de la tesis doctoral en dos partes obedece a que cada una de ellas persigue objetivos generales diferentes.

La primera parte, que se titula *Geometría y método axiomático*, se compone de cuatro capítulos. En el *capítulo 1* analizo las notas de Hilbert para su primer curso dedicado a la geometría, más precisamente, a la geometría proyectiva (Hilbert 1891a). El objetivo de este capítulo es identificar una serie de tesis y cuestiones metodológicas generales, muy difundidas y discutidas hacia fines del siglo XIX en Alemania, que constituyen el 'background' geométrico de la concepción axiomática de Hilbert. En el *capítulo 2* utilizo las notas de clases (Hilbert 1894; 1898a;b;c; 1902c) para reconstruir y analizar la concepción temprana de la geometría de Hilbert. En el *capítulo 3* establezco una comparación, a raíz de las referencias textuales aportadas por estos manuscritos, entre el abordaje axiomático formal a la geometría de Hilbert y la célebre *Bildtheorie* de Heinrich Hertz (1857–1894). Sostengo de ese modo que tal confrontación resulta muy útil para explicar cómo entiende Hilbert, en este período temprano, la relación entre la estructura relacional producto de la axiomatización formal y el conjunto de hechos geométricos, con una fuerte base empírica e intuitiva, que conforma el acervo de nuestro conocimiento geométrico. Por último, en el *capítulo 4* me encargo de analizar el papel que Hilbert le atribuye explícitamente a la intuición en el proceso de axiomatización de la geometría y en la concepción general del método axiomático, principalmente sobre la base del material que aporta el manuscrito (Hilbert 1905b;c).

Por otro lado, la segunda parte, titulada *Metageometría*, consta de dos capítulos. En el *capítulo 5* examino la construcción de Hilbert de distintos cálculos de segmentos, y resalto la significación metodológica y epistemológica que nuestro matemático le asigna, fundamentalmente en sus notas de clases, a este resultado geométrico. En el capítulo 6, en cambio, me dedico a analizar el lugar que ocupan en las investigaciones geométricas de Hilbert, las propiedades metalógicas de consistencia, independencia y completitud. En particular, documento y analizo las vicisitudes en torno a la incorporación de Hilbert de su famoso axioma de completitud, en el sistema axiomático para la geometría euclídea.

Salvo que sea explícitamente aclarado, las traducciones de los textos de Hilbert, ya sean trabajos inéditos o publicados, son de mi autoría. Agradezco al Dr. Helmut Rohlfing, de la *Niedersächsische Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung*, por el permiso para citar los manuscritos de Hilbert. Los diagramas geométricos fueron realizados con el programa *GeoGebra* (versión 4.0).

Parte I.

Geometría y método axiomático

CAPÍTULO 1

Geometría, método sintético e intuición: antecedentes en la tradición geométrica del siglo XIX

1.1. Introducción

La presentación axiomática de la geometría exhibida por Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899) se construyó sobre la base de la tradición de la geometría sintética, que tomó un gran impulso a fines del siglo XVIII y mediados del siglo XIX con los trabajos de Gaspard Monge (1746–1818) y Victor Poncelet (1788–1867) en Francia, y Jakob Steiner (1796–1863) y Karl G. C. von Staudt (1798–1867) en Alemania. Este rasgo se refleja visiblemente en las notas del primer curso que Hilbert dedicó a la geometría. Se trata de un curso titulado "Geometría proyectiva" (Hilbert 1891a), dictado en Königsberg en el semestre de verano de 1891. Como su titulo lo indica, el tema de estas notas es la geometría proyectiva. Para su redacción, Hilbert se basó notablemente en la tercera edición del libro de Theodor Reye, *Geometría de la posición* (1886). El trabajo de Reye seguía a su vez estrictamente la presentación de la geometría proyectiva realizada previamente por von Staudt (1847), en su texto homónimo. Ambos trabajos se caracterizaban por utilizar exclusivamente métodos sintéticos o constructivos en la exposición y definición de los conceptos centrales de la geometría proyectiva y en la demostración de los teoremas fundamentales. Este curso permite apreciar cómo las consideraciones metodológicas de Hilbert respecto de la aplicación de métodos sintéticos en geometría, jugaron desde muy temprano un papel relevante en sus investigaciones en torno a los fundamentos de la geometría.

El objetivo de este primer capítulo es identificar una serie de tesis filosóficas y metodológicas presentes en las notas para el curso recién mencionado, las cuales conforman, en mi opinión, el trasfondo o "background" geométrico sobre el cual Hilbert construye su nueva concepción axiomática de la geometría. Es dable aclarar, sin embargo, que varias de estas ideas presentadas aquí tempranamente serán abandonadas en la medida de que su posición axiomática evolucione y se vaya consolidando. Empero otras tesis serán mantenidas durante todo este primer período de sus trabajos sobre fundamentos de la matemática, que se extiende desde 1891 a 1905.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la sección 1.2 muestro cómo Hilbert adhiere en esta etapa bien inicial a una tesis general respecto de la *naturaleza de las teorías matemáticas*, a saber: la distinción general, en virtud de su origen epistemológico, entre las disciplinas *matemáticas puras* (aritmética, álgebra, análisis, teoría de números, teoría de funciones, etc.) y las disciplinas *matemáticas mixtas* (geometría, mecánica). Asimismo, analizo una clasificación, trazada por Hilbert, de la geometría en tres ramas diferentes – geometría intuitiva, axiomática y analítica –, y afirmo que ésta fija una suerte de agenda para sus próximas investigaciones geométricas. En la sección 1.3 examino una serie alusiones acerca de una cuestión metodológica intensamente discutida en el último tercio del siglo XIX. Se trata de los debates respecto de la preferencia de los métodos analíticos o algebraicos por sobre los métodos sintéticos o constructivos en geometría. Sostengo que Hilbert anticipa aquí uno de los objetivos más fundamentales de su próximo abordaje axiomático, a saber: el método axiomático debe servir para construir puentes entre las geometrías sintéticas y la geometría analítica. En la sección 1.4 advierto que las referencias a la noción de intuición geométrica, que Hilbert presenta en estas notas, deben ser entendidas dentro del contexto dado por las discusiones metodológicas recién mencionadas. Finalmente, en la sección 1.5, comento un acontecimiento que influyó notablemente en el desembarco de Hilbert en un estudio de la geometría desde una perspectiva axiomática, a saber: la conferencia de Hermann Wiener "Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie" (Wiener 1891).

1.2. *Projective Geomerie* (Hilbert 1891a)

1.2.1. Una distinción tradicional

Hilbert comienza sus notas de clases, para el curso de 1891, con una introducción en donde presenta su 'posición filosófica' respecto de la geometría, junto con una descripción histórica muy esquemática de su desarrollo. En cuanto a su 'posición filosófica', en las primeras líneas es posible identificar una *tesis general* respecto de la naturaleza de las teorías matemáticas. Esta tesis, sin embargo, no constituye una contribución original de Hilbert, sino que reproduce una posición muy difundida e influyente entre los matemáticos alemanes del siglo diecinueve. En efecto, habitualmente es atribuida a Gauss, quien la expresa de un modo explícito en una famosa carta a Bessel:

> Según mi más profundo convencimiento, la teoría del espacio tiene en nuestro conocimiento *a priori* un lugar completamente distinto que la pura teoría de las magnitudes [*reine Grössenlehre*]; nuestro conocimiento de la primera carece de aquel completo convencimiento de su necesidad (y también de su verdad) que es propio de la segunda. Debemos humildemente admitir que, mientras el número es sólo un producto de nuestro pensamiento, el espacio tiene además una realidad fuera de nuestro pensamiento, a la cual no podemos prescribirle *a priori* sus leyes. (Gauss a Bessel, 9 de abril de 1830; en Gauss y Bessel 1880, p. 497)

De acuerdo con esta tesis de Gauss, dentro de las matemáticas debe diferenciarse entre aquellas disciplinas que se basan exclusivamente en el pensamiento puro y aquellas que, al menos en parte, tienen un origen *empírico*. Es decir, en virtud de su origen epistemológico, es preciso distinguir entre la *matemática pura* (aritmética, álgebra, análisis, teoría de números, teoría de funciones, etc.) y lo que podría designarse como la *matemática mixta*, en donde se ubican la geometría y la mecánica.[1] En parte, esta tesis de Gauss es una consecuencia de su férreo rechazo a la filosofía de la matemática de Kant; en especial, a la noción de intuición pura. Es decir, su propio descubrimiento de la geometría hiperbólica lo llevó a rechazar que la geometría pueda ser considerada una ciencia *a priori*, fundada una intuición pura o *a priori*, tal como lo pretendía Kant:

> Cada vez más estoy llegando a la convicción de que la necesidad de nuestra geometría [euclídea] no puede ser probada, al menos no *por medio del* entendimiento *humano* ni tampoco *para* el entendimiento *humano*. Quizás en alguna otra vida lleguemos a una compresión diferente de la esencia del espacio, la cual ahora nos es imposible alcanzar. Hasta entonces, no debemos poner a la geometría en el mismo nivel que la aritmética, que es puramente *a priori*, sino junto a la mecánica. (Gauss 1900, p. 177)

[1] La expresión "matemática mixta" es utilizada por Ferreirós (2006).

El aspecto central de la distinción de Gauss entre matemática pura y matemática mixta responde a la diferencia fundamental trazada entre aritmética y geometría, en lo que respecta a su estatus epistemológico. Mientras que la primera debía ser considerada una ciencia *a priori*, basada en las "leyes del pensamiento", la segunda era una ciencia empírica, al igual que una teoría física como la mecánica.[2]

Ahora bien, esta distinción entre aritmética y geometría propugnada por Gauss se convirtió rápidamente una 'tesis tradicional', principalmente al ser defendida por gran parte de los matemáticos alemanes del siglo diecinueve. Es decir, aunque con importantes matices, un presupuesto común del que partieron muchos de los matemáticos más importantes del siglo XIX en Alemania – Kummer, Dirichlet, H. Grassmann, Riemann, Weierstrass, Kronecker, Dedekind y Cantor, por mencionar algunos – consistió en defender que mientras la aritmética, el álgebra y el análisis debían ser consideradas un producto del pensamiento puro, y por tanto como disciplinas matemáticas *puras o a priori*, la geometría era respecto a su origen una ciencia empírica.[3] Asimismo, ésta fue la tradición en la que el propio Hilbert se formó como matemático, no solamente en cuanto a la geometría, sino principalmente en el campo de las matemáticas puras como el álgebra y el análisis.[4]

En las primeras líneas de su curso "Projective Geometrie" (1891), Hilbert reproduce entonces esta tesis de la siguiente manera:

> La geometría es la ciencia de las propiedades del espacio, y se diferencia substancialmente de las ramas matemáticas puras, como la teoría de números, el álgebra y la teoría de funciones. Los resultados de estas disciplinas pueden ser alcanzados a través del pensamiento puro, en tanto que los hechos afirmados son reducidos por medio de claras inferencias lógicas a hechos más simples, hasta que finalmente sólo se vuelve necesario el concepto de número entero. Toda proposición incluso más fundamental [*tief liegende*] y complicada de la matemática pura debe poder ser finalmente reducida a relaciones acerca de los números enteros 1, 2, 3, . . . Al concepto de número entero podemos llegar a través del pensamiento puro, quizás cuando yo cuento mis pensamientos. Métodos y fundamentos de la matemática pertenecen al pensamiento puro.

[2] Sobre la posición filosófica de Gauss respecto del estatus epistemológico de la aritmética y la geometría puede verse (Ferreirós 2006).

[3] La tendencia entre los matemáticos alemanes de identificar a la aritmética como una 'ciencia matemática pura', es enfatizada por (Ferreirós 2007, cap. 1).

[4] Las influencias más importantes de Hilbert, en su período de instrucción matemática en Königsberg, son mencionadas y analizadas en (Reid 1996), (Rowe 2003) y (Corry 2004a).

> No necesito nada más que el pensamiento lógico puro, cuando me ocupo de la teoría de números o del álgebra. (Hilbert 1891a, p. 22)

En este condensado pasaje Hilbert hace alusión a una serie de ideas. En primer lugar, adhiere a la distinción gaussiana al señalar que la geometría se distingue de la aritmética y de las demás disciplinas matemáticas puras, en virtud de que éstas sólo necesitan del 'pensamiento puro' para operar y llegar a sus leyes y conceptos básicos. En segundo lugar, presenta una definición tradicional o clásica de la geometría como la ciencia encargada de estudiar las propiedades del espacio (físico).[5] Esta definición tradicional, incompatible con una concepción axiomática formal, es repetida en notas para cursos posteriores, de manera que me referiré a ella más adelante. Asimismo, Hilbert reproduce también una popular tesis *reduccionista* en la teoría de números, al estilo de muchos de los matemáticos involucrados en el proceso conocido como la 'aritmetización del análisis' – Weierstrass, Kronecker –, al sostener que es posible reducir todas las proposiciones fundamentales de la matemática pura (aritmética, álgebra y análisis) a proposiciones en donde sólo se hable de relaciones entre números naturales.[6] Por último, encontramos una suerte de 'posición logicista' respecto de la aritmética, en tanto se afirma que en ella sólo se necesita del pensamiento lógico puro para operar y que al concepto de número entero podemos "llegar a través del pensamiento puro". Más precisamente, esta descripción de Hilbert de la aritmética se asemeja mucho a un pasaje del prefacio de la primera edición de *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Dedekind 1888), en donde Dedekind califica a su proyecto de logicista en el siguiente sentido:

> Al decir que la aritmética (álgebra, análisis) es sólo parte de la lógica, estoy manifestando ya que considero el concepto de número como algo completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y

[5] Entre otros, Kant define en la *Estética Transcendental* a la geometría que como la ciencia que estudia las propiedades del espacio (B 40).

[6] Con la expresión *"aritmetización del análisis"* generalmente suele mentarse una serie de procesos o posiciones distintas. Por un lado, al proceso de rigorización del análisis, emprendido de un modo sistemático por Cauchy, quien pretendía introducir rigor en esta disciplina matemática eliminando todas las consideraciones geométricas e intuitivas de la definición de sus conceptos básicos, como por ejemplo, 'límite', 'sucesión', 'convergencia', etc. Por otro lado, esta expresión alude también al programa 'reduccionista' impulsado por algunos de estos matemáticos, notablemente por Kronecker. Brevemente, este último sostenía que, dadas las dificultades existentes en aquel momento para definir de un modo lógicamente claro y preciso el concepto de número real, era necesario reducir todas las proposiciones en donde participen números reales a proposiciones sobre números naturales, que era el único conjunto numérico lógicamente claro. Sobre los diversos sentidos del término aritmetización véase Petri y Schappacher (2006). Un análisis esquemático de los avatares, en la segunda mitad del siglo XIX, para definir el número real y del programa de Kronecker para la fundamentación de la matemática, puede encontrarse en (Kline 1992, cap. 41).

> tiempo, como algo que es más bien un resultado inmediato de las leyes puras del pensamiento. (Dedekind 1888, p. 97)

La influencia de Dedekind en las ideas tempranas de Hilbert sobre los fundamentos de la matemática, en este período inicial, ha sido sostenida por Sieg (1999; 2009), Ferreirós (2009) y Klev (2011). En el capítulo siguiente me referiré a ella, dado que es conveniente avanzar un poco antes en la presentación del planteamiento de Hilbert. En cambio, creo que es oportuno adelantar ya que, en este pasaje, Hilbert adopta respecto de la aritmética una posición "logicista", *en un sentido laxo*. Es decir, nuestro autor reconoce que la aritmética debe ser considerada una disciplina matemática pura, puesto que se basa exclusivamente en las leyes del pensamiento puro, y por lo tanto no requiere de otra fuente externa de conocimiento, como ocurre en la geometría con la experiencia y la intuición.[7] Hilbert enfatiza explícitamente esta asimetría, resaltando el carácter empírico de las fuentes que están en la base de la geometría:

> No puedo nunca fundar las *propiedades del espacio* en la mera reflexión, tanto como no puedo reconocer de ese modo las *leyes básicas de la mecánica*, las *leyes de la gravitación* o cualquier otra *ley física*. El espacio no es un producto de mi *pensamiento*, sino que me es dado sólo a través de los *sentidos* [Sinne]. Para representarme sus propiedades necesito por ello de mis sentidos. Necesito de *la intuición y el experimento*, tanto como se los requiere para fundar las leyes físicas, donde también la *materia debe sernos dada a través de los sentidos*. (Hilbert 1891a, pp. 22–23)

Hilbert sostiene entonces que la geometría, al igual que otras disciplinas físicas como la mecánica, necesita de algo más que el pensamiento puro para llegar a sus leyes y conceptos básicos. Ahora bien, siguiendo la tesis originada en Gauss, adopta además una *posición empirista* afirmando que esas fuentes externas al pensamiento poseen un carácter empírico. Es decir, en concordancia con el modo en que se define el objeto de estudio de la geometría en el pasaje inicial, Hilbert señala que el "espacio" nos es dado a través de los sentidos [*Sinne*]. En consecuencia, la geometría debe ser considerada en cuanto a su origen como una *ciencia natural*. Hilbert lo expresa inmediatamente a continuación del siguiente modo:

[7] Debe reconocerse que la expresión "leyes del pensamiento puro" es sumamente equívoca. En efecto, aparece en diversos tratados de la época, aunque presumiblemente con un significado distinto. Por ejemplo, en los tratados de Boole y Schröder, y más tarde en Frege y Dedekind. Sobre este tema puede consultarse (Hallett 1994).

> De hecho la *geometría más antigua* surge también de la *intuición* [Anschauung] *de los objetos* en el espacio, tal como se ofrece en la *vida cotidiana*; al igual que todas las ciencias, en un comienzo se plateó problemas de una necesidad práctica y se basó en el experimento más simple que se pude hacer, es decir, en el dibujar. (Hilbert 1891a, p. 23)

Debemos reconocer que esta intuición, que es nombrada junto con la experiencia como la primera fuente de conocimiento en la geometría, no puede poseer un carácter *a priori*. Sin embargo, Hilbert intenta desligarse de la acuciante pregunta filosófica por el estatus epistemológico de la intuición:

> El axioma de las paralelas es proporcionado por la intuición. Si esta última es innata o adquirida, si aquel axioma expresa una verdad, si debe ser corroborado por la experiencia, o si ello es innecesario, es algo que aquí no nos compete. Sólo nos ocupamos de la intuición, y ésta necesita de aquel axioma. (Hilbert 1891a, p. 27)

En los capítulos siguientes veremos que una actitud constante de Hilbert, en sus cursos sobre geometría correspondientes a este período, es tratar de eludir la pregunta filosófica respecto de si la intuición geométrica reviste un carácter empírico o uno *a priori*, en un sentido kantiano. Sin embargo, en la medida en que afirme que la geometría no es en cuanto a su origen una ciencia *a priori* como la aritmética, deberá reconocer que la intuición que está detrás de algunos de sus axiomas o principios y conceptos básicos, tiene necesariamente un carácter empírico.

1.2.2. La división de la geometría

Otro elemento interesante que presenta Hilbert en estas notas es una clasificación o división de la geometría en *tres ramas o sub–disciplinas diferentes*. Es decir, nuestro autor señala que, si se considera la geometría de un modo general como una única disciplina matemática, entonces es posible distinguir en ella las siguientes ramas:

1. Geometría de la intuición.

2. Geometría axiomática.

3. Geometría analítica.

La “geometría de la intuición” [*Geometrie der Anschaunng*], o como la llama posteriormente, la geometría intuitiva [*anschauuliche Geometrie*] (Hilbert y Cohn-Vossen 1996), es definida del siguiente modo:

> [la geometría de la intuición] reduce sus afirmaciones a los hechos simples de la intuición, sin investigar ella misma su origen y legitimidad; [esta geometría] utiliza sin reparos el movimiento, los límites [*Grenzlage*], el paralelismo, etc., y es también la geometría euclídea.[8] (Hilbert 1891a, p.21)

Asimismo, Hilbert establece en la geometría de la intuición una nueva división: *i.)* la ‘geometría escolar’ o, más tarde, geometría elemental (teoremas de congruencia, triángulos, polígonos, círculos, etc.); *ii.)* la geometría proyectiva (secciones cónicas, puntos focales, curvas en el espacio); *iii.)* el *Analysis situs* o topología.[9]

En el segundo lugar de esta clasificación se encuentran los ‘axiomas de la geometría’ [*Axiome der Geometrie*]. Su tarea es “investigar qué axiomas son utilizados en los hechos establecidos en la geometría de la intuición y comparar sistemáticamente las geometrías que surgen cuando uno de aquellos axiomas es omitido” (Hilbert 1891a, p. 22). Ésta es una descripción bastante precisa de la tarea que Hilbert emprende en sus trabajos geométricos subsiguientes, de modo que parecería correcto llamarla “geometría axiomática”.

Finalmente, en el tercer lugar se encuentra la ‘geometría analítica’, que Hilbert describe del modo habitual, reduciéndola al método de las coordenadas: “[la geometría analítica] corelaciona desde el comienzo los puntos de una línea y los números, reduciendo de ese modo la geometría al análisis” (Hilbert 1891a, p. 22). Asimismo, cada una de estas ramas de la geometría posee un significado diferente. La geometría de la intuición tiene un valor estético, pedagógico y práctico; la geometría axiomática es fundamental desde un punto de vista epistemológico [*erkenntnisstheoretisch*]; por último, la geometría analítica es importante para la matemática científica, es decir, para la aplicación de la matemática a las ciencias físicas.[10]

Otro aspecto que resulta interesante de esta clasificación es que Hilbert establece allí una agenda para sus investigaciones futuras en el campo de la geometría. En efecto, en los pocos años siguientes cada una de estas ramas de la geometría será tratada en

---

[8] No es del todo claro a qué se refiere Hilbert con la expresión “uso de límites” [*Grenzlage*]. Respecto del movimiento, presumiblemente esté pensando en el tratamiento de la congruencia a través del movimiento de las figuras en el plano, es decir, al famoso método de “superposición” de Euclides en los *Elementos*.

[9] Cf. (Hilbert 1891a, p. 21).

[10] Cf. (Hilbert 1891a, p. 22).

sus cursos. Como hemos señalado, este primer curso de 1891 sobre geometría proyectiva se corresponde con la geometría de la intuición. Hilbert lo reconoce explícitamente al advertir que la geometría proyectiva puede ser también llamada 'geometría de la intuición', y ello en función de que en ella se apela mayormente a las relaciones intuitivas sin utilizar el cálculo, *i.e.*, sin acudir a herramientas algebraicas para expresar las relaciones o propiedades proyectivas.[11] Más aún, a la hora de referirse a uno de los conceptos básicos de la geometría proyectiva, los elementos del infinito o 'impropios', y a los principios fundamentales, Hilbert realiza la siguiente aclaración:

> La introducción de elementos infinitos no es sino nuevamente un modo abreviado de hablar acerca de simples hechos intuitivos [*einfache anschauliche Tatsachen*]. Este modo de hablar se volverá particularmente claro cuando establezcamos, a continuación, las simples leyes fundamentales de la intuición. (Hilbert 1891a, p. 28)

Hilbert enuncia seguidamente ocho leyes fundamentales de la intuición, que no son sino los ochos 'axiomas' de incidencia de la geometría proyectivas. En ese sentido, es consecuente con su clasificación al cuidarse de no hablar de axiomas, sino de leyes fundamentales de la intuición. Por otra parte, la geometría axiomática es el tema de investigación del siguiente curso que Hilbert dedica a la geometría. Este curso titulado "Los fundamentos de la geometría" fue dictado en el semestre de invierno de 1893/94 y constituye su primer tratamiento axiomático de cualquier disciplina matemática. Asimismo, es posible sostener que a partir de aquel momento Hilbert se identificará completamente con este tipo de abordaje a la geometría. Sin embargo, en este período, también encontramos dos cursos en los que se ocupa de exponer y analizar la geometría analítica. El primero de ellos se titula "Geometría analítica del espacio" (Hilbert 1893/4) y tuvo lugar en el semestre de invierno de 1893/4; el segundo lleva el nombre "Geometría analítica del plano y el espacio" (Hilbert 1894/5), y fue dictado al año siguiente, en el semestre de invierno de 1894/5. En resumen, la temprana clasificación de la geometría presentada por Hilbert en las notas para el curso de 1891, le sirvió claramente de guía para sus investigaciones geométricas inmediatamente posteriores.

Ahora bien, quizás lo más relevante de esta clasificación no es precisamente la división de la geometría en distintas ramas o sub–disciplinas, con *diferentes objetos de investigación*. Por el contrario, la clasificación de Hilbert no parece ser del todo correcta en este respecto. Es decir, la geometría elemental plana o la geometría proyectiva pueden

[11] Cf. (Hilbert 1891a, p. 21).

pertenecer tanto a la geometría intuitiva como a la geometría analítica, en función de los *métodos* que se utilicen para presentarlas. En el fondo, la división introducida por Hilbert responde más bien a una clasificación de la geometría en virtud de los diferentes *métodos* que pueden ser utilizados para abordarla y para demostrar sus teoremas. Esta afirmación es confirmada en las reflexiones que Hilbert introduce a la largo de sus notas.

A modo de ilustración, siguiendo la clasificación de Hilbert, podemos decir que la geometría proyectiva puede ser abordada de tres modos distintos. En primer lugar, de un modo intuitivo, o mejor, sintético. Un ejemplo de este tipo de abordaje son los trabajos de Steiner y von Staudt, en Alemania, que constituyen los intentos más elaborados de construir a la geometría proyectiva utilizando únicamente métodos sintéticos. Cabe aclarar que éstas son, junto con Reye (1886), las fuentes que utiliza Hilbert para la elaboración de sus notas de clases. En segundo lugar, la geometría proyectiva puede ser abordada axiomáticamente. Como se sabe, la perspectiva axiomática fue introducida dentro de la geometría por Moritz Pasch (1843–1930), en su notable libro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Pasch 1882). En tercer lugar, la geometría proyectiva puede ser abordada analíticamente. Los métodos analíticos fueron introducidos en la geometría proyectiva por August Möbius (1790–1868), a través de la noción de coordenadas homogéneas. Posteriormente, esta perspectiva fue continuada y profundizada por Plücker, Clebsh y Klein.[12]

El elemento más interesante y relevante de esta clasificación de la geometría consiste así en que a través de ella se alude a una cuestión metodológica muy discutida en aquella época, a saber: el debate acerca de la utilización de métodos sintéticos y métodos analíticos o algebraicos en geometría. Como es bien sabido, esta cuestión metodológica fue objeto de numerosas e intensas discusiones a comienzos del XIX, en gran medida debido al resurgimiento de los métodos geométricos puros en la geometría proyectiva. De este modo, será importante analizar las observaciones de Hilbert en torno a estas discusiones, en la medida en que nos permitirán precisar cuáles eran sus ideas respecto de los fundamentos de la geometría, antes de adoptar una perspectiva axiomática. Sin embargo, teniendo en cuenta los objetivos específicos de este trabajo, presentaré esta discusión de un modo esquemático, limitándome a ofrecer un panorama general que permita apreciar mejor las ideas que Hilbert anticipa aquí, y que pronto se convertirán en motivaciones importantes para su abordaje axiomático a la geometría.[13]

[12] Sobre la geometría proyectiva sintética y analítica véase (Nabonnand 2008a). Un estudio más introductorio puede encontrarse en (Gray 2006).

[13] El siglo XIX, particularmente debido al surgimiento y consolidación de las geometrías no–euclídeas, es uno de los períodos más extensamente investigados en la historia de la geometría. Respecto de

1.3. El método sintético y el método analítico en geometría

Si bien los conceptos de análisis y síntesis, y consecuentemente de método analítico y método sintético, son nociones con una basta tradición filosófica, en el contexto de la geometría poseen un significado acotado con presión e independiente de las diversas interpretaciones filosóficas que posteriormente se les pueda imprimir. En su libro *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (Klein 1949), Felix Klein describe ambos métodos de la siguiente manera y vierte su opinión respecto de cuál es el sentido de esta distinción:

> La geometría sintética es aquella que estudia las figuras en cuanto tales, sin recurrir a fórmulas, mientras que la geometría analítica utiliza consistentemente dichas formulas, a partir de la adopción de un sistema apropiado de coordenadas. Correctamente entendidos, solamente existe entre estos dos tipos de geometría una diferencia de gradación, en tanto se le otorgue mayor importancia a las figuras o a las fórmulas. (...) En matemática, sin embargo, como en cualquier otro lugar, el hombre se inclina por formar partidos, de modo que así surgieron escuelas de [geómetras] 'sintéticos' puros y escuelas de [geómetras] 'analíticos' puros, quienes pusieron un énfasis primordial en la absoluta 'pureza del método'. (Klein 1949, p. 55)

En un sentido general, la geometría sintética es aquella que basa el razonamiento y las demostraciones en la *construcción de los objetos geométricos* a partir de ciertas reglas o postulados. Los elementos básicos con los que trata son los puntos, líneas y planos geométricos, y todo el razonamiento y los métodos de demostración se circunscriben a construcciones en las que se emplean técnicas provenientes exclusivamente de la geometría. Es decir, el método sintético emplea técnicas puramente geométricas para investigar las propiedades de los objetos geométricos, i.e., técnicas que no provienen originalmente de otras disciplinas matemáticas, como el álgebra. Es por ello que suele afirmarse que la geometría sintética considera "a las figuras geométricas en sí" (Fano

la geometría proyectiva, también ha sido objeto de numerosos estudios. Un análisis general puede verse en Gray (2006), mientras que un estudio más exhaustivo se encuentra en Nabonnand (2008a). Por otro lado, la discusión quizás más completa respecto de los abordajes analíticos y sintéticos en geometría, sigue siendo el clásico artículo de Fano (1907). Klein (1926; 1949) contiene numerosas reflexiones históricas acerca de estas discusiones metodológicas, y Kolmorogov y Yuskevich (1996) ofrece una mirada un poco acotada, aunque muy precisa, de estos desarrollos en la geometría proyectiva. Finalmente, (Kline 1992, caps. 14 y 35) presenta de un modo sumamente comprensible los desarrollos teóricos que dieron surgimiento a la geometría proyectiva.

1907, p. 223). En breve, en la geometría sintética la teoría es construida sobre fundamentos puramente geométricos, independientes del álgebra y del concepto de continuo numérico, y los teoremas se deducen por un razonamiento basado exclusivamente en un conjunto inicial de proposiciones – los axiomas o postulados – y en las construcciones por ellos permitidas.

Por otra parte, la idea fundamental en la que se basan los métodos de la geometría analítica consiste en afirmar que los problemas geométricos pueden ser abordados de un modo simple, general y de carácter unificador, a saber, el método de las coordenadas. Este método consiste básicamente en asociar a cada punto geométrico en el plano o en el espacio un par o una terna ordenada de números, respectivamente, y en la traducción de las figuras geométricas en ecuaciones de diversos grados. De ese modo, el principio rector de la geometría analítica sostiene que, en virtud del método de las coordenadas numéricas, los problemas geométricos pueden ser resueltos fácilmente a partir del tratamiento algebraico de las ecuaciones, es decir, utilizando métodos tomados del álgebra.

El primer ejemplo de la geometría sintética se encuentra en la presentación axiomática clásica de la geometría de Euclides. En los *Elementos* encontramos una descripción sistemática de las técnicas geométricas y de los métodos de demostración que formaron la base de la geometría sintética, como así también un modelo sumamente influyente para la presentación sintética de la geometría, retomado posteriormente por los geómetras 'puristas' hacia fines del siglo XVIII.[14] En cambio, por el lado de la geometría analítica, el método de las coordenadas numéricas y la aplicación del álgebra a la geometría fue desarrollado originalmente por Descartes y Fermat en el siglo XVII.[15]

Ahora bien, los métodos analíticos y algebraicos desarrollados por Descartes y Fermat tuvieron un éxito inmediato y ejercieron una tremenda influencia durante los siguientes ciento cincuenta años, hasta el punto que en este período llegaron a excluir casi por completo a los métodos sintéticos. Por un lado, este éxito se debió a la simplificación que estas nuevas técnicas hicieron posible en el tratamiento de diversos problemas geométricos; en particular, en el campo de las secciones cónicas, cuya resolución resultaba sumamente compleja cuando se utilizaban métodos sintéticos o constructivos. Por otro lado, el gran atractivo del método analítico, basado en la introducción de coordenadas numéricas, residía en que permitía conseguir una generalización en las técnicas geométricas, ausente

[14] Interesantes estudios sobre la geometría sintética, en este período inicial, se encuentran en el trabajo clásico de Coolidge (1940) y en Mueller (1981).

[15] El estudio integral más importante sobre la geometría analítica sigue siendo el texto clásico de Boyer (1957). Bos (2001) es una investigación exhaustiva sobre el método de las coordenadas en Descartes. Por último, Mancosu (1996) profundiza particularmente en los aspectos metodológicos asociados con el surgimiento y la evolución de la geometría analítica en el siglo XVI y XVII.

en el método sintético originalmente desarrollado por Euclides. En efecto, gracias a las herramientas proporcionadas por la importación de técnicas algebraicas en la geometría, los geómetras analíticos sostenían que en principio cualquier problema geométrico podía ser resuelto siguiendo tres simples pasos: 1) asignación de un nombre a los elementos conocidos y a los no conocidos; 2) búsqueda y solución de las ecuaciones algebraicas; 3) demostración de la posibilidad de construcción de la figura geométrica con la ayuda de los dos pasos previos. Precisamente, en la descripción histórica de la introducción de su curso de 1891, Hilbert apela a la generalidad introducida en la geometría gracias al método de las coordenadas, al describir las ventajas del método de Descartes y Fermat por sobre el método de Euclides:

> Así como la geometría griega era rica en *razonamientos, resultados y problemas*, así también adolecía de una *carencia esencial*: le faltaba un *método general*, sólo a través del cual es posible un *desarrollo fructífero* de la ciencia. En Euclídes toda la geometría aparece ya como terminada, y no hay espacio para el *libre trabajo productivo*. En efecto, cerca de los siguientes *dos mil años* [los geómetras] se ocuparon de *estudiar y comentar a Euclides con enorme respeto y laboriosidad infinita*, sin haber ido un poco más allá. Por ello fue Descartes – el fundador de la filosofía moderna – quien introdujo un nuevo *principio general* dentro de la geometría (1637). (Hilbert 1891a, pp. 23–24)

Ahora bien, la primacía absoluta de la geometría analítica comenzó a ser cuestionada hacia fines del siglo XVIII, cuando un renovado interés recayó sobre los métodos sintéticos en geometría, a partir del surgimiento de la geometría proyectiva como una nueva área de investigación matemática. La geometría proyectiva se ocupa de estudiar las propiedades invariantes bajo las operaciones de proyección. Es posible encontrar ya en la antigüedad, en los trabajos de Euclides, Apolonio y Pappus, algunos teoremas acerca de propiedades proyectivas de las figuras, aunque por supuesto no reconocidos en cuanto tales. Asimismo, durante el siglo XVII, los descubrimientos de Blais Pascal (1623–1662) y Girard Desargues (1591–1661) le dieron un enorme impulso al estudio de estas propiedades geométricas, aunque se vieron rápidamente opacados por el surgimiento de la geometría analítica. Entre otros resultados, al primero se le atribuye el célebre teorema de Pascal sobre los puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscripto en una cónica. Asimismo, al segundo se lo reconoce también por otro teorema de enorme importancia para la geometría proyectiva: el llamado teorema de Desargues sobre los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos triángulos en perspectiva.[16] Sin embargo, estos descubrimientos y los métodos desarrollados por Pascal y Desargues fueron rescatados del olvido hacia fines del siglo XVIII, gracias a la revitalización de los métodos geométricos puros propugnada por Gaspard Monge (1746–1818), en su trabajo pionero *Traité de géométrie descriptive* (Monge 1799).[17]

En su influyente libro Monge describió, utilizando técnicas puramente geométricas, cómo proyectar objetos tridimensionales en el plano, de manera que a partir del estudio de las figuras planas era posible deducir propiedades geométricas del objeto tridimensional. El área principal del tratado de Monge fue así lo que más tarde se conocería como geometría proyectiva. Más aún, aunque previamente había realizado valiosas contribuciones en el campo de la geometría analítica y diferencial, y en consecuencia no se consideraba a sí mismo un detractor del abordaje algebraico a la geometría, la utilización de Monge de métodos geométricos puros inspiró a muchos de sus discípulos, en la pujante *École Polytechnique* de París, a emprender la tarea de mostrar que la geometría pura no sólo conservaba su importancia y autonomía, sino que además se le podía conferir el mismo poder y rigor que la geometría analítica. Algunos de sus destacados alumnos fueron Charles Brianchon (1785–1823), Lazare Carnot (1753–1823) y Victor Poncelet (1788–1867). En particular, en la obra de este último suele identificarse el comienzo de la geometría proyectiva como una nueva disciplina geométrica, con un objeto de estudio propio, independiente de la geometría euclídea.

La obra fundamental de Poncelet fue su célebre *Traité de propiétés projectives des figures* (Poncelet 1822), en donde se encuentra la primera definición explícita de la geometría proyectiva como el estudio de las propiedades proyectivas de las figuras, i.e., las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo las operaciones de proyección y sección. Asimismo, en este trabajo Poncelet presentó la primera exposición sistemática de los conceptos, leyes y teoremas fundamentales de la geometría proyectiva. Tanto para la definición del objeto de estudio de la geometría proyectiva, como para la exposición sistemática de sus conceptos básicos y teoremas fundamentales, Poncelet utilizó estrictamente métodos sintéticos o puramente geométricos. Un claro ejemplo es la descripción que se encuentra en el tratado de Poncelet de la noción *homología* entre dos figuras, que resulta crucial para definir los conceptos fundamentales de proyectividad y

[16] Estos dos teoremas son analizados en el capítulo 5.

[17] Además del éxito abrumador inmediato de la geometría analítica, la escasa repercusión que tuvieron los trabajos de Pascal y Desargues se debió a que las obras originales se perdieron, y por lo tanto, sus resultados sólo fueron conocidos indirectamente. Véase la introducción de Desargues (1987) y Andersen (2007).

perspectividad.[18] Estos conceptos resultaban centrales para Poncelet, ya que permitían aplicar eficientemente una técnica puramente geométrica para estudiar las propiedades proyectivas: partiendo de una figura dada, se buscaba una figura homóloga más simple y se la investigaba para encontrar propiedades que son invariantes bajo proyección y sección. De ese modo, las propiedades descubiertas en la figura homóloga más simple, eran también válidas en la figura original más compleja. Esta validez estaba asegurada a su vez por el controvertido "principio de continuidad", postulado por Poncelet.[19]

Otros conceptos que se encuentran sistemáticamente expuesto en el tratado de Poncelet son las nociones de puntos, líneas y planos 'impropios' o del infinito, las nociones de polo y polar con respecto a una cónica, el concepto de correspondencia proyectiva de dos planos u homografía y el principio de dualidad. En resumen, el tratado de Poncelet llevó a la culminación del proceso inicial de formación de la geometría proyectiva. El objeto de estudio de esta nueva disciplina fue definido y sus conceptos básicos, principios y teoremas más importantes fueron caracterizados y obtenidos a partir del método sintético. Asimismo, ejerciendo una influencia quizá más grande que la de Monge, los trabajos de Poncelet dejaron abiertos una serie de problemas que fueron abordados posteriormente, en términos puramente geométricos, por Jakob Steiner (1796–1863) y Christian von Staudt (1798–1867) en Alemania; por Michel Chasles (1793–1880) en Francia y por Luigi Cremona (1830–1903) en Italia.

Poncelet se interesó además por las disputas "metodológicas" de los geómetras de la época, respecto de cuál era el método más *apropiado y provechoso* para la resolución de los problemas geométricos, o sea, los métodos de la geometría sintética o los métodos del álgebra y el cálculo. Esta controversia empezó a ganar mayor repercusión hacia la década de 1820, a partir del renovado impulso ganado por los métodos sintéticos gracias a las nuevas técnicas de la geometría proyectiva desarrollada por Poncelet. El geómetra francés tomó partido por los primeros, y aunque nunca negó la utilidad y eficacia de los métodos analíticos, sostuvo que los métodos geométricos puros podían ser *generalizados* de tal manera que resulte posible probar por medios sintéticos todos aquellos problemas geométricos que inicialmente habían sido demostrados por medios analíticos. Más precisamente, con Poncelet los métodos sintéticos adquieren una nueva dimensión, en la medida en que la identificación, desde los tiempos de Euclides, de las técnicas pura-

[18] Dos figuras son homólogas si es posible derivar una de ellas a partir de la otra mediante una proyección y sección – lo que se denomina perspectividad, o mediante una serie de proyecciones y secciones – lo que se conoce como proyectividad.

[19] El "principio de continuidad" de Poncelet ha sido intensamente analizado en la literatura. Véase, por ejemplo, Gray (2006).

mente geométricas con la utilización de diagramas o figuras, comenzó a ser atenuada.[20] La distinción entre métodos sintéticos y método analíticos comienza a ser entendida ahora en otros términos, a saber: mientras que en las geometrías proyectiva y euclídea sintéticas, los elementos y relaciones básicas son descriptas y caracterizadas exclusivamente en función de los objetos geométricos tradicionales (punto, línea, plano, etc.), las técnicas analíticas traducen las relaciones geométricas a relaciones entre números, y emplean técnicas tomadas del álgebra y el análisis para la resolución de los problemas geométricos planteados de esta manera.

En breve, un primer aspecto alrededor del cual gravitaron inicialmente los debates sobre la utilización de métodos geométricos puros y métodos analíticos fue, como hemos visto en la caracterización de F. Klein, la cuestión de *la pureza del método o el purismo metodológico*. En el fondo, lo que discutían los geómetras de la época era qué métodos de demostración podían ser aceptados, o en otras palabras, a qué debía considerarse una justificación adecuada para los teoremas de las distintas ramas de la geometría. Ello se nota fácilmente en los argumentos esgrimidos por lo geómetras sintéticos para rechazar el empleo técnicas e instrumentos tomados del álgebra en la resolución de problemas geométricos. Los defensores de los métodos sintéticos enfatizaban principalmente que los resultados alcanzados por la geometría analítica, en donde el álgebra constituida la esencia del método, difícilmente podían ser aceptados como verdaderamente geométricos. Es decir, para los geómetras sintéticos era evidente que en la serie de manipulaciones algebraicas de las fórmulas o ecuaciones de las figuras geométricas, resultaba imposible seguir cada uno de los pasos geométricos que correspondían a las operaciones algebraicas realizadas. De allí se seguía entonces que, para este grupo de geómetras, el método analítico no sólo ocultaba el significado geométrico de los resultados arrojados, sino que además llegábamos por su intermedio a afirmaciones sin saber realmente cuál era su lugar en el sistema de las verdades geométricas. Michel Chasles, uno de los más férreos defensores de los métodos geométricos puros en Francia, lo expresaba del siguiente modo:

> ¿Es entonces suficiente en un estudio filosófico y básico de una ciencia saber que algo es verdadero si uno no sabe por qué es así y qué lugar debería ocupar en la serie de verdades a las que pertenece?[21]

Aunque para Hilbert éste era el aspecto menos interesante de la discusión entre métodos sintéticos y métodos analíticos en geometría, encontramos una crítica muy similar

[20] Esta dependencia comenzó a disolverse debido a las nuevas entidades introducidas en la geometría proyectiva, i.e., los puntos, líneas y planos del infinito. Sobre esta cuestión puede verse Nagel (1939).
[21] Citado en (Kline 1992, p. 1104).

hacia los métodos analíticos, en las notas de clases para el curso sobre geometría proyectiva que venimos analizando:

> Este razonamiento [el método de las coordenadas] *hace que de un golpe todo problema geométrico sea accesible al análisis [matemático].* Descartes se convirtió entonces *en el creador de la geometría analítica.* Inicialmente los teoremas de los griegos fueron de nuevo *demostrados* y luego generalizados. En lugar del *ingenio* [Kunstgriffe] aparecieron las *fórmulas*, *el cálculo* – y gracias a Descartes, un *método real.* Y así como estos avances fueron tan importantes y tan magnífico fue su éxito, así también sufrió finalmente la geometría bajo la educación unilateralmente orientada de este método. Ahora sólo se calculaba, sin tener la intuición de lo calculado. Se perdió el sentido por la figura y la construcción geométrica. (Hilbert 1891a, p. 24)

Por otro parte, el argumento central esgrimido por los geómetras analíticos, en favor de la utilización de los métodos algebraicos en geometría, consistía en resaltar la simplicidad de sus procedimientos y la generalidad de los resultados alcanzados. Este hecho quedaba sobremanera atestiguado por el éxito conseguido a través de estos métodos, por ejemplo, en la teoría de las secciones cónicas, donde la aplicación de métodos sintéticos resultaba sumamente engorrosa. El propio Poncelet resumió este argumento, en un trabajo dedicado a las discusiones metodológicas que recién señalábamos:

> Mientras que la geometría analítica ofrece, a través de su característico método general y uniforme, medios de proceder en la solución de las cuestiones que se nos presentan (...), mientras que llega a resultados cuya generalidad no tiene frontera, la otra [geometría sintética] procede por casualidad; su camino depende completamente de la habilidad de aquellos que la emplean y sus resultados casi siempre están limitados a la figura particular en consideración.[22]

Resumiendo lo anterior, la defensa de la utilización en geometría de técnicas algebraicas basadas en el método de coordenadas destacaba la simplicidad y generalidad de los resultados alcanzados, como así también la uniformidad en los procedimientos de resolución de los problemas geométricos. La manipulación y resolución algebraica de ecuaciones de diversos grados constituían así un método no sólo legítimo, sino además eficaz y esclarecedor en la geometría. Por el contrario, los defensores de la geometría

[22] Citado en (Kline 1992, p. 1103) y (Nagel 1939, p. 153)

sintética sostenían que solamente utilizando métodos de demostración provenientes exclusivamente de la geometría era posible llegar a afirmaciones geométricas realmente justificadas. De este modo, ambos partidos establecieron criterios bien definidos y estrictos en cuanto a qué tipo de argumentos e instrumentos podían ser aceptados en la práctica geométrica. En el caso de los geómetras sintéticos, argumentos que utilizaban sólo técnicas puramente geométricas; en el caso de los geómetras analíticos, la aplicación de herramientas conceptuales tomadas del álgebra y del análisis, a partir del establecimiento de un sistema de coordenadas adecuado.

Ahora bien, estos debates acerca del 'purismo metodológico' en geometría se profundizaron notablemente con la introducción de técnicas analíticas en la geometría proyectiva. Es decir, como ya advertimos, Poncelet (1822) había definido de un modo sistemático el objeto de la nueva geometría utilizando *estrictamente métodos puramente geométricos*. Sin embargo, no se necesitó mucho tiempo para que los matemáticos se dieran cuenta de que las propiedades proyectivas caracterizadas 'sintéticamente' por Poncelet, y que ahora se habían convertido en el centro de atención de muchas investigaciones en geometría, podían ser igualmente estudiadas a través de ecuaciones algebraicas. Para ello era necesario introducir un sistema de coordenadas adecuado en la geometría proyectiva. Y esta tarea fue llevada a cabo, hacia el final de la segunda década del siglo XIX, por los matemáticos alemanes August Möbius (1790–1868) y Julius Plücker (1801-1868), quienes fueron los primeros en introducir *coordenadas homogéneas* en la geometría proyectiva.

Las coordenadas homogéneas posibilitan el tratamiento analítico de puntos y líneas en el plano proyectivo del siguiente modo. Una ecuación se llama "homogénea" debido a que todos sus términos poseen el mismo grado. La ecuación homogénea $aX + bY + cZ = 0$ se asocia a la ecuación lineal $ax + by + z = 0$ de la siguiente manera: dada la terna (X, Y, Z) con $Z \neq 0$ que satisface la ecuación $aX + bY + cZ = 0$, el par $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ satisface $ax + by + z = 0$. Asimismo, es posible usar la terna (X, Y, Z) para representar al punto $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ en el plano euclídeo. Las ternas (X, Y, Z) con $Z = 0$ representan los puntos "ideales" del infinito en el plano proyectivo, para el cual no hay un elemento correspondiente en el plano euclídeo; ello es claro, puesto que el par euclídeo $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ supone la división por cero cuando $Z = 0$. Finalmente, de un modo similar es posible proporcionar las ecuaciones para todas las rectas en el espacio proyectivo, como así también para las curvas algebraicas en el plano proyectivo.[23]

[23] Para una explicación, en términos más modernos, de las coordenadas homogéneas en la geometría proyectiva, puede verse Seidenberg (2007). Una descripción accesible de la definición de las coordenadas homogéneas en Möbius y Plücker puede encontrase en (Kolmorogov y Yuskevich 1996) y (Gray 2006).

El empleo de métodos analíticos en la geometría proyectiva, por medio de la definición de coordenadas homogéneas, trajo aparejado ventajas muy significativas. Por ejemplo, utilizando coordenadas homogéneas no sólo se podían caracterizar los puntos ordinarios o propios en el plano, sino además los puntos del infinito; más aún, el método analítico simplificaba notablemente el trabajo con estos elementos (puntos, líneas, planos) impropios. Asimismo, las coordenadas homogéneas permitían fácilmente dar la ecuación de la recta proyectiva, y a partir de esta ecuación, resultaba muy simple formular y demostrar algebraicamente el principio de dualidad, de fundamental importancia en la geometría proyectiva.

En suma, gracias a los trabajos pioneros de Möbius y Plücker, rápidamente se volvió evidente que toda la naciente geometría proyectiva podía ser formulada tanto sintética como analíticamente. Más aún, la traducción en términos analíticos de diversos teoremas fundamentales de la geometría proyectiva, originalmente formulados en un lenguaje sintético, permitió ver con claridad que la geometría proyectiva sintética y la geometría proyectiva analítica no constituían disciplinas distintas, sino más bien eran dos modos diferentes de presentar, adquirir y justificar el conocimiento geométrico.

Luego, es manifiesto que inicialmente Hilbert tomó partido por los geómetras sintéticos. Ello no sólo se observa fácilmente en el curso de 1891 sobre geometría proyectiva que estamos comentando, sino que además es posible encontrar una declaración muy sugerente en un pasaje de sus “Diarios científicos” [*Wissenschaftliche Tagebücher*] (figura 1.1), correspondiente a un período bien inicial:

> La geometría no va tan profundo como el análisis. Si uno se dedica a la geometría, entonces ésta debe ser sintética. [Pues], ¿Qué tiene que ver la superficie o la curva observada con la ecuación $f(x, y, z) = 0$? El análisis es un instrumento ajeno a la esencia de la geometría, que por lo tanto debe ser evitado, si queremos erigir o fundar la geometría como un edificio.[24]

En primer lugar, Hilbert repite aquí el argumento de los geómetras sintéticos señalado recién para rechazar la utilización y la legitimidad de los métodos analíticos en geo-

[24] “Die Geometrie geht nicht so tief wie die Analysis. Wenn man Geometrie treibt, so muss es synthetische sein. Was hat die ausgeschaute Fläsche oder Curve mit eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ zu thun? Die Analysis ist in dem Wesen der Geometrie fremdes Hülfsmittel, welches daher vermeiden werden muss, wenn man die Geometrie als Gebäude errichten oder fundieren will. Wohl dürfen sich Geometrie und Analysis gegenseitig befruchten und zu heuristischen Zwecke einander bedienen”. **Cod. Ms. D. Hilbert 600:1**, p. 9. Es difícil especificar con precisión la fecha de este pasaje. Sin embargo, corresponde a un período bien temprano. En efecto, se encuentra en las páginas iniciales del primer volumen de los “Diarios científicos” de Hilbert, que en la cubierta lleva la fecha: Leipzig, invierno de 1885.

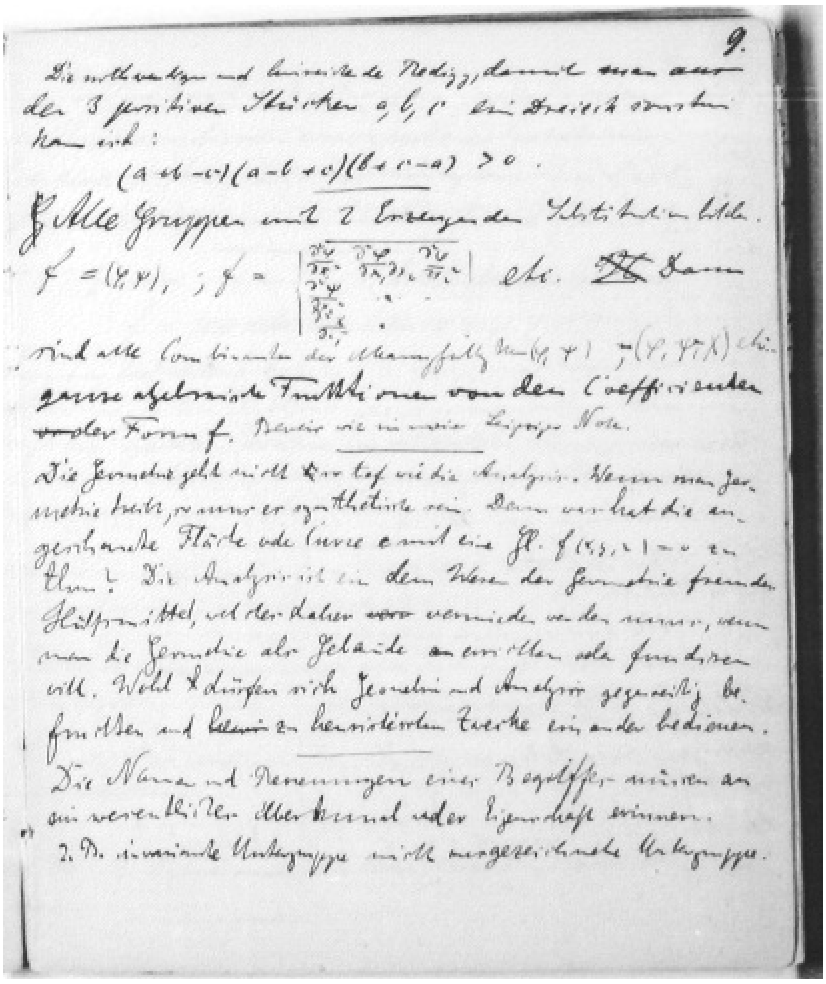


Figura 1.1.: *Wissenschafliche Tagebücher* Cod. Ms. D.Hilbert 600:1

metría. En segundo lugar, nuestro autor realiza también una observación muy significativa, cuando es considerada bajo la perspectiva que ofrecen sus posteriores investigaciones axiomáticas. En mi opinión, Hilbert anticipa en este pasaje, aunque muy esquemáticamente, un criterio metodológico que más tarde será crucial en su abordaje axiomático a la geometría: *a la hora de construir y ofrecer una fundamentación (axiomática) de la geometría, es importante que sea desarrollada de un modo autónomo, esto es, con independencia de conceptos tomados de otras disciplinas como el análisis, el álgebra e incluso la mecánica.* Más aún, uno de los objetivos fundamentales de su abordaje axiomático a la geometría será precisamente mostrar que la geometría puede ser construida, desde el punto de vista de los fundamentos, como una teoría *auto–suficiente*, i.e., una teoría que no se basa en conceptos tomados de otras disciplinas, como por ejemplo la aritmética y el análisis. Por supuesto, Hilbert no pudo haber tenido en este momento una clara idea del significado axiomático de este principio. Sin embargo, es llamativo que en un período tan temprano haya formulado explícitamente este principio metodológico fundamental.

Por otro lado, la cuestión general según la cual la geometría debe ser desarrollada de un modo autónomo, es también enfatizada por Hilbert en estas notas de clases, en relación a las contribuciones de von Staudt a los fundamentos de la geometría proyectiva. Me ocuparé de ello a continuación

1.3.1. La autonomía de la geometría proyectiva en von Staudt

En los años que siguieron al tratado de Poncelet (1822), la geometría proyectiva se convirtió en un tema de estudio predilecto para los geómetras y fue objeto de numerosas investigaciones, tanto desde perspectivas sintéticas como analíticas. No sólo se llegó a nuevos resultados, sino que además se avanzó sustancialmente en una presentación más sistemática de la teoría. En este sentido, promediando el siglo XIX, la geometría proyectiva se había convertido en una nueva rama de la geometría, cuyos objetivos generales y conceptos básicos, en tanto que distintos a los de la geometría euclídea, se encontraban bien definidos. Sin embargo, desde el punto de vista de los fundamentos, la geometría proyectiva adolecía todavía de un problema fundamental, que impedía que sea considerada como una disciplina completamente autónoma. En efecto, aunque desde hacía bastante tiempo era evidente que las propiedades de las figuras que estudiaba la geometría proyectiva eran bien diferentes de aquellas que caracterizaban el contenido de la geometría euclídea, un defecto común en todas las presentaciones, ya sea desde una perspectiva sintética o utilizando técnicas analíticas, era que se mezclaban conceptos y técnicas proyectivas con conceptos y técnicas métricas, provenientes de la geometría métrica euclídea.

El ejemplo más notable de la confusión entre conceptos proyectivos y conceptos métricos se encontraba en la definición misma de una de las nociones más básicas y fundamentales de la geometría proyectiva, a saber: el concepto de razón doble. Si bien este concepto era conocido desde la antigüedad – por ejemplo se encuentra en la obra de Pappus –, Desargues fue el primero en mostrar que la razón doble de cuatro puntos colineales era una propiedad geométrica invariante bajo las transformaciones proyectivas. Esta noción ocupó así un lugar central en el trabajo de los primeros geométricas dedicados a la geometría proyectiva, en tanto que era utilizado para definir muchas de las relaciones proyectivas más fundamentales. Por mencionar un ejemplo, Steiner – entre otros – definió la relación de *proyectividad* entre formas elementales como una biyección que conserva la razón doble.[25] Ahora bien, la definición de razón doble dada habitualmente en este período era la siguiente (figura 1.2):

Definición. *Sean A, B, C, D cuatro puntos sobre una recta, considerados en ese orden, la razón doble se define como la cantidad:*

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB}$$

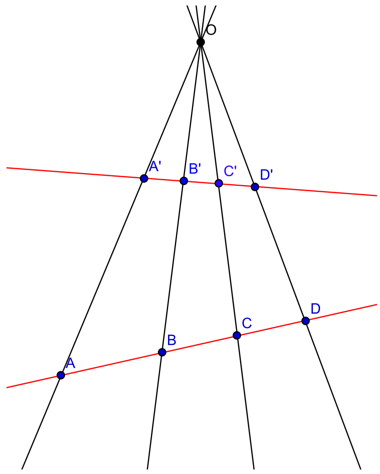


Figura 1.2.: Razón doble de cuatro puntos colineales

Como se intenta ilustrar en el gráfico, la razón doble de cuatro puntos colineales es un invariante proyectivo, ya que $\frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} / \frac{D'A'}{D'B'}$ bajo una proyección central desde un punto cualquiera O. Ahora bien, definido de este manera, este concepto proyectivo básico presuponía la capacidad de medir la distancia entre un par de puntos cualquiera, por ejemplo AB, antes de poder calcular la razón doble. En otras palabras, al definir la razón doble se apelaba a la noción de distancia, que sin embargo no es una propiedad proyectiva sino métrica, en tanto que la longitud no es propiedad invariante bajo las transformaciones proyectivas.

La tarea de liberar a la geometría proyectiva de la longitud y la congruencia, para convertirla en una rama *autónoma* o *independiente* de la geometría, fue emprendida por von Staudt. Este programa fue presentado inicialmente en su libro *Geometrie der Lage* (von Staudt 1847), y luego ampliado en los tres volúmenes de los *Beiträge zur Geometrie der Lage* (von Staudt 1856; 1857; 1860). Una de las estrategias utilizadas por von Staudt

[25] Sobre la definición de Steiner de la proyectividad, utilizando el concepto de razón doble, puede verse (Nabonnand 2008a).

para liberar a la geometría proyectiva de las nociones métricas, consistió en renunciar a la noción de razón doble para definir la proyectividad, y suplantarla por el concepto de *cuaterna armónica*, que podía ser definido usando técnicas puramente proyectivas.[26] Von Staudt utiliza así este concepto para definir la proyectividad entre dos figuras de la primera categoría (alineaciones de puntos, haces de rectas y haces de planos), a saber: una biyección que conserva cuaternas armónicas. Por ejemplo, dos rectas se llaman proyectivas si entre ellas hay una correspondencia que conserva las cuaternas armónicas. Asimismo, estos procedimientos le permitieron introducir coordenadas homogéneas en el plano y en el espacio proyectivo de manera puramente proyectiva, con lo cual la presentación de la geometría proyectiva como una disciplina autónoma, independiente de las nociones de distancia y congruencia, parecía alcanzada plenamente.

Es interesante mencionar entonces que Hilbert elogia a von Staudt precisamente por este aspecto, o sea, por la *autonomía o independencia* que consiguió en su presentación de la geometría proyectiva:

> Von Staudt logró una geometría en la que no se *calcula* ni se *mide*, sino que se *construye*, en la que no se utiliza el *compás* ni el *transportador*, sino sólo la *regla*. De este modo aquel *requerimiento científico*[27] *fue cumplido de manera satisfactoria*, puesto que en la deducción de los teoremas sobre las relaciones de posición, el *cálculo* debe aparecer como algo extraño. Presentada de esta forma, la geometría proyectiva constituye sólo *una parte de la geometría*, pero de hecho un dominio [dotado de] una unidad y conclusividad maravillosas. De acuerdo con el modelo presentado en esta obra he dado forma a mi curso sobre geometría proyectiva. (Hilbert 1891a, p. 25)

Hilbert elogia aquí el "purismo geométrico" de von Staudt, que consiste no sólo en desarrollar a la geometría proyectiva de una manera estrictamente sintética o geométrica, i.e., independiente de técnicas a analíticas, sino además en construirla de un modo autónomo, con independencia de cualquier referencia a conceptos métricos, tomados de la geometría euclídea. Asimismo, en este pasaje vemos confirmada la opinión de Hilbert, anunciada antes en sus "Diarios científicos" [*Wissenschaftliche Tagebücher*], según la que el cálculo debe ser considerado como un instrumento extraño o exógeno [*fremd*] para la

[26] La definición de von Staudt de la cuaterna armónica se basa en la construcción del cuadrilátero completo, que permite construir, dados tres puntos sobre una línea, el cuatro armónico sólo mediante uniones de puntos e intersecciones de rectas. La construcción de von Staudt del cuadrilátero completo es analizada en el capítulo 5, sección 5.2.

[27] Hilbert se refiere a la exigencia de hacer de la geometría una ciencia "autónoma", independiente de conceptos tomados de otras disciplinas, como por ejemplo, la aritmética y el análisis.

geometría. Por último, Hilbert reconoce abiertamente la influencia de los trabajos de von Staudt.[28]

Ahora bien, en mi opinión, la importancia de estas observaciones reside en que revelan que, en este período bien temprano, Hilbert contaba ya con un *criterio metodológico* crucial para la construcción de las teorías matemáticas, que poco después se convertirá en uno de los objetivos centrales de su nuevo método axiomático: las teorías matemáticas deben ser construidas de tal modo que se ponga en evidencia su carácter *auto–suficiente*. En el caso de la geometría euclídea elemental, ello significaba que el tratamiento axiomático debía ser capaz de mostrar cómo esta disciplina podía ser construida independientemente de conceptos tomados de la aritmética, el análisis e incluso la mecánica.

Por otra parte, esta exigencia de convertir a la geometría en una ciencia autónoma exhibía al mismo tiempo el *problema de fondo* en las discusiones en torno a la utilización de métodos sintéticos y métodos analíticos en geometría, a saber: la relación entre la geometría y el número; o más precisamente, la explicación de cómo puede y debe proceder la introducción de elementos numéricos – coordenadas – en la geometría. En efecto, como se aprecia en los trabajos de Steiner y von Staudt, la geometría proyectiva *sintética* era definida como aquella que no recurría al método de las coordenadas.[29] En este sentido, la diferencia radical entre geometría sintética y analítica no tenía entonces que ver con el nivel de abstracción y rigor, que a partir del trabajo de estos geómetras había sido completamente equiparado. Antes bien, el núcleo de conflicto descansaba en si se empleaba el método de coordenadas, y con ello un conjunto de técnicas algebraicas, para caracterizar las transformaciones, conceptos y principios de la geometría proyectiva, o si en cambio se los definía estrictamente en términos puramente geométricos. Hilbert advierte de la siguiente manera este papel fundamental del método de las coordenadas:

> Si pasamos por alto el dominio completo de la geometría proyectiva, entonces reconocemos como la idea fundamental el principio de la correlación unívoca e irreversible [*umkehbar eindeutigen Zuordnung*], es decir, básicamente el concepto de proyectividad. [Pero] si por ejemplo se correlacionan los puntos de una serie de puntos con los valores de una magnitud, entonces se llega de inmediato a la introducción de magnitudes variables, i.e., las coordenadas; de hecho, la introducción de coordenadas es la idea fundamental de la llamada

[28] En el capítulo 5 analizaremos aspectos más concretos de la influencia de von Staudt en el abordaje axiomático a la geometría de Hilbert .

[29] Véase (Nabonnand 2008a).

> geometría analítica, o sea, aquella idea corresponde a la idea de proyectividad en la geometría pura recién presentada. (Hilbert 1891a, p. 55)

En realidad, como hemos aclarado, el concepto de "proyectividad" puede ser definido tanto sintéticamente como analíticamente, en función de la perspectiva que se adopte. Sin embargo, Hilbert es claro en su ejemplo: así como la idea de proyectividad es el concepto central de la geometría proyectiva, el método de las coordenadas es la idea fundamental de la geometría analítica. Y con esta afirmación Hilbert alude a la siguiente cuestión: más allá de las discusiones respecto de la utilización de métodos analíticos o sintéticos en geometría, reducidas normalmente a cuestiones de preferencias o gusto personales de los geómetras, desde el punto de vista de los "fundamentos" existe un hiato entre ambas geometrías que es necesario subsanar, y que consiste en la *explicación y justificación de los elementos numéricos en geometría*. En el caso de la geometría proyectiva, Hilbert encuentra que esta cuestión comenzó a ser zanjada en los trabajos de von Staudt, en tanto que éste mostró cómo era posible introducir coordenadas en la geometría proyectiva de un modo puramente geométrico.[30] En el caso de la geometría euclídea elemental, este problema se convertirá en una preocupación central de su inminente abordaje axiomático: investigar qué axiomas de la geometría son necesarios para permitir la introducción de coordenadas numéricas, y *trazar así un puente entre las geometrías sintéticas y las geometrías analíticas*.

1.4. Intuición geométrica y geometría analítica

Como señalábamos en la sección anterior, en las exposiciones más elaboradas de la geometría proyectiva sintética, llevadas a cabo por Steiner (1832) y von Staudt (1847; 1856; 1857; 1860), la preferencia de los métodos sintéticos por sobre los analíticos o algebraicos no era más defendida argumentando que sólo aquellos permitían conservar y ejercitar el carácter eminentemente intuitivo de la geometría. De hecho, tanto Steiner como von Staudt emplearon un método de exposición "lingüístico", en donde no se utilizaba ni un sólo diagrama o figura geométrica para ilustrar los distintos conceptos y relaciones proyectivas.[31] En consecuencia, los debates entre los geómetras sintéticos y los geómetras analíticos estaban planteados respecto de la *necesidad*, la *legitimidad* y la

[30] Sobre esta cuestión, véase *infra*, sección 5.2.

[31] Sobre el estilo "lingüístico" de las exposiciones de Steiner y von Staudt, véase (Nabonnand 2008a). Esta tendencia, gracias a la cual los trabajos de los geómetras sintéticos adquirieron un grado mayor de generalidad y abstracción, comparable a los de los geómetras analíticos, se encontraba ya en Poncelet. Véase (Nagel 1939).

conveniencia de utilizar ciertas herramientas conceptuales, tomadas de otras disciplinas, para trabajar en geometría y para expresar sus conceptos y resultados.

Ahora bien, aunque Hilbert reconoce esta dimensión 'más profunda' del debate asociada al problema de los *fundamentos de la geometría*, también es cierto que en su exposición subraya constantemente que la geometría proyectiva está íntimamente ligada a la intuición, razón por la cual la noción de "intuición espacial o geométrica" aparece muy a menudo a lo largo de sus notas de clases (Hilbert 1891a). En la medida en que en los trabajos siguientes, cuando su posición axiomática formal esté ya consolidada, Hilbert seguirá refiriéndose repetidamente a dicha noción, creo que es oportuno realizar algunos comentarios respecto del contexto particular en el que aquí aparece.

En primer lugar, un rasgo interesante que se percibe a primera vista consiste en que, a la hora de hablar de la intuición geométrica, Hilbert no hace hincapié tanto en su origen empírico – algo que cambiará a partir del curso siguiente de 1894 – sino más bien en la oposición existente entre los métodos analíticos y los métodos sintéticos en geometría. Un ejemplo elocuente es la siguiente caracterización de la geometría analítica, que presenta Hilbert en la introducción de sus notas:

> Tan importantes fueron estos avances y tan magníficos los resultados alcanzados, tanto sufrió finalmente la geometría en cuanto tal bajo la formación unilateral [*einseitige Ausbildung*] de este método. Solamente se calculaba, sin tener la intuición de aquello que era calculado. Se perdió así el sentido por la figura geométrica y por la construcción geométrica. (Hilbert 1891a, p. 24)

De la misma manera, una descripción muy similar se encuentra hacia el final de este manuscrito:

> En lugar de operar con la intuición geométrica pura, [la geometría analítica] emplea el cálculo y la fórmula como herramienta de un significado esencial. La geometría analítica se conduce de tal manera que introduce desde el principio el concepto de magnitud variable y, de ese manera, para cada intuición geométrica exhibe de inmediato la expresión analítica, proporcionando por medio de esta última la demostración. De este modo se consigue obtener rápidamente mayor generalidad en los teoremas, respecto de lo que era posible con la intuición geométrica pura. (Hilbert 1891a, p. 55)

Es oportuno aclarar que con el calificativo 'pura', Hilbert no parece estar refiriéndose al estatus epistemológico de la intuición geométrica. Por el contrario, pretende adoptar una posición neutral en este respecto, fundamentalmente porque no se trata de un problema matemático sino estrictamente filosófico:

> Este axioma de las paralelas es proporcionado por la intuición. Si esta última es innata o adquirida, si aquel axioma expresa una verdad, si debe ser corroborado por la experiencia, o si ello es innecesario, es algo que aquí no nos ocupa. Sólo nos interesamos por la intuición y ella requiere de aquel axioma. (Hilbert 1891a, p. 27)

Como veremos más adelante, esta pretendida neutralidad en lo que respecta a la estatus epistemológico de la intuición geométrica no tendrá mucho sentido en la medida en que se considere a la geometría como una ciencia natural. Sin embargo, es interesante notar que Hilbert pretende definir a la intuición geométrica en función de un aspecto específico de la metodología de la geometría sintética. Es decir, los pasajes anteriores parecen indicar que Hilbert piensa en la intuición geométrica como cierta capacidad, que de hecho puede ser instruida y desarrollada, de percibir las relaciones geométricas fundamentales, exhibidas por lo general en construcciones diagramáticas, con *independencia de consideraciones numéricas*. Dicho de otro modo, la noción de intuición geométrica (pura) es introducida en estas notas para enfatizar el carácter puramente sintético de la presentación de la geometría proyectiva, en oposición a una presentación analítica basada en la introducción de elementos numéricos, o sea, en la caracterización de las relaciones geométricas por medio de ecuaciones algebraicas.

Por otro lado, la posibilidad de encontrar una 'intuición geométrica' correspondiente a un concepto matemático, expresado originalmente de manera analítica, parece haber sido una preocupación importante de Hilbert en aquel momento. En efecto, éste es precisamente el tema que aborda en el breve artículo "Über die stetige Abbildung einer Linie auf einer Flachenstücke" (Hilbert 1891b), publicado aquel mismo año en los *Mathematische Annalen*. En este trabajo, Hilbert se ocupa de mostrar cómo es posible construir de un modo puramente geométrico una curva, definida previamente Peano, que a su vez es un ejemplo de una función continua pero no diferenciable en ningún punto. Hilbert alude así, aunque muy superficialmente, a un problema muy en boga en aquel momento, a saber: los límites fijados a la exactitud de la intuición geométrica, a partir del descubrimiento de las "funciones monstruo", incapaces de ser representadas intuitivamente.[32]

[32] La más famosas de las funciones 'monstruo' es quizás la función de Weierstrass, descubierta en 1872. Más precisamente, Weierstrass descubrió que la función dada por la fórmula relativamente simple

Felix Klein, editor de los *Annalen* en aquel momento, le señaló a Hilbert la importancia de su investigación: "Que Ud. se aproxime a la cuestión de la intuición geométrica, me parece a mí fundamental".[33] Y el propio Hilbert se hace eco de la importancia de ejercitar en geometría la intuición del espacio [*Raumanschauung*], en las notas para un curso inmediatamente posterior, dedicado esta vez a la geometría analítica:

> Hasta que en este curso no hayamos avanzado lo suficiente, los trabajos siguientes no tendrán una relación directa con la geometría analítica, sino que sólo servirán para la ejercitación de nuestra intuición espacial. En la geometría plana se da la posibilidad de alcanzar un entendimiento a través de los símbolos. (Hilbert 1893/4, p. 2)[34]

Por otro lado, estas alusiones tempranas de Hilbert a la intuición geométrica, y en particular su esencial conexión con los métodos de la geométrica sintética, resultan relevantes en otro respecto. Como veremos a continuación, la relación entre la geometría y la intuición será apuntada constantemente por Hilbert en lo sucesivo, aunque siempre de un modo breve y sin profundizar nunca sobre esta cuestión epistemológica. En este sentido, el carácter de las referencias de Hilbert a la intuición geométrica no sólo se distingue claramente de las discusiones llevadas a cabo en ámbitos filosóficos, sino que además dista considerablemente de las reflexiones sobre esta cuestión que estaban teniendo lugar dentro de círculos matemáticos. Por mencionar un ejemplo, en los trabajos de Pasch, un matemático que influyó notablemente en Hilbert, es posible encontrar discusiones precisas y elaboradas respecto del rol de la intuición en geometría, y en matemática en general. Por el contrario, las afirmaciones de Hilbert en torno a la función de la intuición en geometría nunca alcanzaron el grado de desarrollo y detalle evidenciado por este matemático.[35] Considero que éste es un aspecto importante a tener en cuenta, no sólo a la hora de interpretar el sentido de estas afirmaciones, sino también cuando se busca identificar sus supuestas filiaciones filosóficas.[36]

$y = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, era una función continua en todo punto pero no diferenciable o derivable en ninguno. Sin embargo, esta propiedad desafiaba claramente nuestra capacidad de visualización, puesto que si se intentaba dar una representación diagramática o gráfica de su comportamiento, entonces parecía imposible intuitivamente que la función sea continua pero no diferenciable en ningún punto. Sobre la función de Weierstrass y sus consecuencias para la validez de la intuición en matemática, véase Volkert (1986).

[33] Citado en (Toepell 1986, p. 40).

[34] Citado en (Toepell 1986, p. 29).

[35] Sobre la filosofía de la matemática de Pasch, véase Schlimm (2010b).

[36] La identificación de la filosofía kantiana como la filosofía de la matemática putativa de Hilbert es más visible en el período dedicado a los fundamentos de la aritmética. Sin embargo, algunas alusiones

Una idea que defenderé en los capítulos siguientes consiste en sostener que la insistencia de Hilbert en la importancia de la intuición en geometría, y en matemática en general, no debe ser entendida como una *explicación filosófica sistemática del conocimiento matemático*, sino que más bien pertenece a la 'imagen' o 'concepción' de la geometría que subyace a su trabajo *qua* matemático. Esta concepción de la geometría, sin embargo, poco tiene que ver con la "filosofía formalista de la matemática", con la cual se asocia a menudo su nombre. Y en este respecto, el papel atribuido por Hilbert a la intuición en la axiomatización de la geometría, juega un papel central. En otras palabras, aunque Hilbert se mostró siempre interesando y sensible frente a los problemas filosóficos inherentes a la matemática, sus reflexiones de carácter filosófico nunca alcanzaron, ni pretendieron alcanzar, un grado de elaboración tal como el evidenciado incluso por otros matemáticos de la época. Más aún, este carácter poco sistemático explica, en gran medida, ciertas tensiones o inconsistencias en sus tesis filosóficas respecto de la geometría.

1.5. La conferencia de Wiener (1891)

En septiembre de ese mismo año, poco tiempo después de finalizado su curso sobre geometría proyectiva, Hilbert asistió en Halle a la segunda reunión de la "Sociedad Alemana de matemáticos" (*Deutsche Mathematiker–Vereinigung*). Es bien sabido que una conferencia allí celebrada llamó particularmente su atención. Se trata de la conferencia de Hermann Wiener (1857–1939): "Sobre los fundamentos y la construcción de la geometría" (Wiener 1891). Puntualmente, es habitual afirmar que esta conferencia despertó notablemente el interés en Hilbert, en esta etapa bien temprana, por el problema de los fundamentos axiomáticos de la geometría. En efecto, así lo consigna Blumenthal (1922; 1935), el biógrafo oficial de Hilbert:

> Hilbert me ralató que esta conferencia le provocó un interés tan grande para ocuparse de los axiomas de la geometría, que en el mismo viaje de regreso en tren emprendió la tarea: ello prueba que desde temprano estaba presente él la inclinación por las consideraciones axiomáticas. (Blumenthal 1922, p. 68)

En primer lugar, en su conferencia Wiener propone que la geometría sea desarrollada como una teoría abstracta, retomando de ese modo algunas ideas previamente postuladas

en este período a Kant, por ejemplo su célebre epígrafe en *Fundamentos de la geometría* ("Todo el conocimiento comienza así con intuiciones, procede luego a conceptos, y termina en ideas") han sugerido la existencia de ciertas coincidencias de la concepción de la geometría defendida por Hilbert con la filosofía kantiana. Especialmente, estas coincidencias han sido enfatizadas por Majer (1995; 2006). Corry (1997; 2006) ha señalado además que en alguna medida la noción de intuición en Hilbert, en este período, debe ser interpretada en clave kantiana.

por H. Grassmann y M. Pasch[37]:

> Aquello que debe exigirse a una demostración de un teorema matemático, es que utilice sólo aquellas premisas [*Voraussetzungen*] de las que el teorema realmente depende. Las premisas más básicas imaginables son la existencia de ciertos objetos y de ciertas operaciones, a través de las cuales los objetos están conectados. Si es posible relacionar tales objetos y operaciones sin añadir nuevas premisas, de manera que de allí se sigan teoremas, entonces estos teoremas forman un dominio autónomo [*in sich begründetes Gebiet*] de la ciencia. Tal es el caso, por ejemplo, de la aritmética. La utilización de tal clase de objetos (elementos) y operaciones simples es también útil en la geometría, puesto que de un modo similar se puede construir partiendo de ellos una ciencia abstracta, independiente de los axiomas de la geometría, y cuyas proposiciones siguen paralelamente paso a paso a los teoremas de la geometría. (Wiener 1891, pp. 45–46)

Wiener sugiere que es posible construir la geometría de una manera abstracta, partiendo sólo de conjunto de objetos o elementos no definidos, cuyas únicas propiedades son aquellas relaciones básicas establecidas en los 'postulados básicos'. Sin embargo, estos últimos deben ser considerados como "independientes de los axiomas de la geometría", si por 'axioma' se entiende a todo principio autoevidente que predica una propiedad del espacio físico. Wiener advierte entonces, aunque de un modo muy esquemático, que la geometría puede ser construida como una *teoría abstracta* que conforma un dominio de la ciencia fundado en sí mismo, es decir, como una teoría cuyos teoremas no hablan directamente de propiedades fundamentales del espacio físico. Sin embargo, establece asimismo una cierta correspondencia entre esta teoría abstracta y 'la geometría' (i.e., la teoría de las propiedades espacio físico), que no se encarga de explicar. Es decir, Wiener se limita a señalar que los teoremas que forman el dominio de esta nueva ciencia abstracta deben ir "paso a paso en paralelo con los teoremas de la geometría". En mi opinión, con esta afirmación Wiener intenta expresar lo siguiente: si bien debe reconocerse que esta nueva ciencia abstracta, construida a partir de ciertos objetos simples y relaciones, de ningún modo se refiere al espacio físico, el objetivo inicial de esta nueva

[37] La construcción de la geometría como una ciencia abstracta es una de las ideas centrales de las *Ausdehnungslehere* de H. Grassmann: "debe existir una rama de las matemáticas que desarrolla de un modo autónomo y abstracto las leyes que la geometría predica del espacio" (Grassmann 1844, p. 10). Sobre la presentación de Grassmann de la geometría como una teoría abstracta, véase (Grassmann 1995).

metodología es *re-construir a la "geometría"* según es entendida tradicionalmente, es decir, a la ciencia cuyos conceptos y leyes básicas están fundadas en nuestra intuición geométrica del espacio. En este sentido, esta manera de plantear los objetivos perseguidos en la investigación, implica que debe existir un paralelo importante entre la teoría *abstracta* y la teoría *material*, por decirlo de algún modo. Como veremos en los próximos capítulos, esta afirmación de Wiener coincide con el modo en que Hilbert describe en este período la tarea emprendida en su nuevo abordaje axiomático a la geometría; más aún, podría decirse incluso que esta actitud fue una constante en las primeras concepciones axiomáticas abstractas de la geometría, en las postrimerías del siglo XIX.

Por otro lado, Wiener utiliza a la geometría proyectiva del plano para ilustrar el modo en que la geometría puede ser construida como una ciencia abstracta:

> Un ejemplo lo proporciona aquí la geometría proyectiva del plano. Sean *puntos* y *líneas* los objetos, *unir* y *cortar* las operaciones; asúmanse las operaciones en un número finito. O bien, separadas de su vestimenta geométrica [*geometrischen Gewande*]: se presupone [la existencia] de elementos de dos clases, y operaciones de dos clases, mientras que se acepta que la combinación de dos elementos cualquiera de la misma clase produce un elemento de la otra clase. (Wiener 1891, p. 46)[38]

El modo en que Wiener describe abstractamente los conceptos fundamentales de una teoría geométrica en particular, guarda muchas similitudes con las posteriores líneas iniciales de *Fundamentos de la geometría* (1899): "Pensemos tres conjuntos distintos de objetos: a los objetos del primer conjunto los llamamos puntos y los designamos con A, B, C, ..., a los objetos del segundo conjunto los nombramos rectas y los designamos con a, b, c, ..., a los objetos del tercer sistema, los llamamos planos, y los designamos con α, β, γ, ..." (Hilbert 1999, p. 1). Más aún, es posible ubicar precisamente en este contexto a una de las sentencias de Hilbert más conocidas y citadas, respecto de la naturaleza del método axiomático, particularmente en su aplicación a la geometría. En efecto, Blumenthal narra en su otro artículo biográfico, publicado varios años antes de la muerte de Hilbert, la siguiente anécdota ocurrida en el viaje de regreso a Königsberg desde la conferencia de Wiener:

> En la sala de espera de la estación de trenes de Berlin, Hilbert discutió con dos colegas respecto de la geometría axiomática (si no me equivoco, con A.

[38] Es decir, la *unión* de dos puntos determina una línea, y dos líneas se *cortan* en un punto.

> Schoenflies y E. Kötter), expresando su punto de vista a través de su famoso y característico *dictum* [Ausspruch]: en todo momento debe ser posible hablar de 'mesas', 'sillas' y 'jarros de cerveza', en lugar de 'puntos', 'líneas' y 'planos'. (Blumenthal 1935, pp. 402–403)

La matemática de las "mesas, sillas y jarros de cerveza" es una expresión muy recurrente a la hora de ilustrar la concepción axiomática abstracta de Hilbert. Asimismo, algunos años más tarde, nuestro autor utilizaría un ejemplo muy similar, en el contexto de la famosa controversia epistolar que mantuvo con Frege, a propósito del problema de los fundamentos (axiomáticos) de la geometría.[39] Sin embargo, resulta sumamente interesante encontrar una declaración similar en el primer volumen de sus "Diarios científicos" [*Wissenschaftliche Tagebücher*]. Se trata de un pasaje que, a partir del contexto, puede ser datado precisamente en esta época, esto es, entre 1891 y 1894. Hilbert alude allí nuevamente a la idea de la "matemática de las sillas y las mesas", aunque esta vez tomando como ejemplo al álgebra:

> Muchas cosas reunidas en un concepto proporcionan un sistema, por ejemplo, mesa, pizarrón, etc. ... En matemática consideramos sistemas de números o funciones. Ellos no deben ser necesariamente conjuntos numerables. El sistema es más bien dado y conocido, cuando una ley es conocida, y se puede decidir por medio de ella si un número o una función pertenece al sistema o no.[40]

Hilbert anticipa aquí elocuentemente, y en principio a propósito de las ideas sugeridas por la conferencia de Wiener, lo que en breve se convertirá en la tesis central de su nuevo método axiomático formal o abstracto. Éste será el tema principal de los capítulos siguientes. Sin embargo, es oportuno realizar una observación más antes de finalizar.

Más allá del interés que despertó en Hilbert la propuesta de Wiener de desarrollar a la geometría como una teoría abstracta, respecto de la cual encontramos recién evidencia en el pintoresco relato de Blumenthal y en las propias notas de Hilbert, otra cuestión

[39] "Pero es realmente obvio que toda teoría es un andamiaje (esquema) de conceptos junto con sus conexiones necesarias, y que los elementos básicos pueden ser pensados de cualquier modo que uno quiera. Por ejemplo en lugar de puntos, pensemos en un sistema de amor, ley y deshollinador ... que satisface todos los axiomas" (Hilbert a Frege, 29.12.1899; en (Frege 1976, p. 69).

[40] "Mehrere Dinge zusammen in einem Begriff gefasst, geben ein System (,) z.B. Tisch, Tafel, etc. ... In der Mathematik betrachten wir Systeme von Zahlen oder von Funktionen. Dieselben brauchen nicht in abzählbare Menge zu sein. Das System ist vielmehr gegeben und bekannt, wenn man ein Gesetz kennt, vermoege dessen von einer vorgelegten Zahl oder Funktion entschieden werden kann, ob dieselbe zu dem System gehoert oder nicht". **Cod Ms. D. Hilbert 600:1, pp. 72-73**.

mencionada en aquella conferencia repercutirá notablemente en sus posteriores investigaciones geométricas. Tal como hemos mencionado, los célebres teoremas de Desargues y Pappus – o Pascal, como lo llama Hilbert – jugaron un papel central en el desarrollo sistemático de la geometría proyectiva, en la primera mitad del siglo XIX. La importancia de estos teoremas podía percibirse, por ejemplo, en los métodos desarrollados por Von Staudt para introducir coordenadas en el plano y en espacio proyectivo. Es decir, para demostrar la unicidad del cuarto punto armónico, determinado a partir de la construcción del cuadrilátero completo, von Staudt utiliza el teorema de Desargues. Ahora bien, en su conferencia Wiener bautiza "teoremas de incidencia" [*Schliessungsätze*] a aquellos teoremas, y realiza acerca de ellos una sugerente afirmación, de la cual no ofrece sin embargo una demostración:

> Pero estos dos teoremas de incidencia [los teoremas de Desargues y Pascal] son suficientes para probar, sin ninguna referencia ulterior a condiciones de continuidad o a procesos infinitos, el teorema fundamental de la geometría proyectiva, y así desarrollar íntegramente la geometría proyectiva lineal del plano. (Wiener 1891, p. 47)

La afirmación de Wiener resultaba muy atractiva debido a múltiples razones. En primer lugar, significaba una crítica directa a Klein, quien sostenía que era necesario añadir un axioma de continuidad a los métodos desarrollados por von Staudt para introducir coordenadas en el plano y en el espacio proyectivo. En segundo lugar, mostrar que el teorema fundamental de la geometría proyectiva podía ser demostrado utilizando sólo los teoremas de Desargues y Pascal, implicaba al mismo tiempo la posibilidad de construir un nuevo sistema geométrico que no requería de ningún tipo de suposición de continuidad.[41] Luego, encontrar una prueba de la afirmación de Wiener se convertirá en un hecho determinante que conducirá a Hilbert al convencimiento de la utilidad del método axiomático, como una herramienta para alcanzar nuevos descubrimiento matemáticos. Sin embargo, éstos no serán los problemas que Hilbert abordará en sus primeros trabajos sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría. Por el contrario, todos estos problemas serán una preocupación central en 1898/99, período en el que su nueva concepción axiomática de la geometría estará ya plenamente desarrollada.

[41] Estos temas serán abordados en detalle en el capítulo 5.

CAPÍTULO 2

La temprana concepción axiomática de la geometría

2.1. Introducción

Hacia el final del capítulo anterior, hemos señalado que la conferencia de Wiener (1891) significó una motivación importante para que Hilbert centre su atención en los fundamentos axiomáticos de la geometría. En particular, dos cuestiones captaron principalmente su interés. Por un lado, la posibilidad de construir 'la geometría', en el sentido de la teoría de las propiedades del espacio (físico), como una teoría *abstracta*.[1] Por otro lado, la sugerencia de Wiener, según la cual sería posible utilizar los teoremas de Desargues y Pascal para probar el teorema fundamental de la geometría proyectiva, y desarrollar así esta teoría geométrica sin tener que apelar a ningún postulado de continuidad. Hilbert se ocupa de indagar la primera de estas cuestiones en su próximo curso dedicado a la geometría, en donde adopta ya una perspectiva decididamente axiomática.

El objetivo de este capítulo es reconstruir la temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert, tal como es presentada en sus notas de clases para cursos sobre geometría entre 1894 y 1898. Sostendré que lo que caracteriza a dicha concepción es: *i)* una posición empirista respecto del *origen* de la geometría, en tanto Hilbert afirma que los hechos, leyes y conceptos básicos que están en la base de esta disciplina no pueden ser adquiridos a través del pensamiento puro, sino que para ello es necesario recurrir a la experiencia y la intuición; *ii)* una posición axiomática formal, que concibe el resultado

[1] Por cierto, debemos reconocer que Wiener no fue el primero en proponer este tipo de abordaje a la geometría. Previamente, Grassmann (1844) había presentado uno de los primeros y más influyentes intentos de construir a la geometría como una teoría abstracta de la extensión. Sobre la influencia de Grassmann en Hilbert, véase (Toepell 1995).

de una axiomatización como una estructura relacional, en donde los términos básicos no poseen una referencia (intuitiva) fija, sino que pueden recibir diversas interpretaciones, ya sea dentro de otras teorías matemáticas o incluso físicas, como así también aplicaciones empíricas.

El capítulo sigue un orden cronológico. En la primera parte (sección 2.2) me ocupo del primer abordaje axiomático a la geometría, a saber: las notas de clases para el curso (Hilbert 1894). Por un lado, analizo la posición empirista que Hilbert defiende en este manuscrito, al afirmar que la geometría es, en cuanto a su origen, una ciencia natural. Por otro lado, destaco el carácter abstracto o formal que Hilbert le confiere en este curso a su nueva concepción del método axiomático. En particular, comento una serie de pasajes en donde el matemático alemán caracteriza por primera vez una teoría axiomática como un "esquema o entramados de conceptos" [*Fachwerk von Begriffe*].

En la segunda parte del capítulo (sección 2.3) me encargo de analizar estos mismos temas en los cursos que constituyen los antecedentes inmediatos de la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, a saber: (Hilbert 1898a) y (Hilbert 1898b). Sostengo que en estos textos la nueva concepción del método axiomático se halla plenamente desarrollada. Especialmente, afirmo que, a partir de 1895, los trabajos de Hilbert sobre geometría tomaron un creciente carácter "metamatemático", al punto tal que los estudios metageométricos sobre la independencia de los axiomas, por medio de la construcción de "modelos" aritméticos o analíticos, son emprendidos más detalladamente en estos cursos que en su libro *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899).

2.2. El primer abordaje axiomático (1894)

2.2.1. La geometría: una ciencia natural

En el semestre de verano de 1893, Hilbert, que todavía se encontraba trabajando en Königsberg como *Privatdozent*, anunció un nuevo curso dedicado a los fundamentos de la geometría. El curso, titulado "Axiomas de la geometría", tuvo que ser sin embargo aplazado para el semestre siguiente, dado que el número de alumnos inscriptos era insuficiente.[2] El aplazamiento le permitió introducir numerosas modificaciones en las notas

[2] Hilbert da cuenta de esta situación en una carta a F. Klein, fechada el 23 de mayo de 1893:

> En cuanto a los asistentes, este semestre ha sido negativo como nunca: imparto dos cursos, cada uno para un solo asistente . . . ; mi tercer curso, sobre geometría no euclídea, no ha podido realizarse, aunque sigo trabajando sobre él para mí mismo. (Hilbert a Klein, 23 de mayo de 1893; en Frei 1985, p. 89)

Véase (Toepell 1986, pp. 44–49).

originales, en muchos casos añadiendo referencias sumamente importantes. El resultado de este curso fue así las notas de clases tituladas "Grundlagen der Geometrie" (Hilbert 1894).[3] Este curso es el primer tratamiento axiomático de cualquier rama de la matemática realizado por Hilbert.

Como veremos a continuación, el método axiomático, en el sentido que más tarde adquirirá en sus trabajos geométricos, no está aquí plenamente desarrollado como en (Hilbert 1898a), (Hilbert 1898b) y en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*.[4] Es decir, por un lado, Hilbert no lleva a cabo una investigación axiomática tal como es definida en la introducción de su curso de 1891, i. e., "una investigación sistemática de aquellas geometrías que surgen cuando uno o más axiomas [de la intuición] son dejados de lado" (Hilbert 1891a, p. 22) o reemplazados por su negación. Antes bien, en estas notas Hilbert se dedica exclusivamente a presentar un sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental y a definir, sobre la base de los dos primeros grupos (incidencia y orden), algunos conceptos y teoremas fundamentales de la geometría proyectiva. Por otro lado, Hilbert tampoco lleva a cabo aquí investigaciones "metageométricas" (i. e., estudio de la independencia de un axioma o grupo de axiomas y de la consistencia de un sistema axiomático), utilizando el método de proporcionar distintas interpretaciones o 'modelos' de los axiomas. Sin embargo, estas notas de clases constituyen el inicio de un *análisis axiomático* de la geometría, de donde se sigue que este texto prepara el camino para los posteriores tratamientos "metageométricos".

Otro aspecto interesante de este curso es que permite apreciar la influencia que ejerció el libro *Lecciones de geometría moderna* (1882) de Moritz Pasch, sobre las primeras investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría. En efecto, ello es reconocido por el propio autor, en la carta dirigida a Klein recién mencionada:

> Creo que se puede aprender mucho, respecto de las disputas de los geómetras en torno a los axiomas de la geometría, del inteligente libro de Pasch. También tuvo Pasch el mérito de haber reconocido la necesidad del concepto 'entre', aunque sin embargo construyó un conjunto de axiomas redundante [*überflussig*]. (...) En mi opinión, la pregunta respecto de cuál es el sistema más pequeño de condiciones (axiomas), que uno debe establecer para un sistema de cosas [*Einheiten*], de manera que el mismo sistema sirva para describir la forma externa del mundo exterior, no ha sido todavía resuelta.

[3] Sobre la composición de estas notas véase la introducción al segundo capítulo de (Hallett y Majer 2004).

[4] En adelante me referiré a la primera edición de *Fundamentos de la geometría* como "Festschrift".

> (Hilbert a Klein, 23 de Mayo de 1893; en Frei 1985, p. 90)[5]

En lo que sigue podremos reconocer la influencia de Pasch tanto en aspectos matemáticos de la presentación axiomática de Hilbert, esto es, en la elección de los distintos axiomas, como en algunos elementos de su concepción de la geometría.

Hilbert comienza sus notas de clases, como es habitual, con una introducción en donde realiza unas breves observaciones en torno a su concepción general de la geometría, y a las bases epistemológicas de nuestro conocimiento geométrico. En varios puntos estas consideraciones coinciden con las ideas expresadas en las notas del curso precedente de 1891. Sin embargo, la imagen de la geometría resulta ahora conjugada con algunas de las ideas centrales de su nuevo método axiomático formal o abstracto. Veamos entonces cómo Hilbert combina ambos elementos.

En primer lugar, Hilbert alude nuevamente a la tesis general respecto de la naturaleza de las teorías matemáticas, presentada anteriormente en (Hilbert 1891a). Según esta tesis, puesto que la geometría requiere para su construcción de algo más que del pensamiento puro, no debe ser considerada como una disciplina matemática pura. Sin embargo, a diferencia del curso anterior, Hilbert adopta ahora una posición más abiertamente empirista. En parte, ello se explica en virtud de su reciente lectura del libro de Pasch (1882). En las primeras líneas de este curso nos encontramos con la siguiente caracterización de la geometría:

> Entre los *fenómenos o hechos de la experiencia* que se nos ofrecen en la observación de la naturaleza, existe un *grupo particularmente destacado*, es decir, el grupo de aquellos *hechos* que determinan la forma externa de las cosas [die äussere Gestalt der Dinge]. De estos hechos se ocupa la *geometría.* (Hilbert 1894, p. 72)

Este manera de caracterizar la geometría es muy similar a la definición que presenta Pasch en la introducción de su libro:

> Los conceptos geométricos son ese grupo especial de conceptos que sirven para describir el mundo externo [*Aussenwelt*], y se refieren a la forma, magnitud y posición mutua de los cuerpos. (...) El punto de vista así indicado, que será asumido en lo que sigue, es que la geometría es una parte de la ciencia natural. (Pasch 1882, p. 3)

[5] Citado también en (Toepell 1986, pp. 44–45).

Ahora bien, de un modo muy similar, Hilbert sostiene lo siguiente en estas notas de clases:

> Como cada ciencia busca ordenar el grupo básico de hechos de su propio ámbito, o describir los fenómenos, como dice Kirchhoff[6], así hace exactamente la geometría con aquellos *hechos geométricos*. Esta organización o descripción acontece por medio de ciertos *conceptos*, que están conectados entre sí a través de las leyes de la lógica. Una ciencia se encuentra más avanzada, esto es, el *entramado de conceptos* [Fachwerk der Begriffe] es más completo, cuanto más fácilmente cada fenómeno o hecho es acomodado. (Hilbert 1894, p. 72)

Hilbert afirma que la geometría, en función de su origen empírico, se encuentra naturalmente más cerca de disciplinas físicas como la mecánica, que de la aritmética o el análisis. En este sentido, su objetivo puede ser enunciado como la descripción de un conjunto o grupo básico de hechos geométricos[7], en gran parte con un origen empírico. Tal descripción es llevada a cabo por medio de la construcción de un esquema o entramado de conceptos [*Fachwerk von Begriffen*], cuyo significado Hilbert se ocupará pronto de aclarar. Sin embargo, sabemos ya que su construcción está guiada por un criterio fundamental, a saber: el entrado de conceptos debe ser elaborado de tal manera que en él estén representados o incluidos la totalidad de los hechos o fenómenos que componen nuestro conocimiento geométrico.

Ahora bien, al afirmar que la geometría es la ciencia encargada de estudiar "el grupo de hechos que determina la forma externa de las cosas en el espacio"[8], Hilbert no pretende solamente resaltar el carácter de la geometría, *en cuanto a su origen*, como una ciencia natural. En mi opinión, con esta caracterización Hilbert busca enfatizar además el hecho de que las proposiciones básicas de la geometría elemental no son muy distintas que las proposiciones de la física en cuanto a que, en un sentido factual, formulan una multitud de hechos del "mundo exterior" [*Aussenwelt*]. Al resaltar el carácter de la geometría como una ciencia natural, Hilbert subraya así su papel significativo en nuestro conocimiento de la naturaleza. Luego, en este respecto la geometría elemental puede ser considerada

[6] Hilbert se refiere aquí al prefacio de Kirchhoff (1877): "Por estas razones sostengo que la tarea de la mecánica es describir los movimientos que ocurren en la naturaleza, y en efecto, describirlos del modo más simple y completo posible" (Kirchhoff 1877, p. III).

[7] Más adelante nos referiremos a la noción de "hecho geométrico".

[8] Hilbert repite esta afirmación en numerosas oportunidades a lo largo de estas notas. Por ejemplo, en (Hilbert 1894, p. 74) y (Hilbert 1898b, p. 221).

como una de las primeras ramas de la física. Veremos que esta característica es también mencionada en cursos posteriores.

Hilbert afirma seguidamente que la geometría se diferencia de otras ciencias físicas como la mecánica, la teoría de la electricidad, la óptica, etc., no en virtud de una característica esencial asociada a su *naturaleza*, sino más bien debido a su avanzado estado de desarrollo. Es decir, el notable grado de avance que ha alcanzado la geometría desde los tiempos de Euclides y el consenso generalizado respecto de los 'hechos' que forman este dominio o ámbito de conocimiento permiten, según Hilbert, que esta disciplina pueda ser sometida sin mayores problemas a un tratamiento axiomático (formal):

> La geometría es básicamente una ciencia tan desarrollada, que todos sus hechos pueden ser ya deducidos por medio de *inferencias lógicas* a partir de hechos previos; algo completamente distinto ocurre, por ejemplo, en la teoría de la electricidad o la óptica, donde todavía hoy nuevos hechos son descubiertos. Empero, respecto de su origen, la geometría es una *ciencia natural*, como lo mostraré claramente más tarde. (Hilbert 1894, p. 72)

Sin dudas es posible ver aquí una anticipación de lo que más tarde será el sexto de sus célebres "Problemas matemáticos" de París:

> Las investigaciones en fundamentos de la geometría sugieren el siguiente problema: Tratar del mismo modo, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que la matemática desempeña un papel importante; en primer lugar están la teoría de la probabilidad y la mecánica. (Hilbert 1900b, p. 306)

Más aún, hacia el final de estas notas, Hilbert plantea el mismo problema, prácticamente en los mismos términos:

> Según el modelo de la geometría deben ser tratadas ahora todas las otras ciencias, en primer lugar la mecánica, pero posteriormente también la óptica, la teoría de la electricidad, etc. (Hilbert 1894, p. 121)

Hilbert adopta en su concepción temprana de la geometría una posición visiblemente empirista, pero que no radicaliza en ningún momento. Es decir, su empirismo consiste en sostener que los hechos, leyes y conceptos básicos que están en la base de la geometría no pueden ser adquiridos a través del pensamiento puro, sino que para ello es necesario recurrir a la experiencia y a la intuición:

> Puesto que no todos los conceptos son deducidos a través de la *lógica pura*, sino que muchos de ellos provienen de la *experiencia*, la importante pregunta que será abordada en este curso es: ¿Cuáles de los *hechos fundamentales* son suficientes para construir toda la geometría? A estos hechos no *demostrables* los fijamos de antemano y los llamamos *axiomas*. (Hilbert 1894, p. 72)

Sin embargo, en ningún lugar de estas notas, ni en sus cursos posteriores, Hilbert profundiza este empirismo exigiendo que todos los conceptos primitivos y proposiciones básicas de la geometría axiomática tengan como correlato un conjunto de conceptos y proposiciones empíricas u observacionales. Como es bien sabido, éste era uno de los requerimientos fundamentales del programa empirista de Pasch para la fundamentación de la matemática.[9]

Con esta imagen de fondo de la base epistemológica de la geometría, Hilbert describe su empresa de axiomatizar la geometría en los siguientes términos:

> El problema de nuestro curso versa así: [determinar] cuáles son las condiciones *necesarias, suficientes* e independientes entre sí, que deben establecerse en un sistema de cosas, para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico, e inversamente, para que por medio del mencionado sistema de cosas sea posible una *descripción completa u organización* de todos los hechos geométricos; o para que nuestro sistema se convierta en una imagen [*Bild*] de la realidad geométrica. (Hilbert 1894, p. 73)

Con la afirmación de que su sistema de cosas debe poder convertirse en una "imagen [*Bild*] de la realidad geométrica", Hilbert alude directamente a la *Bildtheorie* de Heinrich Hertz. Esta lectura se confirma algunas páginas más tarde, cuando afirma también que sus axiomas de la geometría pueden ser entendidos como las *Bilder* de Hertz.[10] Sin embargo, dado que esta relación será el tema central del próximo capítulo, aplazamos por el momento esta discusión.

Por otra parte, una observación me parece pertinente. El lenguaje utilizado por primera vez aquí por Hilbert, y que luego se volverá habitual en sus presentaciones axiomáticas, denota cierta influencia de Dedekind; especialmente, de su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Dedekind 1888). En efecto, los términos 'cosa' [*Ding*] y 'sistema' [*System*] son de gran importancia en esta obra. Dedekind se ocupa de aclarar su

[9] Sobre el programa empirista de Pasch para la fundamentación de la matemática véase Torretti (1984), Gandon (2005) y, especialmente, Schlimm (2010b).

[10] Cf. (Hilbert 1894, p. 74).

significado en los primeros parágrafos: "En lo sucesivo entiendo por *cosa* todo objeto de nuestro pensamiento" (Dedekind 1888, p. 105); y respecto de la noción de sistema aclara: "Sucede con mucha frecuencia que distintas cosas a, b, c ..., consideradas por cualquier motivo bajo un mismo punto de vista, son reunidas mentalmente, y se dice entonces que constituyen un *sistema* S" (*Íbid*). Luego, aunque el término 'cosa' pueda parecer muy vago, Hilbert mienta con ello – siguiendo a Dedekind – que los tres sistemas de objetos, postulados como los objetos primitivos del sistema axiomático, son de una naturaleza totalmente indeterminada. En la medida en que su concepción axiomática vaya evolucionando, Hilbert comenzará a emplear el término 'cosas del pensamiento' [*Gedankendinge*], para aclarar que aquellos elementos que tomamos como básicos en una presentación axiomática pertenecen exclusivamente a un nivel conceptual.[11]

Pasemos ahora a analizar la exposición axiomática de la geometría que lleva a cabo Hilbert en estas notas de clases.

2.2.2. El nuevo método axiomático

La presentación axiomática de la geometría que Hilbert realiza en este curso no alcanza ciertamente el nivel de desarrollo de sus presentaciones posteriores; especialmente, los estudios "metageométricos" están prácticamente ausentes.[12] Sin embargo, es posible apreciar en este manuscritos de 1894 algunas características que poco después serán centrales en su exposición más acabada del método axiomático abstracto o formal, como así también en su concepción axiomática de la geometría. En primer lugar, en este curso Hilbert dispone por primera vez a los axiomas de la geometría en cinco grupos diferentes. Esta agrupación se explica principalmente en virtud de una división conceptual, aunque en textos posteriores Hilbert advierte que a cada uno de estos grupos le corresponde distintos niveles de justificación empírico/intuitiva. Los grupos de axiomas son los siguientes:

[11] Sobre el uso de los términos 'cosa' y 'sistema' en Dedekind, véase Ferreirós (2007). Por otra parte, en un reciente artículo, Ferreirós (2009) ha enfatizado la influencia de Dedekind sobre Hilbert, en este período temprano. Por el contrario, diferencias importantes entre los abordajes de ambos autores han sido destacadas por Klev (2011).

[12] Quizás ésta haya sido una razón por la cual Hilbert consideró inicialmente las investigaciones axiomáticas como "poco interesantes" y "estériles", desde un punto de vista matemático. Esta opinión se encuentra en una carta a su colega y amigo, Adolf Hurwitz:

> Por cierto mi curso sobre los axiomas de la geometría no me ha resultado, por lo menos por ahora, para nada edificante. Siempre lo mismo: si se debe tomar esto o aquello como axioma; siempre el mismo tono insípido, sin la vívida frescura de los nuevos resultados. (Hilbert a Hurwitz, 13 de junio de 1894). Citado en (Toepell 1986, p. 100)

- A– Axiomas de existencia
- B– Axiomas de posición
- C– Axioma de continuidad
- D– Axiomas de congruencia

Aunque las cuestiones más bien técnicas en relación a los sistemas axiomáticos de Hilbert serán tratadas en la segunda parte de la tesis, es oportuno realizar algunas breves aclaraciones respecto de este primer sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental.

2.2.2.1. El primer sistema de axiomas para la geometría euclídea

El primer grupo de 'axiomas de existencia' [*Existenzaxiome*] o 'enlace', como los designa más tarde Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899), estaba compuesto por los siguientes ochos axiomas:

1. Dos puntos cualesquiera A, B determinan siempre una y sólo una línea a.
2. Dos puntos cualesquiera A, B sobre la línea a, determinan la línea a; o en fórmulas de $AC = a$ y $BC = a$, $A \neq B$ se sigue que $AB = a$.
3. Tres puntos cualesquiera A, B, C, que no están en una línea, determinan un y sólo un plano α.
4. Tres puntos cualesquiera A, B, C que están en un plano α, pero no sobre una línea, determinan el plano α; en fórmulas, de $ADE = \alpha$, $BDE = \alpha$, $CDE = \alpha$ se sigue $ABC = \alpha$.
5. Si dos puntos A, B sobre una línea a se encuentran en un plano α, entonces todos los puntos de a se encuentran en el plano α.
6. Si dos planos tienen un punto en común, entonces tienen al menos otro punto en común, y por lo tanto la línea que pasa por A, B.
7. Existen al menos cuatro puntos que no se encuentran en un mismo plano.
8. En toda línea existen al menos dos puntos, en todo plano existen al menos tres puntos que no están sobre una misma línea.[13]

[13] (Hilbert 1894, pp. 73–74).

Mientras que los dos primeros axiomas y el axioma 8 describen las relaciones de incidencia de los elementos geométricos (puntos y líneas) en el plano, los seis restantes determinan las relaciones de incidencia en el espacio. Asimismo, los ochos axiomas aquí formulados coinciden – aunque no literalmente – con los axiomas de enlace de la segunda edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1903).[14] En la elección y formulación de estos axiomas se aprecia la influencia de Pasch, en tanto seis de los ocho axiomas coinciden casi exactamente con los principios [*Grundsätze*] formulados en (Pasch 1882).[15]

Por otro lado, el grupo de axiomas de posición u 'orden' estaba integrado por seis axiomas:

1. Entre dos puntos A y B existe siempre al menos un tercer punto de la línea.
2. Dados tres puntos en una línea, uno de ellos se encuentra siempre entre los otros dos.
3. Si C se encuentra entre A y B, si D se encuentra entre A y C, entonces D se encuentra también entre C y B.
4. Si C se encuentra entre A y B, y D se encuentra en A y C, entonces D no se encuentra entre C y B.
5. Si A y B son dos puntos de una línea, entonces existe siempre un punto C, que se encuentra entre A y B.
6. Si en un plano son dados tres puntos que no están sobre una misma línea y una línea cruza AB, pero no pasa por C, entonces o esta línea cruza AC pero no BC, o cruza BC, pero no AC.[16] (Figura 2.1)

Hilbert sigue también aquí a Pasch, en tanto cinco de los seis axiomas son tomados de su libro. El más conocido de ellos es el sexto axioma, conocido habitualmente como el "axioma de Pasch". Esta lista de axiomas sufrirá importantes modificaciones en el

[14] En la primera edición, el grupo de axiomas de enlace estaba formado por siete axiomas, a saber: Hilbert no incluye en esta versión inicial al axioma espacial: "existen al menos cuatro puntos sobre una recta". Este axioma tampoco es incluido en (Hilbert 1898a) y (Hilbert 1898b).

[15] Una diferencia importante es que Pasch organiza sus principios o axiomas de un modo diferente, esto es, en función de los elementos – axiomas para la recta, para el plano, etc. – y no en función de las relaciones – incidencia, orden, congruencia –. Para un examen detallado de los axiomas de Pasch, véase Contro (1976) y Torretti (1984).

[16] (Hilbert 1894, pp. 76–78).

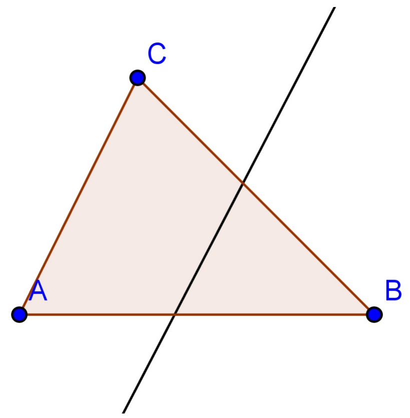


Figura 2.1.: “Axioma de Pasch”

sistema final de axiomas del *Festschrift*, en tanto sólo dos de ellos serán conservados (los axiomas 2 y 6).

Tras presentar los axiomas de existencia (enlace) y posición (orden), y demostrar a partir de ellos algunos teoremas elementales, Hilbert hace un breve paréntesis para introducir una serie de conceptos básicos de la geometría proyectiva y probar algunos teoremas fundamentales. Se introducen así los conceptos de haz de líneas, haz de planos y la relación de ‘separación’ entre cuatro puntos de una línea – equivalente a la relación de orden en la geometría euclídea.[17] Asimismo, se define el concepto de posición armónica de cuatro puntos sobre una línea, utilizando para ello la construcción del cuadrilátero completo. Por último, otro resultado que encontramos aquí es una demostración de la unicidad del cuarto elemento armónico, en la cual el teorema de Desargues resulta fundamental.[18]

La construcción del cuatro punto armónico permite la introducción del número en la geometría, i.e., la introducción de coordenadas. Hilbert muestra cómo es posible asignarle a cada punto sobre la línea un número real (positivo).[19] En cambio, para que la afirmación recíproca se cumpla, es necesario postular un axioma de continuidad. En consecuencia, Hilbert incluye en su sistema de axiomas el siguiente axioma de continuidad:

> **Axioma de continuidad**: Dada una sucesión de infinitos puntos ordenados P_1, P_2, P_3, ..., si todos los puntos se encuentran de un lado del punto A, entonces existe siempre un y sólo un punto P, tal que todos los puntos de

[17] Cf. (Hilbert 1894, pp. 80–81).
[18] Cf. (Hilbert 1894, pp. 81–85).
[19] Cf. (Hilbert 1894, pp. 85–91). Como lo observa (Toepell 1986, p. 73), Hilbert sigue aquí esencialmente a Killing (1885). Para probar que a cada punto de la línea le corresponde un único número real, es necesario además el axioma de Arquímedes

> la sucesión se encuentran sobre ese mismo lado respecto de P, y al mismo tiempo no existe ningún punto entre P y el resto de los puntos de la sucesión. P se denomina el punto límite. (Hilbert 1894, p. 92)

Este axioma de continuidad, que estable la existencia de un punto límite para una sucesión (monótona) creciente y acotada de puntos sobre una línea, garantiza la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de la línea y el conjunto de los números reales.[20] Seguidamente, Hilbert define el concepto de razón doble de cuatro puntos sobre una línea y demuestra que es un invariante proyectivo. Una vez definido este concepto se introduce un sistema de coordenadas, con lo cual concluye su exposición de la geometría proyectiva.

En cuarto lugar Hilbert introduce el grupo de axiomas de congruencia. Éste es el grupo de axiomas que más cambios sufrirá hasta llegar su presentación final en el *Festschrift*. En efecto, mientras que en este manuscrito encontramos nueve axiomas de congruencia, en su libro este grupo sólo constará de seis axiomas. Sin embargo, la idea fundamental de Hilbert para el tratamiento de la relación de congruencia está en estas notas completamente delineada. Mientras que la congruencia lineal en geometría, ya sea la noción misma de congruencia como las proposiciones fundamentales que la regulaban, había estado originalmente motivada por simples observaciones acerca del *movimiento de cuerpos rígidos* en el espacio, los axiomas de congruencia de Hilbert no tienen más que nada ver con el movimiento en sí mismo.[21] Por el contrario, Hilbert entiende que el análisis matemático del movimiento espacial requiere de una noción neutral, e independientemente definida, de congruencia. Hilbert utiliza entonces un conjunto simple de axiomas para establecer una noción "abstracta" de congruencia, que puede ser aplicada en el análisis del movimiento, pero que sin embargo es independiente de la cuestión meramente empírica de si existen o no de hecho cuerpos rígidos, y de si estos cuerpos pueden llegar a ser congruentes en un sentido intuitivo.[22]

Los axiomas que describen esta noción "abstracta" de congruencia son los siguientes:

1. Dos puntos A, B determinan un segmento. Sean A, B dos puntos dados sobre una línea a, y A' y S otros dos puntos sobre la misma línea o sobre otra línea a', entonces es posible determinar sobre a' un y un solo punto B', el cual se encuentra junto

[20] Este tema es discutido en el capítulo 6.

[21] La conexión entre los axiomas de congruencia de Hilbert y el movimiento de cuerpos rígidos en el espacio no es, sin embargo, difícil de establecer.

[22] Sobre el nuevo tratamiento que Hilbert la da a la noción de congruencia en geometría, véase (Hallett 2008).

con S sobre el mismo lado respecto de A', y tal que $AB = A'B'$. Si $AB = A'B'$, entonces también $A'B' = AB$ y $AB = BA$.[23]

2. Si dos segmentos son iguales a un tercero, entonces son iguales entre sí.

3. Si $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$ y A se encuentra sobre la linea $a = ABC$, y además A' se encuentra sobre la linea $a' = A'B'C'$ y entre B' y C', entonces también $BC = B'C'$ y se llama la suma de ambos segmentos.

4. Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y B, C se encuentran sobre la línea $a = ABC$ y sobre el mismo lugar respecto de A, y si B', C' se encuentran sobre la linea $a' = A'B'C'$ y sobre el mismo lugar respecto de A', entonces $BC = B'C'$ y se llama la diferencia entre los segmentos AB y AC. (Figura 2.2)

Figura 2.2.: Cuarto axioma de congruencia en (Hilbert 1894, p. 106)

5. Tres puntos BAC determinan un ángulo, si B' se encuentra sobre AB y además en el mismo lugar respecto de A, al igual que B, entonces $\angle B'AC = \angle BAC$. Si son dados el ángulo BAC, la línea $A'B'$ y un punto S, que no se encuentra sobre la misma línea, entonces es posible determinar siempre un punto C', el cual se encuentra en el mismo lugar respecto de $A'B'$, tal que $\angle B'A'C' = \angle BAC$. Además $\angle BAC = \angle B'A'C' = \angle CAB$. Si el punto C" satisface las mismas condiciones, entonces $AC'C$" se están sobre una línea. (Figura 2.3)

6. Si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y además $BC = B'C'$, entonces $\angle BAC = \angle B'A'C'$, y recíprocamente: si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, entonces $BC = B'C'$.

7. Si dos ángulos son iguales a un tercero, entonces son iguales entre sí.

8. Si $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\angle DAB = \angle D'A'B'$ y, por un parte, D y C se encuentran en distintos lados respecto de AB, y por otra parte D', C' se encuentran en distintos

[23] La propia formulación de Hilbert de los axiomas es aquí un poco confusa y está llena de correcciones al margen. Ello resulta comprensible, en tanto este grupo está siendo todavía objeto de constantes modificaciones. Por otra parte, en estas notas de clases Hilbert utiliza indistintamente a los signos "=" y "≡".

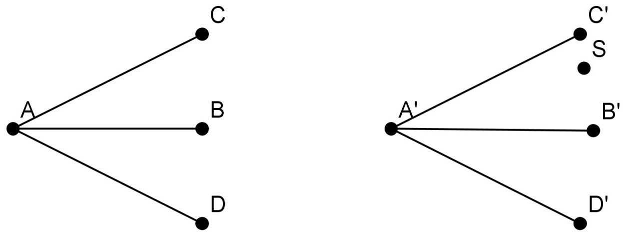


Figura 2.3.: Quinto axioma de congruencia en (Hilbert 1894, p. 107)

lados respecto de $A'B'$, entonces $\angle CAD = \angle C'A'D'$ y se llama la suma de ambos ángulos.

9. Si se cumple todo lo anterior, sólo que por una parte D, C se encuentran en el mismo lugar respecto de AB, y $D'C'$ en el mismo lugar respecto de $A'B'$, entonces $\angle CAD = \angle C'A'D'$ y se llama la diferencia.

Finalmente, Hilbert presenta en último lugar al axioma de las paralelas, con lo cual el sistema de axiomas para la geometría euclídea es completado. La versión aquí formulada no se corresponde con el postulado original de Euclides, sino con el conocido "axioma de Playfair", que afirma que por un punto exterior a un recta puede trazarse exactamente una recta paralela a dicha recta.[24]

2.2.2.2. El método axiomático abstracto en 1894

Hasta aquí una rápida descripción del sistema de axiomas que presenta Hilbert en este primer abordaje axiomático a la geometría. Veamos ahora cómo la nueva concepción formal del método axiomático comienza a ser caracterizada en estas notas. En primer lugar, Hilbert adhiere al llamado 'deductivismo' de Pasch (1882), es decir, a la posición según la cual las demostraciones geométricas deben proceder de un modo estrictamente deductivo, sobre la base que aportan los axiomas de la teoría, y sin ningún tipo de referencia directa a construcciones diagramáticas o figuras geométricas:

> En efecto, si la geometría ha de ser realmente deductiva, el proceso de inferencia debe ser siempre independiente del significado de los conceptos geométricos, al igual que debe ser independiente de los diagramas [*Figuren*]; sólo las

[24] Cf. (Hilbert 1894, p. 122).

> relaciones fijadas entre los conceptos geométricos según aparecen en las proposiciones utilizadas, por ejemplo en las definiciones, pueden ser tomadas en consideración. Durante la deducción es útil y legítimo, pero de ningún modo necesario, pensar en el significado de los conceptos geométricos; de hecho, cuando se vuelve verdaderamente necesario hacerlo, ello revela que hay una laguna [*Lückenhaftigkeit*] en la deducción, y que (si esta laguna no puede ser eliminada modificando el razonamiento), las premisas son demasiado débiles para apoyarlo. (Pasch 1882, p. 98)

Este pasaje de las *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Pasch 1882), citado muy a menudo, le valió a Pasch el renombre de "padre del rigor en geometría" (Freudenthal 1962, p. 619) o también de "padre de la axiomática moderna" (Tamari 2007). Con la expresión 'por medios puramente deductivos' Pasch quiere significar que, sin importar el contenido (empírico) que se supone deben expresar las proposiciones básicas de la geometría, una vez que éstas han sido establecidas, ninguna referencia ulterior a la experiencia o la intuición es necesaria para su desarrollo deductivo. Según lo advierte el propio Pasch:

> Los axiomas deben contener todo el material empírico necesario para construir la matemática, de manera que una vez establecidos, no es más necesario recurrir a observaciones empíricas. (Pasch 1882, p. 18)

Aunque la utilización sustantiva de diagramas en las pruebas geométricas había sido fuertemente criticada por los geómetras desde comienzos del siglo XIX[25], Pasch tuvo el mérito de haber articulado por primera vez una posición clara respecto de los métodos de demostración que debían ser considerados como legítimos en geometría.[26] Esta articulación, sin embargo, fue rápidamente compartida por gran parte de los geómetras de la época, no sólo dentro de Alemania, sino con gran ímpetu en Italia.[27] Hilbert adhiere, en este primer abordaje axiomático a la geometría, a la idea de que las demostraciones geométricas sólo deben estar basadas en los axiomas y, por lo tanto, no se debe recurrir

[25] Como se ha visto en el capítulo anterior, el surgimiento de la geometría proyectiva, a comienzos del siglo XIX, tuvo una gran importancia en la crítica a la utilización de los diagramas en las pruebas geométricas. El artículo de Nagel (1939) es un estudio clásico sobre esta temática

[26] Para ser más precisos, en 1882 Pasch sólo plantea este idea de un modo general. Su programa deductivista es en cambio desarrollado posteriormente. Véase (Schlimm 2010b).

[27] Sobre la recepción de Pasch (1882) por los geómetras italianos, véase Gandon (2005), Bottazzini (2001b) y Avellone y otros (2002). Una clara excepción fue Klein (1890). Sobre las discusiones entre Pasch y Klein respecto del papel de los diagramas en geometría véase Schlimm (2010a).

en ellas a la intuición. Ello lo manifiesta explícitamente en el siguiente pasaje de su manuscrito, en donde parafrasea visiblemente a Pasch:

> Un sistema de puntos, líneas y planos se denomina diagrama o figura. La demostración [de esta proposición][28] puede ser también llevada a cabo de la mano de una figura apropiada, sin embargo esta referencia no es de ningún modo *necesaria*; ella hace más fácil la *compresión* y es un *medio fructífero* para el descubrimiento de nuevos teoremas. Pero cuidado, [esta referencia] fácilmente puede conducir a errores. El teorema está recién probado cuando *la demostración es completamente independiente de la figura*. La prueba debe estar basada paso a paso en los *axiomas previamente establecidos*. El dibujar figuras equivale al *experimento* del físico, y la *geometría experimental* queda ya concluida con [el establecimiento de] los axiomas. Si nos apartamos *en lo más mínimo* de esta posición, entonces el proceso de demostración [*Beweisverfahren*], y con ello toda la investigación, pierde *todo su sentido*. (Hilbert 1894, p. 75)

Junto con este requerimiento característico del método axiomático moderno, que establece que un teorema sólo puede considerarse demostrado cuando es completamente independiente de la figura geométrica[29], Hilbert exhibe también otros elementos que apuntan al carácter abstracto que pretende imprimirle a su nueva idea de axiomática. En primer lugar, renuncia a ofrecer una definición descriptiva *à la Euclides* de los términos básicos de su teoría geométrica; en cambio, el primer paso de la presentación axiomática consiste ahora en postular la existencia de un sistema o conjunto de objetos cualesquiera, sujeto a las condiciones impuestas por los axiomas.[30] Estos objetos reciben por convención su designación geométrica habitual, aunque se aclara que de ningún modo refieren a los objetos dados en la intuición geométrica:

> En efecto, antes de los axiomas de existencia se debe añadir lo siguiente: Existe un sistema de cosas, a las que llamamos puntos, un segundo y un

[28] Hilbert se refiere a la proposición: "A través de una línea y de un punto, que no se encuentra en esta misma línea, pasa siempre uno y sólo un plano"(Hilbert 1894, p. 75).

[29] Para una discusión reciente sobre la posición de Hilbert respecto del papel de los diagramas en matemática, véase Smadja (2011).

[30] Es precisamente en virtud de esta suposición inicial de la existencia de un conjunto de objetos indeterminados, por la que Hilbert llama más tarde "axiomática existencial" a su concepción del método axiomático. Véase la descripción del método axiomático formal en (Hilbert y Bernays 1934, pp. 1–3).

> tercer sistema de cosas, a las que deseamos llamar líneas y planos. (Hilbert 1894, p. 74)

Más importante aún, en estas notas de clases Hilbert afirma, *por primera vez*, que su sistema axiomático para la geometría euclídea elemental no debe ser entendido como una descripción directa o inmediata del espacio físico, sino más bien como un 'esquema de conceptos', capaz de recibir diversas interpretaciones:

> En general debe afirmarse: nuestra teoría proporciona sólo un esquema [*Schema*] de conceptos, conectados entre sí por las invariables leyes de la lógica. Se deja librado al entendimiento humano [*menschlicher Verstand*] cómo aplicar este esquema a los fenómenos, cómo llenarlo de material [*Stoff*]. Ello puede ocurrir de diversas maneras: pero siempre que los axiomas sean satisfechos, entonces los teoremas son válidos. Cuanto más fácil y más variadas son las aplicaciones, tanto mejor es la teoría. (Hilbert 1894, p. 104)

En la medida en que su nueva concepción axiomática vaya consolidándose, Hilbert irá ganando claridad respecto de este punto. Sin embargo, este pasaje muestra que, ya en 1894, *la idea central de su concepción formal método axiomático estaba bien definida*. Hilbert reconoce que su axiomatización de la geometría arroja un "esquema de conceptos" que se halla separado de la realidad [*Wirklichkeit*], en el sentido de que su teoría axiomática no intenta ofrecer una descripción directa del espacio físico. Por el contrario, de acuerdo con su nueva concepción del método axiomático, la relación entre su teoría geométrica axiomatizada y la 'realidad' acontece a través de interpretaciones o 'aplicaciones' [*Deutungen*], que Hilbert ejemplifica de la siguiente manera:

> Con los axiomas anteriores de existencia y posición podemos describir ya un amplio conjunto de hechos geométricos y fenómenos. Sólo necesitamos tomar 'cuerpos', por puntos, líneas y planos, 'rozar', por pasar a través, y 'estar quieto o fijo' por determinar. Los cuerpos los pensamos en general sólo en un número finito y así conseguimos que, por medio de esta interpretación, los axiomas se cumplan (...) Sabemos entonces que, en cualquier caso, todas las proposiciones establecidas hasta ahora se cumplen, y de hecho, con exactitud. Si encontramos que en la aplicación una proposición no se cumple (exactamente), entonces ello se debe a que la aplicación es falsa, i.e., los cuerpos, el movimiento y el rozar, no valen para nuestro esquema de axiomas (en general). (Hilbert 1894, pp. 103–104)

Es necesario aclarar que, aunque Hilbert sostiene aquí que la interpretación propuesta debe cumplir "exactamente" las condiciones impuestas por los axiomas, poco después en estas mismas notas de clase reconoce abiertamente que las interpretaciones *empíricas* de un sistema axiomático formal sólo pueden tener un carácter *aproximativo*. Por otro lado, dado que el esquema de conceptos puede tener múltiples – e incluso infinitas – aplicaciones, Hilbert admite que en principio ninguna interpretación debe ser privilegiada por sobre las otras. Por el contrario, cuanto más variadas sean las interpretaciones o aplicaciones posibles, mejor es la teoría en cuestión.[31]

Ahora bien, puesto que los sistemas axiomáticos son considerados ahora como 'esquemas de conceptos', Hilbert deberá reconocer que las teorías geométricas, aun cuando se afirme que su origen se encuentra en la experiencia, no pueden ser directamente verdaderas o falsas por representar correctamente, o por fallar en representar, ciertos objetos (físicos) o dominio determinado. Por el contrario, la condición fundamental que se exigirá de toda teoría axiomática es la *consistencia*. Dicho de otro modo, la realidad no determina a la teoría geométrica, en el sentido de que la limita a lo que, a primera vista, está intuitiva y empíricamente justificado; en cambio, la única limitación que se fija es que constituya un sistema de axiomas libre de contradicciones. Hilbert aclara esta idea hacia el final de sus notas, en donde critica duramente a los "filósofos" que rechazan de antemano la posibilidad de las geometrías no–euclídeas, al afirmar que éstas contradicen las leyes del espacio físico euclídeo:

> El experimento nos muestra ahora que la suma de los ángulos no difiere de π. Una diferencia de π incluso en el caso de triángulos enormes en la astronomía, no se ha presentado todavía en la actualidad. (...) En virtud de este experimento[32] rechazamos la utilización de la geometría hiperbólica

[31] Este pasaje puede considerarse como una anticipación a una de sus respuestas a Frege:

> Todas las proposiciones de la teoría de la electricidad son por supuesto válidas también para cualquier otro sistema de cosas que sea sustituido por los conceptos de magnetismo, electricidad ..., bajo la condición de que los axiomas dados se cumplan. Pero esta circunstancia no puede ser nunca un defecto en una teoría – más bien, es una ventaja enorme – y en cualquier caso es inevitable. (Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899; en Frege 1976, p. 67)

[32] Hilbert se refiere al intento de Gauss de demostrar la validez empírica del axioma de las paralelas, por medio de la medición de los ángulos de un triángulo construido tomando como vértices tres picos de unos cerros aledaños a Göttingen. En efecto, Hilbert agrega como nota al pie la siguiente referencia:

> Gauss explica – y con él toda la tradición en Göttingen – que su convencimiento en la validez de la geometría común radica en haber encontrado que la suma de los ángulos del triángulo

> y la reservamos eventualmente para un uso posterior más sustantivo, en el caso de que mediciones más precisas sobre triángulos de gran magnitud revelen una diferencia respecto de π. Resulta necio, como lo hace por ejemplo Lotze[33], rechazar de antemano la posibilidad de la geometría no–euclídea. La posibilidad misma, es decir, la consistencia interna, puede ser en cambio exhibida rigurosamente. En efecto, para ello se puede construir un sistema de unidades – puntos, líneas, planos (e incluso definir a través de números de un modo puramente aritmético), para el cual todos nuestros axiomas – existencia, posición, congruencia – se cumplen y en el que por un punto pasan infinitas rectas paralelas a una recta dada. Un sistema tal se encuentra fácilmente, si se toman todos los puntos internos de una esfera y se toma como plano todas las esferas existentes ortogonales a la esfera dada. (Hilbert 1894, pp. 119–120)

Por un lado, Hilbert advierte que las diversas interpretaciones posibles de un sistema axiomático formal para la geometría tienen necesariamente *un carácter aproximativo.* Más aún, aunque *en este período temprano* Hilbert pensaba que el experimento de Gauss revelaba que la geometría euclídea era una descripción verdadera del espacio físico[34], al mismo tiempo era muy claro en cuanto a que una interpretación (empírica) nunca podría llegar a un grado de precisión tal como para decidir si una proposición como el postulado de las paralelas es verdadera o no. Por otro lado, en este pasaje se sugiere, aunque muy al pasar, que la consistencia de un sistema axiomático, por ejemplo para la geometría hiperbólica, podría ser demostrada por medio de la construcción de un modelo aritmético. Sin embargo, esta alternativa no es profundizada, lo cual resulta consecuente con el hecho de que en este primer abordaje axiomático a la geometría las investigaciones metageométricas, por medio de la construcción de realizaciones o 'modelos' aritméticos de los axiomas geométricos, no son desarrolladas en absoluto. Hilbert sólo se limita meramente a *sugerir* que las propiedades de independencia de un axioma o un conjunto de axiomas pueden ser probadas por medio de *interpretaciones aritméticas*:

> Cada uno de los cinco axiomas de existencia es independiente de los cuatro axiomas restantes. De hecho, como puede verse fácilmente, siempre podemos

Inselsberg, Brocken, y el alto Hagen es igual a 180°.

[33] Hilbert se refiere a Lotze (1879).

[34] Por supuesto, este convencimiento cambiará con la llegada de la teoría de la relatividad especial y general. Sobre la posición de Hilbert respecto de las consecuencias que conllevaban estas teorías físicas para el estatus de la geometría, véase (Corry 2004a; 2006).

> construir aritméticamente los tres sistemas de cosas: puntos, líneas y planos, i.e., a través de coordenadas, de manera que cuatro axiomas cualesquiera son satisfechos, y el quinto no. Sin embargo, en lo que sigue no me ocuparé de esto. (Hilbert 1894, p. 76)[35]

Por último, Hilbert menciona en este manuscrito otro aspecto importante de su nueva concepción axiomática de la geometría. Este rasgo es expresado, aunque de un modo lacónico, en la siguiente observación:

> Cada sistema de unidades y axiomas que describe completamente los fenómenos está tan justificado como cualquier otro. Mostrar sin embargo que el sistema axiomático aquí especificado es, respecto de cierto punto de vista, el más simple posible. (Hilbert 1894, p. 104)

El conjunto de 'hechos geométricos' que conforma el acervo de conocimientos de la geometría elemental puede ser descripto por medio de diferentes sistemas de axiomas. Sin embargo, Hilbert admite que todos los sistemas axiomáticos deben considerarse como igualmente justificados, bajo la condición de que sean capaces de "incluir o acomodar" [*unterbringen*] la totalidad de estos hechos geométricos dentro de la teoría axiomática, ya sea como axiomas o como consecuencias lógicas de los axiomas. Ahora bien, Hilbert expresa también la preocupación de que su sistema de axiomas sea, "respecto de cierto punto de vista", el más simple posible. En mi opinión, con esta afirmación nuestro autor alude a un componente importante de su concepción abstracta del método axiomático formal, que aquí sólo anticipa, pero que más tarde será explicitado con claridad. Este rasgo puede resumirse como sigue: en virtud del modo en que ahora se concibe la relación entre un sistema axiomas para la geometría y la realidad o el espacio físico, es necesario convenir que los conceptos básicos de una teoría axiomática pueden ser escogidos libremente. Es decir, en lugar de hablar de 'puntos', 'líneas' y 'planos' como los términos básicos, podemos utilizar los conceptos de 'círculo' y 'esfera'; e incluso podemos intentar construir un sistema axiomático para la geometría elemental a partir de un único término primitivo, por ejemplo, "punto".[36] Asimismo, una vez seleccionados los conceptos básicos, todavía existe una completa libertad para establecer qué proposiciones

[35] La misma observación, respecto del grupo de axiomas de posición, se encuentra en (Hilbert 1894, p. 79).

[36] Veblen (1904) es un ejemplo de una construcción axiomática de la geometría elemental, en donde se utiliza a la noción de 'punto' y 'orden' como los únicos términos primitivos del sistema. Asimismo, en la última década del siglo XIX y en la primera del siglo XX, varios matemáticos italianos llevaron a delante un programa de investigación, cuyo objetivo fundamental era presentar a las distintas teorías geométricas como teorías "hipotético–deductivas", en donde se intentaba reducir lo más

deben ser tomadas como axiomas y cuáles deben ser demostradas a partir de ellos. Dada esta libertad, una manera de entender entonces la “simplicidad” recién mencionada es que el sistema conste de la menor cantidad posible de conceptos primitivos y axiomas.

Sin embargo, aunque Hilbert advierte desde un inicio que, en principio, los conceptos primitivos y axiomas de un sistema axiomático para la geometría pueden ser escogidos con completa libertad, adopta en cambio al respecto una actitud en cierto sentido “tradicional”. Más precisamente, por razones o motivos que expondremos en los dos capítulos siguientes, Hilbert no desea apartarse *radicalmente* de la exposición clásica de la geometría llevada a cabo por Euclides. Bernays reconoce precisamente esta actitud de la siguiente manera: “En este trabajo [*Fundamentos de la geometría*], Hilbert crea un nuevo sistema de axiomas para la geometría, que selecciona de acuerdo a los criterios de simplicidad y completitud lógica, siguiendo los conceptos de Euclides lo más cerca posible” (Bernays 1922a, p. 94). Luego, no sólo el sistema axiomático de Hilbert dista mucho de ser el más económico posible, sino que además nunca expresó un interés concreto en sistemas axiomáticos alternativos para la geometría elemental, en donde se utilizaba un único o a lo sumo dos términos primitivos. La “simplicidad” que Hilbert tiene aquí en mente tiene entonces más que ver con la capacidad del sistema de axiomas de reflejar “de un modo directo” los hechos intuitivos básicos de la geometría, antes que con un número más reducido de nociones no definidas y axiomas.

Por otro lado, resulta muy interesante notar que, en sus primeros estudios axiomáticos en el campo de la geometría elemental, Hilbert no concebía la completa libertad con la que ahora podían ser elegidos los axiomas, como un rasgo íntegramente positivo. En efecto, en una carta escrita ese mismo año a F. Lindemann (1852-1939), su anterior maestro en Königsberg[37], Hilbert expresa algunos reparos respecto de la supuesta “arbitrariedad” con la que pueden ser postulados los axiomas de la geometría:

> Algo me resulta todavía insatisfactorio en el establecimiento de los axiomas, lo cual reside en que la elección de los axiomas acontece con cierta arbitrariedad y no existe un principio efectivo, respecto de por qué uno no debería mejor tomar como axiomas a ciertas condiciones simples, y lo mismo a la inversa. (Hilbert a Lindemann, 17 de julio de 1894); citado en (Toepell 1986, pp. 100–101)

posible el número de conceptos primitivos y axiomas. Dentro de este contexto, uno de los autores más importantes fue Mario Pieri (1860–1913), quien en 1900 presentó un sistema de postulados para la geometría euclídea elemental, sobre la base de sólo dos nociones primitivas: punto y movimiento (Cf. Pieri 1900). Sobre las contribuciones de Pieri, véase Marchisotto y Smith (2007).

[37] Sobre la relación entre F. Lindemann y Hilbert véase Rowe (2000) y Reid (1996).

Aquellos habituados a la presentación axiomática formal de la geometría elemental en *Fundamentos de la geometría* (1899), encontrarán llamativo que Hilbert haya podido expresar una preocupación de tal índole. En efecto, una consecuencia inmediata del abandono de la concepción de los axiomas de la geometría como verdades intuitivas "autoevidentes", es que cualquier proposición puede ser en principio postulada libremente como axioma de la geometría, bajo la condición antes mencionada de que del sistema de axiomas (independientes) resultante puedan deducirse lógicamente todos los "hechos geométricos" que constituyen el dominio de esta disciplina. Más aún, en su reseña a la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (1899), Poincaré manifiesta esta misma preocupación advertida previamente por Hilbert, aunque esta vez señalándola como un evidente defecto de la propuesta del matemático alemán:

> El punto de vista lógico parece sólo interesarle. Si una serie de proposiciones son dadas, él se asegura de que se sigan lógicamente de la primera. Cuál es el fundamento de esta primera proposición, cuál es su origen psicológico, es algo de lo que no se ocupa. E incluso si tenemos, por ejemplo, tres proposiciones A, B, C y si la lógica permite, partiendo de cualquiera de ellas, deducir las otras dos, para él es indiferente si consideramos a A como un axioma y de allí deducimos B y C, o si contrariamente, consideramos a C como un axioma y de allí deducimos A y B. Los axiomas son postulados; no sabemos de dónde provienen, y es por lo tanto fácil postular a A como C. (Poincaré 1902, p. 272)

En lo que sigue veremos que ésta fue una preocupación constante de Hilbert en este período temprano; una preocupación que estaba anclada en su concepción de la naturaleza de la geometría y del conocimiento matemático en general. Sin embargo, para concluir esta sección, podemos afirmar que, en este primer abordaje a la geometría, Hilbert pone de manifiesto los dos elementos o rasgos que, en mi opinión, caracterizan su concepción temprana de la geometría, a saber: *i)* una posición axiomática formal, que concibe el resultado de una axiomatización como una estructura relacional en donde los términos básicos no poseen una referencia (intuitiva) fija, sino que pueden recibir diversas interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas o físicas, como así también interpretaciones empíricas; *ii)* una posición empirista respecto del origen de la geometría y de su lugar dentro de las distintas disciplinas matemáticas.

2.3. Hacia *Fundamentos de la geometría* (1899)

El curso de 1894 que hemos analizado en la sección anterior fue secundado por dos trabajos sobre geometría. En primer lugar, el curso "Geometría analítica del plano y el espacio" (Hilbert 1894/5); en segundo lugar, una carta "científica" a Felix Klein, publicada más tarde en forma de artículo en *Mathematische Annalen*, con el título: "Sobre la línea recta como el camino más corto entre dos puntos" (Hilbert 1895). Principalmente, este artículo reviste un gran interés, en tanto pone en evidencia que, a partir de 1895, las investigaciones geométricas de Hilbert cobraron un creciente carácter "metamatemático". Sin embargo, entre 1895 y 1898, la geometría estuvo muy lejos de ser su principal tema de estudio. Por el contrario, durante este período, Hilbert se dedicó intensamente a la teoría de números; más precisamente, a los cuerpos de números algebraicos. La incursión de Hilbert en este campo culminó con el trabajo que lo catapultó como matemático de renombre internacional: "La teoría de cuerpos de números algebraicos", más conocido como *Zahlbericht* (Hilbert 1897a).[38]

Esta contribución determinó en gran medida que en Göttingen, en donde se hallaba trabajando ya desde 1895, Hilbert fuera conocido principalmente como un notable especialista en álgebra y teoría de números. Su anuncio de un nuevo curso sobre geometría, para el semestre de invierno de 1898/99, ocasionó por ello una enorme sorpresa dentro de esta comunidad matemática. Otto Blumenthal, el biógrafo oficial de Hilbert, señala lo siguiente:

> Para el semestre de invierno de 1898/99 Hilbert había anunciado un curso sobre "Elementos de la geometría euclídea". Ello causó entre los estudiantes una gran sorpresa, puesto que al igual que nosotros los más viejos, participantes de los "paseos por los cuerpos de números" [*Zahlkörperspaziergängen*], no habían notado jamás que Hilbert se ocupaba de cuestiones geométricas: él sólo hablaba de cuerpos de números. (Blumenthal 1935, p. 402)

Sabemos ahora que esta opinión estaba totalmente infundada, dado que desde 1891 Hilbert estaba interesado por cuestiones geométricas. Sin embargo, es cierto que entre 1895 y 1898, la geometría sólo ocupó un interés tangencial en sus investigaciones matemáticas. Toepell (1985; 1986) ha mostrado convincentemente que un episodio en particular renovó su interés por el problema de los fundamentos de la geometría.

[38] Un resumen de las contribuciones de Hilbert a la teoría de los cuerpos de números algebraicos puede encontrarse en (Rowe 2000).

Según se ha señalado, uno de los aspectos de la conferencia de Wiener (1891) que más llamó la atención de Hilbert, fue la sugerencia de que es posible utilizar los teoremas de Desargues y Pascal, a veces referidos como los 'teoremas de incidencia' [*Schliessungssätze*], para demostrar el teorema fundamental de la geometría proyectiva y así desarrollar un nuevo sistema geométrico que no incluya ningún principio de continuidad.[39] Sin embargo, esta afirmación se limitaba a ser una mera tesis a demostrar, dado que ni en su conferencia de 1891, ni en un trabajo ampliatorio de 1893, Wiener proporciona una prueba.[40] Luego, como lo reporta Toepell utilizando una carta de Hilbert a Hurwitz, el interés del primero sobre los fundamentos de la geometría se vio revitalizado en 1898, cuando Friedrich Schur (1856–1932) presentó una prueba del teorema de Pascal en la que no se utilizaba ningún postulado de continuidad.[41] Hilbert reanudó entonces inmediatamente sus investigaciones axiomáticas, esta vez presentado particular atención en el papel que las condiciones de continuidad desempeñan en la geometría euclídea elemental, particularmente en la introducción de coordenadas numéricas.

El resultado de esta nueva incursión en los fundamentos de la geometría fue el curso de 1898/1899 recién mencionado. Este curso posee dos versiones diferentes. Una consiste en las notas elaboradas por el propio Hilbert – (Hilbert 1898b)–, y en ese sentido, similares a las notas de clases que hemos analizado anteriormente. En cambio, en la segunda versión – (Hilbert 1898a) – la redacción [*Ausarbeitung*] de las notas estuvo a cargo de un estudiante de doctorado: Hans von Schaper.[42] Este curso reviste así un enorme interés. Por un lado, la nueva concepción formal del método axiomático, tal como es ilustrada en *Fundamentos de la geometría*, se halla ya plenamente desarrollada; incluso en ocasiones las investigaciones metageométricas son llevadas a cabo más detalladamente. Por otro lado, y a diferencia de aquella obra, las diversas pruebas y demostraciones geométricas están acompañadas por importantes, aunque a veces breves, reflexiones sobre su significado metodológico y epistemológico.[43] En particular, Hilbert confirma en estas notas los dos aspectos que, según he sostenido, caracterizan su temprana concepción axiomática de la geometría, a saber: una concepción formal del método axiomático y una posición empirista en cuanto al origen de la geometría. Veamos a continuación cómo

[39] Sobre las discusiones en torno al teorema fundamental de la geometría, y a sus diversas demostraciones, véase (Voelke 2008).

[40] Cf. (Wiener 1891; 1893).

[41] Cf. (Schur 1898). Toepell (1985; 1986) analiza la recepción de Hilbert del artículo de Schur.

[42] Para una descripción detallada de estas dos versiones del manuscrito de Hilbert, véase (Hallett y Majer 2004, pp. 186–189)

[43] Sobre la relación entre estas notas de clase y el *Festschrift*, véase la introducción al capítulo cuatro de (Hallett y Majer 2004).

son presentados estos dos aspectos.

2.3.1. "La ciencia natural más completa"

Hilbert vuelve a presentar en la introducción de este nuevo curso una serie de reflexiones generales respecto de la naturaleza de la geometría y del método axiomático. En primer lugar, el matemático alemán repite la posición empirista antes aludida, al afirmar que la geometría debe ser considerada, *en cuanto a su origen*, una ciencia natural:

> Vamos a reconocer que la geometría es una *ciencia natural*, pero una ciencia tal, cuya teoría debe ser llamada *completa*, y que al mismo tiempo constituye un *modelo* para el *tratamiento teórico* de otras ciencias naturales. (Hilbert 1898b, p. 221)

Nuevamente vemos aquí una anticipación, casi literal, del sexto de los "Problemas matemáticos" de París (Hilbert 1900b). Por otra parte, al calificar a la geometría como una "ciencia natural completa", se alude a un rasgo que ya hemos mencionado. A diferencia de otras ciencias físicas como la mecánica, la teoría de la electricidad, la óptica, etc., donde 'nuevos hechos' son descubiertos continuamente, Hilbert entiende que el notable grado de desarrollo y refinamiento conceptual que ha alcanzado la geometría desde los tiempos de Euclídes, le confiere un grado de seguridad, especialmente en lo que toca a los 'hechos geométricos' fundamentales, superior al de aquellas ciencias naturales. En otras palabras, la geometría es particularmente susceptible de recibir un completo análisis axiomático debido al notable grado de desarrollo que ha alcanzado, antes que a alguna característica esencial o específica ligada a su naturaleza. Es entonces en este preciso sentido que Hilbert concibe a la geometría como la "ciencia natural más completa" [*die vollkommenste Naturwissenschaft*].

Asimismo, otra afirmación interesante que realiza Hilbert en sus propias notas de clases, es el modo en que se precisa el objeto de estudio de la geometría euclídea elemental y su caracterización como la "geometría de la vida cotidiana" [*die Geometrie des täglichen Lebens*]:

> En lo que toca al *material* [Stoff], nos ocuparemos de los *teoremas de la geometría elemental*, que hemos aprendido tempranamente en la escuela: *teoría de las paralelas*, *teoremas de congruencia*, *igualdad de los polígonos*, teoremas sobre los *círculos, etc.* en el plano y en el espacio; en breve, [nos ocuparemos] de lo que en los manuales escolares se llama *planimetría* y *estereometría*,

> y que nosotros llamaremos aquí *geometría euclídea*. Esta geometría es, por así decirlo, la geometría de la *vida cotidiana*. Ella constituye la base de todas nuestras *consideraciones acerca de la naturaleza* y de todas las *ciencias naturales*. (Hilbert 1898b, p. 221)

En mi opinión, las citas anteriores indican que el empirismo de Hilbert se circunscribe a sostener que la geometría es una ciencia empírica sólo en cuanto a su origen. En este respecto, la geometría elemental puede ser considerada como una de las primeras ramas de la física. Sin embargo, Hilbert no profundiza o radicaliza su empirismo exigiendo, por ejemplo como Pasch, que todos los conceptos básicos y proposiciones fundamentales deban referirse a objetos y hechos empíricamente observables.[44] Por el contrario, el espíritu de *Fundamentos de la geometría* (1899) se halla completamente presente en este curso y, por consiguiente, Hilbert defiende una concepción formal o abstracta del método axiomático. Es interesante notar cómo se conjugan estos dos elementos en su estudio de la geometría – posición axiomática abstracta y concepción de la geometría como una ciencia natural –:

> La geometría elemental (euclídea) tiene como objeto los hechos y leyes que el comportamiento [*Verhalten*] espacial de las cosas nos presenta. Según su estructura, es un sistema de proposiciones [*Sätzen*] que – en mayor o menor medida – pueden ser deducidas de un modo puramente lógico a partir de ciertas proposiciones indemostrables, los axiomas. Esta conducta, que en menor completitud encontramos, por ejemplo, en la física matemática, puede expresarse brevemente en la sentencia: *la geometría es la ciencia natural más completa*. (Hilbert 1898a, p. 302).

Es preciso admitir que, en virtud de su concepción axiomática abstracta, la pretensión de que la geometría pueda ofrecer una descripción directa de la forma o el comportamiento de los cuerpos en el espacio debe ser rechazada. Sin embargo, Hilbert parece articular su posición de la siguiente manera: en primer lugar, afirma que su estudio axiomático abstracto debe proporcionarnos un conocimiento más claro de la estructura – i.e. las propiedades lógicas de los axiomas y su relación con los teoremas fundamentales – de la geometría euclídea. En este sentido, el sistema axiomático obtenido por medio de la axiomatización arroja un entramado de conceptos que no posee una relación directa o inmediata con un dominio fáctico intuitivo. Mas, en lo que respecta al lugar de la

[44] Este tema será analizado en el capítulo 3.

geometría dentro de las disciplinas matemáticas fundamentales, ésta sigue siendo una ciencia que en su base está esencialmente ligada a la experiencia y a nuestra intuición espacial.

Esta observación reviste una gran importancia para comprender cuál es, para Hilbert, una de las funciones principales del tratamiento axiomático formal de la geometría. Dado el carácter de la geometría como una ciencia natural – en cuanto a su origen –, la función central del nuevo método axiomático es convertir a la geometría, con su contenido empírico factual, en una disciplina matemática pura. Hilbert lo afirma explícitamente en las notas de clases para un curso sobre mecánica, también dictado en el semestre de invierno de 1898/99. En la introducción de estas notas, la mecánica es definida como la ciencia que estudia el movimiento de la materia, cuya finalidad es describir este movimiento del modo más completo y simple posible. Empero, para conocer el lugar que ésta ocupa entre la matemática y las ciencias naturales, es necesario observar el caso de la geometría:

> También la geometría surge [como la mecánica] de la observación de la naturaleza, de la experiencia, y en ese sentido es una *ciencia experimental*. En mi curso sobre geometría euclídea me introduciré en este tema más de cerca. Pero sus fundamentos experimentales son tan irrefutables y tan *generalmente reconocidos*, han sido confirmados en un grado tal, que no se requiere de ninguna prueba ulterior. Todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de un conjunto mínimo de *axiomas independientes* y así construir todo el edificio de la geometría por *medios puramente lógicos*. De este modo [i.e. por medio del tratamiento axiomático], la geometría se vuelve una *ciencia matemática pura*. También en la mecánica los *hechos fundamentales* son reconocidos por todos los físicos. Sin embargo, la *organización* de los conceptos básicos está sujeta todavía al cambio de opiniones (...) y por lo tanto la mecánica no puede ser llamada hoy una ciencia *matemática pura*, al menos en el mismo grado en que lo es la geometría. Debemos esforzarnos para que llegue a serlo. Debemos ensanchar los límites de la matemática pura, no sólo en nombre de nuestro interés matemático, sino más bien en razón del interés de la ciencia en general. (Hilbert 1898c, pp. 1–2)[45]

Este grado de avance alcanzado por la geometría es lo que vuelve *imprescindible* su análisis axiomático, en el modo en que ahora es reformulado por Hilbert. En un pasaje

[45] Citado también en (Corry 2004a, p. 90).

con un tono muy similar a la conferencia "El pensamiento axiomático" (Hilbert 1918), pronunciada en Zurich casi veinte años más tarde, Hilbert subraya esta necesidad:

> Cuanto más se acerca una ciencia natural a su objetivo: "la deducción lógica de todos los hechos que pertenecen a su campo a partir de ciertas proposiciones fundamentales", tanto más necesario se vuelve investigar estos mismos axiomas con precisión, indagar sus relaciones mutuas, reducir su número tanto como sea posible, etc. (Hilbert 1898a, p. 302)[46]

En los dos últimos pasajes citados, Hilbert pone de manifiesto otro aspecto central de su empresa de axiomatizar la geometría, que es oportuno mencionar, a saber: su presentación axiomática de la geometría debe proceder de manera tal que, una vez fijados los axiomas, la geometría "debe poder ser construida por medios puramente lógicos"; o del mismo modo, el objetivo de su axiomatización es la "deducción lógica de todos los hechos a partir de los axiomas". Considero que es conveniente realizar un breve comentario respecto de qué es lo que entiende Hilbert, en esta etapa inicial, por la expresión "medios puramente lógicos".

En primer lugar, debemos reconocer que esta expresión posee, en sentido estricto, un carácter *programático*. Es decir, en ningún lugar en estas notas de clases, ni tampoco en el *Festschrift*, Hilbert da cuenta explícitamente de qué *principios o leyes lógicas* pueden ser utilizados en las demostraciones de los teoremas. En otras palabras, en estos primeros estudios axiomáticos, Hilbert no presenta ni alude a ningún sistema o cálculo lógico que pudiera servir como la *lógica subyacente* de sus sistemas axiomáticos.[47] Hilbert admite de hecho que se trata de una presuposición, al señalar más tarde en este mismo manuscrito que, en su abordaje axiomático a la geometría, las "leyes de la lógica" debían ser consideradas como *dadas de antemano*:

> Es importante fijar con precisión el punto de partida de nuestra investigación: *las leyes de la lógica pura, y en especial la aritmética, las consideramos como dadas*. (Sobre la relación entre lógica y aritmética véase Dedekind: ¿Qué son y para que sirven los números?) Nuestra pregunta es la siguiente: *¿Qué proposiciones debemos "adjuntar" al dominio recién definido* [*i.e., al conjunto de hechos geométricos*], *para obtener la geometría euclídea?* (Hilbert 1898a, p. 303)

[46] Cf. (Hilbert 1918).

[47] Hilbert presentó un primer esbozo de un sistema o cálculo lógico recién en 1905. Esta cuestión será abordada en el capítulo 6.

Hilbert tampoco aclara a qué se refiere con "las leyes de la lógica pura", aunque todo lleva a suponer que *en este momento* estaba pensando en la lógica tradicional (aristotélica).[48] Del mismo modo, es claro que Hilbert presupone también que el aparato lógico *no especificado*, que debía ser utilizado como la lógica subyacente de su sistema axiomático, debía ser "correcto" o "sólido" (*sound*), esto es, si los axiomas son válidos para una interpretación dada, entonces los teoremas también lo son. En suma, la afirmación según la cual el método axiomático formal debía permitir la construcción puramente lógica de la geometría está inmediatamente ligada a la búsqueda de rigor y precisión en las demostraciones matemáticas. Hilbert comparte este objetivo con otros programas del siglo XIX, como por ejemplo los de Dedekind, Frege y Pasch. En el caso de la geometría, la búsqueda de rigor en las demostraciones geométricas suponía que: *i.)* la totalidad de los axiomas o postulados necesarios para construir la teoría geométrica sean establecidos explícitamente desde un inicio, y asimismo nuevos principios no sean asumidos durante el desarrollo de la teoría, *ii.)* que el resto de las proposiciones o teoremas de la geometría debían sean obtenidos sobre la base de deducciones puramente lógicas, en el sentido en que *no se apele a ningún tipo de diagramas o construcciones geométricas en las demostraciones*. En otras palabras, para Hilbert el nuevo método axiomático debía cumplir las exigencias de que no sólo no existan "lagunas lógicas" en las demostraciones geométricas, sino que además elementos "extraños o exógenos" como los diagramas o figuras geométricas, no sean reconocidos como instrumentos válidos en las pruebas. Esta vinculación entre el método axiomático y la búsqueda de rigor en matemática es uno de los rasgos más enfatizados en su conferencia de París "Problemas matemáticos" (Hilbert 1900c).[49]

Pasemos ahora a analizar cómo describe Hilbert, ya en 1898, su nueva concepción abstracta del método axiomático.

2.3.2. El método axiomático formal y la 'matemática de los axiomas'

La concepción abstracta del método axiomático, exhibida poco después en el *Festschrift* (Hilbert 1899), se halla completamente articulada en estas notas de clases. En primer lugar, Hilbert aclara más directamente que, aunque los términos primitivos de su teoría axiomática reciben por convención su nombre habitual, no debe pensarse que ellos refieren a los objetos de la intuición geométrica:

[48] Hilbert comenzó a ver a la lógica tradicional aristotélica como problemática a partir del descubrimiento, en 1903, de las paradojas de Russell. Me referiré a esta cuestión en el capítulo siguiente (sección 4.3).

[49] Véase, por ejemplo, (Hilbert 1900c, p. 293).

> Vayamos ahora a nuestra tarea. *Para construir la geometría euclídea pensamos tres sistemas de cosas, a las que llamamos puntos, líneas y planos, y queremos designar con* $A, B, C, \ldots; a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. No debemos pensar que por medio de los nombres escogidos estamos añadiendo a estas cosas ciertas propiedades geométricas, como las que comúnmente asociamos con estas designaciones. *Hasta ahora sólo sabemos que las cosas de un sistema son diferentes a las cosas de los otros dos sistemas. Estas cosas reciben todas las demás propiedades a través de los axiomas, que reunimos en cinco grupos.* (Hilbert 1898a, p. 304)

La primera parte de este pasaje coincide casi literalmente con el modo en que se inicia la exposición axiomática en el *Festschrift*.[50] Por otra parte, en sus "Diarios científicos" [*Wissenschafliche Tagebücher*] Hilbert advierte de la misma manera que los conceptos primitivos de su teoría pertenecen a un orden conceptual, y por lo tanto no deben ser identificados con los objetos de la intuición geométrica: "Los puntos, líneas y planos de mi geometría no son sino 'cosas del pensamiento' [*Gedankendinge*], y en cuanto tales nada tienen que ver con los puntos, líneas y planos reales".[51]

Este modo de distinguir los términos primitivos de una teoría axiomática formal de los objetos de la intuición geométrica, ha sido muy a menudo utilizado para ilustrar el giro metodológico que Hilbert le imprimió a la idea de axiomática. Por ejemplo, en su clásico artículo, publicado en ocasión de la octava edición de *Fundamentos de la geometría*, Hans Freudenthal señala: "'Pensamos tres sistemas diferentes de cosas' . . . – con esta afirmación el vínculo entre la realidad y la geometría es eliminado. La geometría se convierte en matemática pura, y la pregunta acerca de si puede, y cómo puede, ser aplicada a la realidad es respondida del mismo modo que en cualquier otra rama de las matemáticas" (Freudenthal 1957, p. 111).

Si con la expresión "el vínculo con la realidad es eliminado", se alude al hecho de que los sistemas axiomáticos de Hilbert son abstractos o formales y, por lo tanto, no poseen una interpretación (intuitiva) fija, entonces esta caracterización es correcta. Sin embargo, es importante notar que, para Hilbert, ello no significaba que una teoría geométrica axiomática no tenía más ningún significado para la realidad; por el contrario, *en cierto sentido*, un sistema de axiomas (formal) tenía un significado aún mayor para la realidad,

[50] Cf. (Hilbert 1899, p. 4).

[51] **Cod. Ms. Hilbert 600:3**, p. 101. Hilbert emplea el término "Gedankendinge", aunque en relación a la aritmética, en (Hilbert 1905a). Hemos señalado que esta expresión era habitual en Dedekind (1888), quien ejerció una influencia considerable, durante este período, en Hilbert. Véase (Ferreirós 2009).

en tanto que ahora las conexiones o aplicaciones podían ser establecidas "de múltiples maneras" (Hilbert 1894, p. 104).[52]

Por otra parte, una diferencia importante de este nuevo abordaje axiomático, respecto del curso anterior de 1894, reside en que el espíritu "metamatemático" de sus investigaciones geométricas se halla plenamente desarrollado. Hilbert afirma que el objetivo fundamental de su investigación será establecer un nuevo conjunto consistente y completo de axiomas, independientes entre sí, para la geometría euclídea. Ahora bien, para la consecución de este objetivo, es esencial que los axiomas no sean considerados como afirmaciones evidentes o verdades acerca de un dominio fijo determinado, y que por lo tanto sus conceptos básicos puedan recibir libremente distintas interpretaciones. Por ejemplo, este requerimiento es necesario para probar la "indemostrabilidad" de cierta proposición a partir de un conjunto de principios, o sea, para mostrar su *independencia*. En este curso de 1898/1899, Hilbert presenta entonces *por primera vez* un gran número de resultados "metageométricos", particularmente resultados de *independencia*, alcanzados por medio de la construcción de distintos "modelos" de sus axiomas geométricos. Más precisamente, en estas notas encontramos una descripción, incluso más detallada que la presentada en el *Festschrift*, de cómo la teoría de los números reales podía ser utilizada para construir diversos "modelos" analíticos de los axiomas geométricos, y así probar la

[52] En un curso correspondiente a un período muy posterior, Hilbert sigue reconociendo que el "entramado de conceptos", producto de la axiomatización formal, conserva un importante significado para la realidad, en la medida en que representa "diversas formas en las que las cosas pueden estar efectivamente conectadas". Se trata de un curso titulado "Grundlagen der Mathematik" (Hilbert 1921), dictado en el semestre de invierno de 1921/1922. Luego, este curso revela que muchas de las ideas elaboradas en el período inicial de su desarrollo del método axiomático formal, son mantenidas por Hilbert posteriormente. El pasaje en cuestión es el siguiente:

> De acuerdo con este punto de vista, el método de la construcción axiomática de una teoría se presenta como el procedimiento de representar un dominio de conocimiento dentro de un entramado de conceptos, el cual es llevado a cabo de tal manera que los objetos del dominio de conocimiento se corresponden ahora con conceptos, y las afirmaciones acerca de esos objetos se corresponden con las relaciones lógicas entre esos conceptos.
>
> Por medio de esta correspondencia [*Abbildung*], la investigación es separada completamente de la realidad concreta [*Wirklichkeit*]. La teoría no tiene ahora más nada que ver con los objetos reales o con el contenido intuitivo del conocimiento; ella es una pura construcción conceptual [*Gedankengebilde*] acerca de la que no se puede afirmar que es verdadera o falsa. Sin embargo, este entramado de conceptos tiene un significado para nuestro conocimiento de la realidad, puesto que representa una forma posible de acuerdo con la cual las cosas se relacionan efectivamente. La tarea de la matemática es desarrollar tales esquemas conceptuales lógicamente, ya sea que seamos guiados a ellos por la experiencia o por la especulación sistemática. (Hilbert 1921, p. 3).

Hallett (1994; 2008) ha enfatizado la importancia de este pasaje para una correcta interpretación de la concepción hilbertiana del método axiomático.

independencia de una proposición geométrica – un axioma o un teorema – respecto de determinado conjunto de principios.

La técnica de la construcción de "modelos", según es entendida y practicada por Hilbert en las investigaciones metageométricas presentadas en este curso, consistía básicamente en *traducir* uno u varios grupos de axiomas geométricos dentro de otra teoría matemática, i.e., la teoría de los números reales. Para ser más exactos, Hilbert comienza a utilizar aquí, como se volverá después habitual en *Fundamentos de la geometría*, un sub–cuerpo pitagórico (numerable) de los números reales. Asimismo, esta traducción consistía en *re–definir* los conceptos geométricos básicos como 'punto', 'línea', 'congruencia', etc., en términos de la teoría de los números reales. Es decir, este método coincidía con el procedimiento estándar de la geometría analítica, en donde se proporcionaban, sobre la base de un sistema adecuado de coordenadas, nuevas definiciones de estos términos primitivos. Quizás resulte útil ilustrar con un ejemplo particular, tomado de estas notas de clases, cómo Hilbert concebía este procedimiento de construcción de "modelos" de sus axiomas geométricos.[53]

Uno de los tantos resultados de independencia que encontramos en este curso, y que sin embargo no está presente en el *Festschrift*, se refiere a un teorema muy simple de la geometría elemental: el llamado "teorema de la existencia del triángulo" (TET). Este teorema, que aparece como la proposición I, 22 en los *Elementos* de Euclides, afirma que siempre se puede construir un triángulo a partir de tres segmentos dados, tales que la suma de cualesquiera dos de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercero. Hilbert se propone entonces mostrar que este teorema *no puede ser demostrado* utilizando sólo los tres primeros grupos de axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia) de su sistema. Más precisamente, este problema se plantea de la siguiente manera: la demostración de TET que encontramos en los *Elementos* consiste básicamente en trazar dos circunferencias tomando como radio dos de los segmentos dados, construir un triángulo a partir del punto de intersección de las dos circunferencias, y luego mostrar que los lados del triángulo son en efecto iguales a los segmentos dados inicialmente (figura 2.4).

Ahora bien, esta demostración de Euclides presupone la existencia del punto de intersección de las dos circunferencias, a partir del cual se puede construir el triángulo. A esta condición se la conoce ahora como la "propiedad de intersección de dos circunferencias": dadas dos circunferencias Γ, Δ, si Δ contiene al menos un punto dentro de Γ, y

[53] El ejemplo que comentamos a continuación ha sido analizado por Hallett (2008, pp. 239–247), aunque en relación a la cuestión de la "pureza del método". Hallett menciona además otros ejemplos de investigaciones metageométricas sobre independencia, llevadas a cabo por Hilbert en estas notas de clases (Hilbert 1898b) y (Hilbert 1898a).

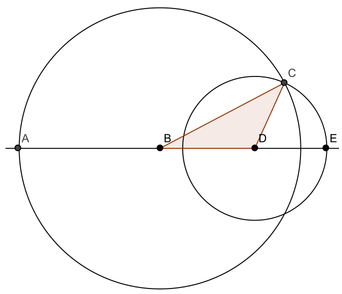


Figura 2.4.: Teorema de la desigualdad del triángulo (TET)

Δ contiene al menos un punto fuera de Γ, entonces Δ y Γ se encontrarán exactamente en dos puntos. Asimismo, de esta propiedad se sigue la propiedad de "intersección de líneas y circunferencias" (ILC), que sostiene que si una línea a contiene puntos en el interior y en el exterior de una circunferencia Φ, entonces a cortará a Φ exactamente en dos puntos. Luego, el objetivo de Hilbert es demostrar que ILC es independiente de los axiomas I–III, de donde se sigue que TET no puede ser demostrado sobre la base de estos axiomas.

Hilbert procede entonces de la siguiente manera. En primer lugar, suponemos que contamos con un sistema de coordenadas cartesianas, construido de manera habitual. Ahora bien, como coordenadas para los puntos de su geometría Hilbert no utiliza al cuerpo ordenado completo de los números reales, sino a un sub–cuerpo de números algebraicos que resulta de aplicar, partiendo de 1 y π, las cuatro operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) y la quinta operación de $\sqrt{1+x^2}$, donde x es un número que pertenece a este mismo cuerpo. Un punto de esta geometría es definido así como el par ordenado (x, y) de números que pertenecen al cuerpo recién descripto. Del mismo modo, una recta es definida, del modo usual, como el conjunto de puntos que satisface la ecuación $Ax+By+C=0$, y un plano como el conjunto de puntos que satisface $Ax+By+Cz+D=0$, donde todas las coordenadas son números que pertenecen al cuerpo recién mencionado.[54] Hilbert concluye entonces que "en la geometría así definida los axiomas I y II, y también los axiomas de congruencia III, *son válidos*" (Hilbert 1898a, p. 338). El paso siguiente será mostrar que en este "modelo analítico" es posible que una recta contenga puntos en el interior y en el exterior de una circunferencia, pero que no

[54] En el caso de un punto y una recta en $\mathbb{R}^3$, un punto se define como la terna ordenada de números (x, y, z), y una recta como el conjunto de puntos que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D=0 \end{cases}$.

la corte en ningún punto; o en otras palabras, en una geometría así construía ILC no se cumple.

El argumento de Hilbert procede de la siguiente manera: supongamos que queremos construir un triángulo, cuyos lados tienen las longitudes 1, 1 y $\frac{\pi}{2}$. Consideremos además a la circunferencia definida por la ecuación $x^2+y^2=1$ y a la recta $x=\frac{\pi}{4}$. Es claro que esta recta contiene puntos dentro de la circunferencia – por ejemplo $(\frac{\pi}{4},0)$ – y puntos fuera de la circunferencia – por ejemplo $(\frac{\pi}{4},1)$. Luego, en la geometría analítica habitual[55], esta recta interseca a la circunferencia en los puntos $\left(\frac{\pi}{4},\pm\sqrt{1-(\frac{\pi}{4})^2}\right)$. Sin embargo, estos puntos *no existen* en el cuerpo de números algebraicos antes definido[56], de donde se sigue que el "modelo" contiene tres líneas que satisfacen la desigualdad del triángulo, pero a partir de las cuales ningún triángulo puede ser construido (figura 2.5). Hilbert concluye entonces que *i)* la propiedad de intersección de líneas y circunferencias (ILC) no se cumple en esta geometría y, por lo tanto, es *independiente* de los axiomas I—III; *ii)* TET *no es demostrable* sobre la base de los axiomas I–III.

Este ejemplo ilustra el modo en que, en este período inicial, Hilbert lleva a cabo sus investigaciones metageométricas, especialmente, las demostraciones de independencia. Esta técnica consistía en la construcción de distintos "modelos analíticos" de los axiomas geométricos, en donde varios grupos de axiomas se cumplían, pero una proposición o axioma determinado no era válido. Sin embargo, es importante aclarar que, aunque este procedimiento era claramente "modelo–teórico" *en espíritu*, en esta etapa temprana Hilbert estaba todavía atado a importantes limitaciones conceptuales, que impiden

[55] Con la expresión "geometría analítica habitual", Hilbert se refiere a la geometría analítica construida *sobre los números reales*.

[56] Hilbert no proporciona una demostración completamente elaborada, sino que simplemente esboza un razonamiento según el cual la prueba podría ser llevada a cabo. La idea general del argumento es la siguiente: Supongamos que el número $\sqrt{1-(\frac{\pi}{4})^2}$ se encuentra en el cuerpo pitagórico construido anteriormente. Puesto que el cuerpo es *minimal*, este número debería poder ser representado por una expresión formada por las cinco operaciones permitidas, partiendo de 1 y π. Hilbert designa a esta expresión $A(1,\pi)$. Ahora bien, si tomamos un número real t cualquiera, la expresión $A(1,t)$ debería poder representar siempre el elemento correspondiente $\sqrt{1-(\frac{t}{4})^2}$, que asimismo pertenecerá al cuerpo minimal construido a partir de 1 y t. Sin embargo, mientras que $A(1,t)$ siempre será un número real, es claro que $\sqrt{1-(\frac{t}{4})^2}$ no lo será necesariamente. Por ejemplo, sólo basta tomar un t lo suficientemente grande para que $\sqrt{1-(\frac{t}{4})^2}$ sea un número imaginario. Ello muestra entonces que $A(1,t)$ no podrá representarlo siempre. Luego, podemos concluir que el número $\sqrt{1-(\frac{\pi}{4})^2}$ no pertenece al cuerpo pitagórico minimal antes definido, puesto que no siempre puede ser representado por la expresión $A(1,\pi)$. Cf. (Hilbert 1898b, pp. 258–260) y (Hilbert 1898a, pp.338–339). Véase además (Hallett 2008, p. 248).

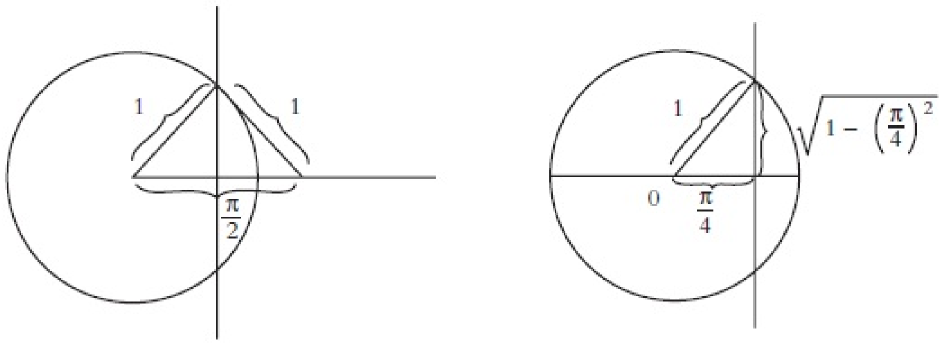


Figura 2.5.: Modelo en el que TET no se cumple (Hilbert 1898a, p. 338)

que esta identificación pueda ser trazada sin ciertos reparos.[57] Por otro lado, gracias al método axiomático formal de Hilbert, estas investigaciones metageométricas fueron llevadas a cabo por primera vez *de un modo preciso y sistemático*. Este hecho fue reconocido inmediatamente como una de las novedades y contribuciones más importantes de su trabajo. Un ejemplo elocuente lo representa su amigo y colega A. Hurwitz, quien bautizó a este nuevo campo de investigación inaugurado por Hilbert, la "matemática de los axiomas":

> He leído con enorme interés su nuevo tratado sobre geometría. Ud. ha abierto allí un inmenso campo de investigación matemática, que podría ser designado como "matemática de los axiomas" y que se extiende mucho más allá del dominio de la geometría.[58]

Por último, Hilbert reconoce que los estudios metageométricos se realizan sobre un sistema de axiomas abstractos, cuyas proposiciones no afirman *directamente* nada acerca de un dominio intuitivo concreto. Sin embargo, al mismo tiempo sostiene que este análisis todavía puede enseñarnos algo acerca de nuestra intuición del espacio y, por ello, en cierto sentido su análisis axiomático puede ser considerado como un "análisis lógico de nuestra facultad de la intuición" (Hilbert 1898a, p. 303). Afortunadamente, en estas notas encontramos más indicios respecto de cómo debe ser interpretada esta afirmación.

---

[57] Por lo general, estas limitaciones conceptuales no son reconocidas en la literatura. Una excepción es (Hallett 1995b) y (Demopoulos 1994). Abordaré este tema en el capítulo 6.

[58] Citado por (Toepell 1986, p. 257).

2.3.3. "Un análisis lógico de la intuición"

En la introducción de estas notas de clases (Hilbert 1898a), Hilbert caracteriza del siguiente modo su empresa de axiomatizar la geometría:

> Finalmente podemos referirnos a nuestra tarea como a un análisis lógico de nuestra facultad de la intuición [*Anschauungsvermögen*]; la cuestión de si nuestra intuición espacial es a priori, o tiene un origen empírico, permanecerá aquí sin discutir. (Hilbert 1898a, p. 303)

El papel que Hilbert le atribuye a la intuición en la práctica del método axiomático, hace que la pregunta filosófica acerca del estatus de esta intuición quede fuera de cuestionamiento. Del mismo modo, vemos anticipada aquí su afirmación de la introducción del *Festschrift*, considerada por lo general como una curiosidad, e incluso como una expresión inadecuada, en el contexto de su presentación axiomática formal de la geometría:

> La geometría necesita para su construcción lógica – del mismo modo que la aritmética – sólo unos pocos y simples hechos fundamentales. A estos hechos fundamentales se los denomina axiomas. El establecimiento de los axiomas de la geometría y la investigación de sus conexiones es una tarea que, desde Euclides, ha sido discutida en numerosos excelentes tratados de la literatura matemática. Esta tarea consiste en el análisis lógico de nuestra intuición espacial. (Hilbert 1899, p. 3)

Afortunadamente, Hilbert realiza en estos manuscritos una serie de reflexiones que aportan elementos valiosos para interpretar la controvertida afirmación. En primer lugar, una aclaración relevante es presentada inmediatamente a continuación del pasaje antes citado:

> A partir de lo dicho se esclarece la relación de este curso con aquellos sobre geometría analítica y geometría proyectiva (sintética). En ambas disciplinas las preguntas fundamentales no son tratadas. En la geometría analítica se comienza con la introducción del número; por el contrario nosotros habremos de investigar con precisión la justificación para ello, de modo que en nuestro caso la introducción del número se producirá al final. En la geometría proyectiva se apela desde el principio a la intuición, *mientras que nosotros queremos analizar la intuición, para reconstruirla, por decirlo de algún modo,*

> *en sus componentes particulares* [*einzelne Bestandteile*]. (Hilbert 1898a, p. 303. El énfasis es mío)

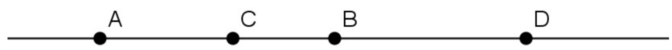
La temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert, que hemos analizado en este capítulo, aporta elementos relevantes para comprender mejor a qué se refiere este autor cuando afirma que su estudio axiomático (formal) de la geometría es al mismo tiempo un "análisis lógico de la intuición". A lo largo de sus notas de clases, Hilbert enfatiza constantemente que la intuición geométrica y la experiencia son las primeras fuentes de nuestro conocimiento geométrico, en gran parte en virtud de que nos proporcionan el conjunto de hechos básicos de la geometría, que sirve como punto de partida y guía para la axiomatización. Sin embargo, en tanto que un objetivo central de su abordaje axiomático formal es examinar los *fundamentos* de esta disciplina, la validez de esta fuente de conocimiento no puede ser presupuesta de antemano. Más bien, la tarea emprendida en el análisis axiomático formal consiste en explicitar e investigar *la estructura lógica* de ese conjunto de proposiciones (axiomas y teoremas) fundados en la intuición, pero de la cual la propia intuición geométrica no puede dar cuenta. Luego, es preciso enfatizar que, *al menos en esta etapa temprana*, Hilbert concibe su investigación axiomática (formal) de la estructura lógica de la geometría al mismo tiempo como *un 'análisis' de aquellas fuentes originales*, en tanto esta indagación descubre, por ejemplo, qué proposiciones son responsables de varias partes de nuestro conocimiento geométrico intuitivo. Es decir, aunque a través del método axiomático formal uno se posiciona en un nivel puramente conceptual, para Hilbert los resultados geométricos, y especialmente los metageométricos, alcanzados a través del análisis axiomático, conservan una relación con las *fuentes* de nuestro conocimiento geométrico, pues nos permiten aprender mucho respecto del *contenido* del conocimiento geométrico intuitivo. Un ejemplo muy interesante presentado por Hilbert en estas notas parece abonar esta interpretación.

En la sección II de (Hilbert 1898a) y (Hilbert 1898b), Hilbert introduce el grupo de axiomas de orden, conformado por cuatro axiomas lineales y un quinto axioma que determina las relaciones de orden en el plano:

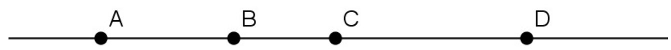
1. Si A, B, C son puntos de una línea, y C se encuentra entre A y B, entonces C se encuentra también entre B y A.

2. Si A, B son puntos de una línea, entonces existe siempre al menos un punto C, que está entre A y B, y al menos un punto D, de modo que B está entre A y D.

3. Dados tres puntos cualesquiera de una línea, siempre hay uno y sólo uno de ellos que se encuentra entre los otros dos.



4. Cuatro puntos A, B, C, D cualesquiera de una línea pueden ser siempre ordenados de tal modo, que B se encuentra entre A, C y entre A, D; y además C está entre A, D y entre B, D.



5. Toda línea a, que se encuentra en un plano α, separa a los puntos de ese plano α en dos regiones, según la siguiente propiedad: un punto cualquiera A de una región determina, junto a otro punto cualquiera B de la otra región, un segmento $\overline{AB}$, dentro del cual se encuentra un punto de la línea a; por el contrario, dos puntos cualesquiera A y B del misma región determinan un segmento $\overline{AB}$, el cual no contiene ningún punto de la línea a.[59]

Este quinto axioma permite probar fácilmente el famoso "axioma de Pasch", que como vimos Hilbert incluye directamente en (Hilbert 1894), y luego en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*. Una vez enunciados los axiomas de orden, Hilbert demuestra una serie de teoremas básicos y, a continuación, investiga las propiedades "metalógicas" de los axiomas, a saber: la consistencia del grupo y la independencia de algunos de los axiomas. Ello constituye una diferencia importante respecto del *Festschrift* (Hilbert 1899), ya que allí Hilbert se limita a demostrar una serie de teoremas, consecuencias de este grupo de axiomas, y prosigue de inmediato con el grupo de axiomas de congruencia, obviando las investigaciones metateóricas. Hilbert afirma entonces que el grupo formado por los cuatro primeros axiomas – los axiomas lineales – es consistente, es decir, que los axiomas no se contradicen entre sí. La demostración se basa en la construcción de un "modelo aritmético". Más precisamente, Hilbert señala que si interpretamos los puntos de una línea como números reales positivos y negativos, y afirmamos que el punto β se encuentra entre α y γ en el caso de que:

[59] (Hilbert 1898b, pp. 227–241) y (Hilbert 1898a, pp. 307–319).

$$\alpha < \beta < \gamma \text{ ó } \alpha > \beta > \gamma,$$

entonces vemos fácilmente que las condiciones establecidas en los axiomas 1–4 se cumplen.[60] En cuanto a la independencia, los axiomas 1–4 son independientes del grupo de axiomas I (los axiomas de incidencia), puesto que este último grupo no afirma nada acerca de la relación de los puntos de una línea entre sí. Asimismo, Hilbert señala que es posible demostrar que el axioma 4 no es una consecuencia de los axiomas 1–3, o sea, que el axioma 4 es independiente respecto de los axiomas 1–3. La demostración que propone es la siguiente: representemos los puntos A, B, C, a través de los números reales α, β, γ respectivamente. Además afirmamos que: C se encuentra entre A y B, sí y sólo sí $\gamma > \alpha$ y $\gamma > \beta$ (en otras palabras, el punto C se encuentra 'detrás' o a la derecha de A y B). Luego, es evidente que dada esta definición, los axiomas 1–3 son válidos pero el axioma 4 no. Pues si tomamos el orden de cuatro puntos sobre una línea en el sentido del axioma 4, entonces debe cumplirse que:

$$\beta > \alpha, \beta > \gamma, \beta > \delta$$

y al mismo tiempo que:

$$\gamma > \alpha, \gamma > \beta, \gamma > \delta,$$

lo cual sin embargo es contradictorio.[61] Hilbert ilustra una vez más con un simple ejemplo el procedimiento típico utilizado para realizar las pruebas de independencia de los axiomas geométricos por medio de la construcción de 'modelos' aritméticos. Mas la conclusión que de allí extrae es sumamente interesante:

> 'Entre' es antes que nada una relación de un punto con otros dos, y recibe un contenido a través de los axiomas. Si se quiere recién entonces se puede utilizar la palabra 'entre'. Pero no por ello debe pensarse que nuestras investigaciones son superfluas. *Más bien ellas son un análisis lógico de nuestra facultad de la intuición.* (Hilbert 1898b, p. 230. El énfasis es mío).

En un sentido estricto, estas investigaciones son un análisis lógico de los *axiomas*, no de la intuición. Sin embargo, lo que sugieren estos ejemplos es, en mi opinión, una clara posición anti–formalista de Hilbert en su análisis axiomático de la geometría, que debe ser entendida del siguiente modo: el interés de realizar un análisis axiomático formal

[60] Cf. (Hilbert 1898b, p. 229).
[61] Cf. (Hilbert 1898b, p. 229) y (Hilbert 1898a, p. 310).

de la geometría, y en particular de la geometría euclídea, es ofrecer una descripción matemáticamente exacta y completa de la *estructura lógica* de esta teoría matemática, i.e., de cuáles son los principios fundamentes que deben ser postulados para construir esta teoría y de las relaciones lógicas de los axiomas entre sí y también con los teoremas fundamentales. Pero para Hilbert ello significa que, en tanto que la geometría elemental se funda en gran parte en nuestra intuición espacial, el examen axiomático proporciona un conocimiento de las propiedades lógicas de los hechos intuitivos fundamentales que están en la base de la geometría, y en ese sentido, *de la intuición*. En otras palabras, dado que la intuición geométrica y la experiencia son las primeras fuentes del conocimiento geométrico, Hilbert considera en este período inicial que su examen axiomático de la geometría euclídea es, al mismo tiempo, un *análisis de estas fuentes originales de conocimiento*, pues revela, entre otras cosas, qué proposiciones son las responsables de varias de las partes centrales de nuestro conocimiento geométrico intuitivo.

Hilbert concibe así el análisis axiomático formal como una suerte de reconstrucción racional o conceptual, que arroja un sistema abstracto de axiomas cuyas propiedades "meta–lógicas" son conocidas a través del procedimiento de modelar o reinterpretar, que en sí mismo supone el abandono de toda interpretación intuitiva *fija*. Por lo tanto, para analizar la intuición geométrica debemos ir más allá de ella o abandonarla. Sin embargo, los resultados metageométricos alcanzados de esta forma conservan todavía, para Hilbert, un vínculo con los hechos básicos de la intuición, en tanto que contribuyen notablemente a esclarecer el *contenido* del conocimiento geométrico intuitivo. En este sentido, el método axiomático *qua* análisis lógico de la intuición no es incompatible con la idea, sino que más bien la implica, de que diversos axiomas cuya certeza intuitivo–empírica no es evidente sean postulados. Empero, el modo en que Hilbert define el objetivo fundamental del método axiomático hace que las interpretaciones formalista radical y deductivista resulten inadecuadas. Particularmente, la interpretación según la cual la finalidad de un análisis axiomático es el estudio de las consecuencias que pueden obtenerse deductivamente de un conjunto de principios *arbitrariamente elegidos*, y sin ningún sentido intrínseco, oculta casi por completo el interés y el provecho que Hilbert vislumbra, en este período temprano, en un abordaje axiomático formal a la geometría.

Por otra parte, que el examen axiomático constituya un análisis lógico de la intuición, es decir, que por ejemplo pueda mostrarnos que el grupo de axiomas de orden – que según Hilbert "expresan hechos fundamentales de nuestra intuición" (Hilbert 1899, p. 4) – está conformado por un conjunto de axiomas *independientes* entre sí, no significa de ningún modo que el sistema axiomático propuesto debe ser considerado como una descripción directa o inmediata de un determinado dominio intuitivo dado:

> En cierto modo hemos dado en este curso una teoría geométrica; deseamos ahora hacer una observación acerca de la aplicación de esta teoría a la realidad. Las proposiciones geométricas nunca son válidas en la naturaleza con completa exactitud, porque los axiomas nunca son satisfechos [*erfüllt*] por los objetos. Esta carencia en la correspondencia reside en la esencia de toda teoría, pues una teoría, que se corresponda hasta en el más mínimo detalle con la realidad, sería sólo una descripción exacta del objeto. (Hilbert 1898a, p. 391)

O del mismo modo, según observa Hilbert en la otra versión de este curso de 1898/1899:

> En la esencia de toda teoría reside [el hecho] de que ella no se cumple con exactitud en la experiencia. Pues en ese caso sólo seríamos capaces de describir los hechos empíricos singulares [*einzelnen Erscheinungstatsache*]. Se dice entonces a menudo que la teoría sería falsa. Pero ello sólo ocurre cuando [sus afirmaciones] son contradictorias entre sí. (Hilbert 1898b, p. 283)

Tal como lo había hecho antes en 1894, Hilbert reconoce que las distintas interpretaciones empíricas que pueden proponerse del sistema axiomático formal para la geometría sólo pueden tener un carácter *aproximativo*. Ello significa que el "esquema o entramado de conceptos", que es el resultado de la axiomatización, no puede estar de ningún modo limitado por lo que a primera vista parece estar empírica o intuitivamente justificado. En otras palabras, en tanto que la teoría geométrica formal no se refiere de un modo directo a la realidad [*Wirklichkeit*], no puede decirse que una interpretación particular del sistema axiomático debe ser privilegiada por sobre otras. Por el contrario, para Hilbert, la geometría puede aprender de la intuición, la observación y de la investigación empírica, pero no debe ser su esclava, incluso cuando la intuición juegue un rol decisivo en el establecimiento del conjunto de hechos que constituyen el dominio básico de la geometría. Dicho de otro modo, aunque en las investigaciones geométricas nos vemos guiados constantemente por la intuición geométrica y nos planteamos preguntas y problemas sugeridos por la intuición, al final *es el análisis axiomático formal el que instruye a la intuición, no al revés*. Y en definitiva, el hecho de que la intuición geométrica requiera de un análisis axiomático formal, se explica en razón de que Hilbert no la considera una fuente *segura* o totalmente fiable de conocimiento geométrico.

Resumiendo lo expuesto en este capítulo, Hilbert adopta por primera vez en 1893/94 una perspectiva axiomática para investigar el problema de los fundamentos de la geometría. Este abordaje axiomático constituyó una de las primeras instancias históricas del método axiomático formal. Hilbert afirma allí que los conceptos primitivos y proposiciones básicas de su teoría geométrica no se refieren al espacio físico, sino que conforman un "entramado de conceptos" – o en términos más actuales, una estructura relacional – que puede recibir distintas interpretaciones, ya sea dentro de otras teorías matemáticas o físicas, como aplicaciones empíricas. Asimismo, esta nueva concepción formal del método axiomático estuvo acompañada por un punto de vista empirista respecto de la geometría, de acuerdo con el cual los hechos básicos que constituyen la base de nuestro conocimiento geométrico provienen de la experiencia y de una suerte de "intuición geométrica". La geometría es así definida como "la ciencia natural más completa", y la función del método axiomático formal es precisamente transformarla en una teoría matemática pura. Luego, ambos aspectos fueron profundizados y completados en un segundo curso dedicado a los fundamentos de la geometría, dictado en el semestre de invierno de 1898/1899, que sirvió como una referencia central en la elaboración de la primera edición de *Fundamentos de la geometría*. Sin embargo, este nuevo curso incorpora, como una novedad, el componente quizás más original de su abordaje axiomático a la geometría: las investigaciones metageométricas. Hilbert investiga allí las propiedades "metalógicas" de los axiomas – principalmente la independencia, pero también la consistencia – y sus conexiones con los teoremas fundamentales, utilizando el procedimiento de la construcción de "modelos" (analíticos) de los axiomas geométricos. Hilbert consigue en este curso numerosos resultados de independencia, muchos de los cuales no serán después incluidos en el *Festschrift*. Sin embargo, junto con esta novedosa perspectiva metateórica, Hilbert defiende una posición anti–formalista, que entiende que el resultado de las investigaciones axiomáticas formales conserva todavía un significado para nuestra "intuición geométrica", a saber: contribuye a esclarecer el *contendido* del nuestro conocimiento geométrico intuitivo.

CAPÍTULO 3

'Una imagen de la realidad geométrica'

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es indagar una serie de referencias textuales, introducidas por Hilbert en sus notas de clases manuscritas, a la célebre *Bildtheorie* de Heinrich Hertz. Sostendré que estas referencias resultan muy esclarecedoras respecto de una cuestión central para la interpretación de su concepción axiomática de la geometría, a saber: cómo entiende y explica Hilbert la relación entre el esquema de conceptos o estructura relacional producto de la axiomatización formal y el conjunto de hechos geométricos fundados en la intuición, que según afirma conforma el acervo fundamental sobre el que se erige nuestro conocimiento geométrico. En particular, en este capítulo argumentaré que estas referencias a la *Bildtheorie*, esgrimida por Hertz en su importante libro *Prinzipien der Mechanik* (Hertz 1894), resultan muy significativas para comprender el espíritu con el cual Hilbert aborda, a partir de 1894, la empresa de axiomatizar la geometría. Más precisamente, afirmo que las referencias a la *Bildtheorie* ilustran elocuentemente el proceso bajo el cual Hilbert transforma la ciencia natural de la geometría, con su contenido empírico factual, en una teoría matemática pura.

El capítulo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, en la sección 3.2, presento y analizo las referencias de Hilbert (1894; 1898a;b; 1902c) a la *Bildtheorie*. Estas referencias aluden principalmente a dos cuestiones: por un lado, a la afirmación de Hilbert de que su axiomatización de la geometría equivale a presentar una "imagen [*Bild*] de la realidad geométrica", en el sentido definido por Hertz; por otro lado, a la observación de Hilbert, según la cual *Bildtheorie* de Hertz ilustra elocuentemente su nueva concepción de los axiomas de la geometría. A continuación, en la sección 3.3, expongo sintéticamente las ideas principales de teoría pictórica de las teorías científicas de Hertz, con la finalidad de trazar una comparación con el modo en que Hilbert concibe su nuevo abordaje axiomático formal a la geometría. En las tres secciones siguientes me ocupo entonces de llevar a cabo esta comparación, en función de los siguientes puntos: *a)* los requerimientos establecidos por Hertz para las imágenes de la mecánica (permisibilidad lógica, corrección y adecuación) y el modo en que Hilbert concibe tempranamente los criterios de adecuación de un sistema axiomático (consistencia, independencia, completitud y simplicidad) (3.4); *b)* las nociones de 'axioma' de la geometría en Hilbert y 'principio' de la mecánica en Hertz (3.5); *c)* las nociones y la utilización de 'elementos ideales' en Hilbert y de 'masas invisibles u ocultas' [*verbogene Masse*] en la presentación de la mecánica de Hertz (3.6). Finalmente, en la sección (3.7) sostengo que la comparación llevada a cabo entre la *Bildtheorie* y la temprana concepción del método axiomático de Hilbert permite concluir que: i) el empirismo de Hilbert respecto de la geometría se circunscribe, en esta etapa temprana, a la afirmación de que la geometría es una ciencia natural *exclusivamente en cuanto a su origen*; ii) las interpretaciones formalista radical[1] y deductivista[2] no describen correctamente la temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert.

3.2. "Una imagen de la realidad geométrica"

La obra central de Hertz, *Principios de la mecánica*, apareció publicada póstumamente en 1894, aproximadamente seis meses después de su prematura muerte. No es quizás un hecho menor que las primeras referencias de Hilbert a la *Bildtheorie*, se encuentran en las notas para el curso sobre geometría que impartiera ese mismo año. En esta primera cita, Hilbert vincula sus axiomas para la geometría euclídea elemental con las "imágenes" [*Bilder*] de Hertz:

> El axioma corresponde a una observación, como puede verse fácilmente en las esferas, reglas y superficies de cartulina [*Pappdeckeln*]. Sin embargo, estos hechos de la experiencia son tan simples, tan a menudo observados por todos y por ello mismo tan conocidos, que el físico no necesita demostrarlos posteriormente en el laboratorio. No obstante, el origen [se sigue] de la experiencia. Los axiomas son, como diría Hertz, imágenes [*Bilder*] o símbolos en nuestra mente, de manera que las consecuencias de las imágenes son imágenes de las consecuencias, esto es, lo que deducimos lógicamente de las

[1] Cf. introducción, sección 0.2.1.
[2] Cf. introducción, sección 0.2.2.

> imágenes también vale en la naturaleza. (Hilbert 1894, p. 74. El énfasis es mío)

En la primera parte de este pasaje Hilbert destaca el origen empírico de los axiomas de la geometría; en la segunda parte, empero, cita de memoria el criterio fundamental establecido por Hertz para las imágenes o representaciones científicas. Es interesante señalar que, aunque Hilbert resalta el origen empírico de los axiomas de la geometría, sostiene que éstos deben ser considerados como las *Bilder* de Hertz, i. e., como imágenes o representaciones *intelectuales*. Ello sugiere que, el modo en que Hertz entiende la relación entre los principios básicos de la mecánica y los fenómenos, puede ser significativo en el caso de una concepción axiomática de la geometría como la que Hilbert intenta desarrollar. De hecho, así lo declara explícitamente: “Cada uno de estos axiomas se corresponde con un hecho de observación (...). Acerca de la relación entre axiomas y hechos véanse las bellas explicaciones en Hertz, Principios de la mecánica” (Hilbert 1898a, p. 305). La cuestión central es así la siguiente: si bien es posible sostener que los principios de la mecánica tienen un origen empírico, en tanto axiomas de una teoría física no deben guardar necesariamente una relación de correspondencia *directa* con los hechos empíricos básicos. Hilbert encuentra estas ideas fácilmente aplicables a la geometría, dado que en cuanto a su origen ésta se encuentra más cerca de la mecánica, que de la aritmética o el análisis.

Asimismo, como anticipamos en el capítulo anterior, en su primer abordaje axiomático a la geometría en 1894, Hilbert alude al concepto de “imagen” [*Bild*] de Hertz, al momento de describir la tarea que se propone llevar a cabo:

> El problema de nuestro curso versa así: cuáles son las condiciones *necesarias, suficientes* e independientes entre sí, que deben establecerse en un sistema de cosas, para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico, e inversamente, para que por medio del mencionado sistema de cosas sea posible una *descripción completa u organización* de todos los hechos geométricos; o para que nuestro sistema se convierta en una imagen [*Bild*] de la realidad geométrica. (Hilbert 1894, p. 73)

Esta utilidad de la teoría pictórica para comprender su nueva empresa axiomática es repetida por Hilbert, de un muy modo similar, en el curso siguiente que dedica a la geometría (Hilbert 1898a;b); sin embargo, en esta oportunidad Hertz es mencionado explícitamente:

> Empleando una expresión de Hertz (en la introducción a los "Principios de la mecánica"), podemos formular nuestra pregunta principal como sigue: ¿cuáles son las condiciones necesarias, suficientes e independientes entre sí, que deben establecerse respecto de un sistema de cosas [*System von Ding*][3], para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico, e inversamente, para que también estas cosas sean una "imagen" [*Bild*] completa y simple de la realidad geométrica? (Hilbert 1898a, p. 303. Énfasis en el original.)

Por último, es dable mencionar que Hilbert no sólo se refirió de la misma manera a Hertz en otros cursos sobre geometría pertenecientes a esta "etapa geométrica"[4], sino que además tuvo la oportunidad de aludir nuevamente en un curso muy posterior, dictado en 1927. Ello demuestra que mantuvo su opinión respecto de las coincidencias entre sus abordaje axiomático a la geometría y la presentación de la mecánica clásica llevada a cabo por Hertz. La referencia que hace Hilbert en este curso bien posterior es la siguiente:

> Vamos a aplicar el método axiomático a la ciencia natural más completa, *la geometría*, en donde también tuvo lugar por primera vez el método axiomático en su forma clásica. El interrogante es: ¿Cuáles son los postulados necesarios e independientes entre sí, a los que debemos someter a un sistema de cosas, para que cada propiedad de estas cosas se corresponda con un hecho geométrico; y a la inversa, cómo debemos construirlo, para que estas cosas sean una *imagen completa de la realidad geométrica*? (Hilbert 1927, p.1)

Hilbert afirma, en diversas oportunidades, que el objetivo de su abordaje axiomático es ofrecer una imagen [*Bild*] de la geometría, en el sentido explicitado por Hertz en su introducción a *Principios de la mecánica* (1894). Los elementos de la imagen son un sistema de 'objetos' [*Dinge*], que describirá más tarde como 'objetos del pensamiento' [*Gedankendinge*], para aclarar que los 'puntos', 'líneas' y 'planos' pertenecen a un nivel exclusivamente conceptual, y por lo tanto deben ser diferenciados de los 'puntos', 'líneas' y 'planos' reales o de la intuición. La 'realidad geométrica', con la que el sistema de objetos debe coincidir, es el conjunto de hechos geométricos [*geometrische Tatsachen*]. Hilbert nunca aclara de un modo definitivo qué es lo que entiende por hecho geométrico; sin embargo, es posible especular lo siguiente en función de cómo emplea la expresión en lo sucesivo. Con ella no quiere aludir principalmente a los hechos empíricos

[3] Sobre el uso de Hilbert de los términos "sistema" [*System*] y "cosas" [*Ding*], véase el capítulo anterior.
[4] Declaraciones similares se encuentran en (Hilbert 1902c, p. 541).

que estarían en la base de la geometría, sino más bien al conjunto de conocimientos o "verdades geométricas" que se han llegado a reconocer y aceptar generalmente por medio de la acumulación de demostraciones. En definitiva, considerando que lo que se intenta reconstruir axiomáticamente es la geometría euclídea elemental, podría decirse que la "realidad geométrica" es el acervo de conocimientos, con una fuerte base intuitiva, conseguidos por esta disciplina en una etapa más bien acrítica o intuitiva. En efecto, en una conferencia correspondiente a este período, Hilbert distingue tres períodos, clara y fácilmente reconocibles, en el desarrollo de toda teoría matemática: el acrítico o intuitivo, el formal y el crítico. Se sigue de suyo que el método axiomático se identifica con el período crítico.[5]

Las referencias textuales a la *Bildtheorie* de Hertz resultan así muy significativas para comprender el espíritu con el cual Hilbert aborda la empresa de axiomatizar la geometría a partir de 1894. Es decir, por un lado, la alusión a la teoría pictórica de Hertz permite identificar la raíz de algunas de las ideas que caracterizan el modo en que Hilbert entendía la tarea de llevar a cabo una axiomatización de la geometría; por otro lado, esta indicación pone en evidencia la distancia que guarda la posición de Hilbert con un empirismo extremo, el cual exige que cada concepto o término básico tenga un correlato empírico. Este requisito es reemplazado por el criterio metodológico que postula que, a partir de los principios básicos, debe ser posible obtener todas las proposiciones y teoremas que conforman el dominio en cuestión. Todo ello siguiendo la pauta que establece que el sistema debe carecer de contradicciones y ser lo más *lógicamente claro* y *simple* posible. En definitiva, la referencia a la *Bildtheorie* de Hertz sin dudas ilustra elocuentemente el proceso bajo el cual Hilbert transforma la ciencia natural de la geometría, con su contenido empírico factual, en una teoría matemática pura.

Dados los objetivos del presente capítulo, será pertinente ofrecer una breve descripción de la propuesta de Hertz.

3.3. La *Bildtheorie* de Heinrich Hertz

Se suele conocer a Heinrich Hertz por dos contribuciones principales. En primer lugar, por sus experimentos en el campo del electromagnetismo que lo llevaron, entre 1886 y 1888, al descubrimiento de las ondas electromagnéticas (ondas de radio), permitiéndole alcanzar una confirmación experimental de la teoría de Maxwell. En segundo lugar, por

[5] Véase (Hilbert 1896, p. 383). Este texto corresponde a una conferencia que fue leída por Felix Klein, en nombre de Hilbert, en el *International Congress of Mathematicians*, que tuvo lugar en Chicago en 1893.

su teoría pictórica de las teorías científicas como 'imágenes' [*Bilder*] o representaciones intelectuales, i.e., su célebre *Bildtheorie*. Particularmente esta última ha sido del interés y objeto de estudio de los filósofos de la ciencia y del lenguaje, pues se reconoce su influencia en diversas posiciones filosóficas del siglo XX, por ejemplo, en el *Tractatus* de Wittgenstein.[6]

Hertz presenta por primera vez en 1884 un esbozo de su teoría pictórica en una serie de conferencias en Kiel, editadas más de un siglo después bajo el titulo: *La constitución de la materia* (Hertz 1999). Sin embargo, la exposición más detallada se encuentra en la introducción, de carácter filosófico, de su obra *Principios de la mecánica presentados en una nueva forma* (Hertz 1894). Hertz afirma allí que la tarea más importante que se impone a nuestro conocimiento de la naturaleza consiste en la anticipación de sucesos futuros, de manera que nos permita adaptar nuestras acciones en función de esas anticipaciones. Para dar solución a este problema, realizamos inferencias con base en el conocimiento que hemos acumulado en virtud de sucesos pasados. Ahora bien, este proceso reviste siempre la siguiente forma:

> Creamos para nosotros imágenes intelectuales [*innere Scheinbilder*] o símbolos de los objetos externos; y ello lo realizamos de tal modo que, las consecuencias necesarias de las imágenes en el pensamiento siempre sean imágenes de las consecuencias necesarias en la naturaleza de los objetos representados. Para que este requerimiento sea cumplido, debe existir una cierta correspondencia entre la naturaleza y nuestra mente [*Geist*]. (Hertz 1894, p. 1)

Las imágenes o representaciones mentales de las que habla Hertz no son representaciones o copias de los objetos externos en el papel, en el lienzo, etc. Por el contrario, estas imágenes son representaciones internas o "intelectuales". Ello significa que la semejanza o parecido que estas imágenes o símbolos deben mantener con los objetos representados se limita al requerimiento básico recién mencionado: las consecuencias de las imágenes en el pensamiento deben ser a su vez imágenes de las consecuencias en la naturaleza. Las *Bilder* de Hertz no pretenden informarnos nada acerca de la "esencia" de los objetos o fenómenos externos, de cómo éstos son en sí:

> Las imágenes, de las que aquí hablamos, son nuestras representaciones [*Vorstellungen*] de las cosas. Con las cosas mantienen una única correspondencia

[6] La *Bildtheorie* ha sido objeto recientemente de numerosos estudios. Entre éstos se destacan (Baird y Hughes 1998) y (Lützen 2005).

> esencial, que consiste en el cumplimiento del requerimiento arriba mencionado. Sin embargo, para su finalidad no es necesario que las imágenes mantengan con las cosas otra correspondencia ulterior. En efecto, no sabemos ni tenemos medios para saber si nuestras representaciones guardan alguna otra relación con las cosas, más allá de aquel requerimiento fundamental. (Hertz 1894, p. 2)

Schiemann (1998), Heidelberger (1998) y Lützen (2005) – entre otros – han advertido que la teoría pictórica de Hertz está inspirada, en gran medida, en la "teoría de los signos" [*Zeichentheorie*] de su mentor Hermann von Helmholtz.[7] Resultará útil entonces, para presentar una idea un poco más precisa de la noción de "imagen" de Hertz, que mencionemos muy brevemente algunos puntos principales de la teoría de Helmholtz.

Como es bien sabido, Helmholtz desarrolló una teoría que intenta explicar cómo nuestra mente se forma signos o símbolos de las cosas u objetos externos. En base a sus investigaciones en el campo de la fisiología de la percepción, Helmholtz sostuvo que estamos incapacitados para probar una correspondencia entre las propiedades de nuestras sensaciones y las propiedades de las cosas que son objeto de nuestras sensaciones. Es por ello que es conveniente afirmar que nuestras sensaciones son signos o símbolos [*Zeichen*] de las cosas externas, y no copias [*Abbilder*] que mantienen algún grado de semejanza o similaridad. Esta teoría de Helmholtz, que busca describir el proceso por medio del cual creamos o formamos tales signos a partir de la experiencia sensorial, sufrió diversos cambios a lo largo del tiempo.[8] En este sentido, resulta más pertinente, en función de nuestros objetivos, que nos refiramos al modo en que Helmholtz concibió *la naturaleza* de estos signos. Puntualmente, en este respecto una fuente muy interesante se encuentra en su artículo "Los hechos de la percepción" de 1878, en donde resume su posición de la siguiente manera:

> En verdad, nuestras sensaciones son efectos producidos en nuestros órganos por causas externas, y el modo en que estos efectos se expresan naturalmente a sí mismos depende esencialmente del tipo de aparato sobre el cual el efecto es producido. En la medida en que la cualidad de nuestra sensación nos da un testimonio del carácter de la influencia externa por medio de la

[7] Otra influencia importante en la *Bildtheorie* de Hertz fueron las ideas de Maxwell acerca del razonamiento por analogía y la descripción de los modelos mecánicos. Sobre este punto puede consultarse D'Agostino (2000).

[8] Mientras que en una primera instancia Helmholtz sostuvo que este proceso estaba basado en una ley *a priori* de causalidad, posteriormente defendió que se apoyaba en la presuposición de la *legalidad* de todos los fenómenos de la naturaleza. Véase Friedman (1997).

> cual es excitada, éste debe ser tomado como un signo [*Zeichen*] de aquella, y no como una copia [*Abbild*]. Puesto que de una copia se requiere algún tipo de semejanza con el objeto del cual es una copia – de una estatua se pide un parecido en la forma, de un dibujo una semejanza en la proyección de la perspectiva en el campo visual, de una pintura una similitud de los colores. Pero un signo no necesita tener ningún tipo de semejanza con aquello de lo que es un signo. La relación entre ellos dos se circunscribe al hecho de que así como objetos iguales que ejercen una influencia en circunstancia semejantes evocan signos iguales, así también signos diferentes siempre se corresponden con influencias diferentes. (Helmholtz 1977, p. 121–122)

Una de las tesis centrales de la teoría de Helmholtz consiste en afirmar que los signos, que son o están en lugar de nuestras sensaciones, no necesitan parecerse a los objetos que simbolizan, de la misma manera en que los nombres propios del lenguaje natural no necesitan asemejarse a sus objetos. Por el contrario, es por medio de la experiencia que aprendemos a interpretar estos signos. Asimismo, en su tratado sobre la fisiología de percepción, Helmholtz plantea ideas muy similares a las que un poco más tarde propondrá Hertz:

> Por lo tanto creo que no puede haber ningún sentido posible en hablar de la verdad de nuestras representaciones, sino únicamente en un sentido práctico. Nuestras representaciones de las cosas no son nada más que símbolos, signos dados naturalmente de las cosas, que aprendemos a utilizar para la reglamentación de nuestros movimientos y acciones. Cuando hemos aprendido a leer correctamente aquellos símbolos, entonces estamos en condiciones de disponer con su ayuda nuestras acciones, de manera que ellos tengan el resultado esperado, i.e., que las nuevas sensaciones ocurran. Otra comparación entre las representaciones y las cosas no sólo no tiene lugar en la realidad – en ello todas las escuelas concuerdan – sino que otro tipo de comparación no es siquiera pensable y carece absolutamente de sentido. (Helmholtz 1867, p. 443)[9]

El concepto de "imagen" [*Bild*] de Hertz coincide en varios aspectos con la noción de "signo"[*Zeichen*] en Helmholtz. En particular, el modo en que éste piensa las relaciones entre las sensaciones y los signos es muy similar al requerimiento fundamental de las

[9] Citado también en (Friedman 1997). Una exposición extensa de la teoría empirista de Helmholtz puede encontrarse en la segunda edición de (Helmholtz 1867, §26).

imágenes establecido más tarde por Hertz. Asimismo, la afirmación de Helmholtz de que sólo nos es lícito hablar de una concordancia entre nuestras representaciones y las cosas en este respecto, coincide con la aseveración de Hertz de que sólo podemos exigir una conformidad entre las imágenes y la naturaleza en lo que toca al requerimiento básico. Sin embargo, existen también diferencias importantes en las posiciones de ambos autores. La más relevante para nuestro caso consiste en que Hertz profundiza la separación entre las imágenes y lo representado, al sostener que existen diversas imágenes correctas y lógicamente admisibles de una misma parte del mundo exterior.[10] Por el contrario, para Helmholtz sólo existe una única imagen correcta del mundo exterior:

> De este modo las representaciones del mundo exterior son imágenes [*Bilder*] de la sucesión temporal legaliforme de los sucesos naturales, y si son correctamente formadas de acuerdo con nuestra leyes del pensamiento, y si además somos capaces de trasladarlas nuevamente a la realidad a través de acciones, entonces las representaciones con las que contamos son también *las únicas verdaderas* para nuestro pensamiento; todas las demás serán falsas. (Helmholtz 1867, p. 22)[11]

Por otro lado, aunque Hertz reconoce que su imagen de la mecánica no es la única posible, y por lo tanto es posible que existan diversas imágenes correctas de los objetos externos, establece una serie de requerimientos para las imágenes, que permiten su comparación y la evaluación de su pertinencia. Éste es precisamente uno de los primeros puntos de contacto con la concepción axiomática de Hilbert.

3.4. Criterios de las imágenes y condiciones de adecuación de los sistemas axiomáticos

El cumplimiento del requerimiento fundamental postulado no garantiza, no obstante para Hertz, que las imágenes que nos formamos de los objetos o fenómenos externos no estén dotadas de cierto grado de vaguedad e imprecisión. Por ello establece tres famosos criterios, en función de los cuales es posible evaluar y comparar las diferentes imágenes disponibles de las teorías: admisibilidad o permisibilidad lógica [*logisch Zulässigkeit*], corrección [*Richtigkeit*] y adecuación [*Zweckmässigkeit*]. Estos criterios constituyen un primer punto de contacto con la concepción axiomática hilbertiana, en tanto guardan

[10] En este punto es posible percibir además la influencia en Hertz del llamado pluralismo teórico de Maxwell. Véase D'Agostino (2000).

[11] Citado en (Lützen 2005, p. 86).

muchas similitudes con las condiciones de adecuación que impone a sus sistema axiomáticos.[12]

El primer criterio, denominado permisibilidad lógica [*logisch Zulässigkeit*], es caracterizado de la siguiente manera:

> Consideraremos de antemano como inadmisibles aquellas imágenes que conllevan en sí una contradicción con las leyes de nuestro pensamiento y exigiremos, en primer lugar, que todas nuestras imágenes sean lógicamente permisibles o, brevemente, permisibles. (Hertz 1894, p. 2)

Hertz le confiere una importancia vital a este criterio de permisibilidad o admisibilidad lógica, que consiste en que la imagen propuesta no contenga, ni pueda conducir a contradicciones. No sólo este requerimiento es puesto en primer lugar, sino que además Hertz lo identifica como la condición más fundamental que una imagen de la mecánica debe satisfacer:

> En primer lugar, en lo que respecta a la permisibilidad lógica de la imagen examinada, creo que ella misma satisface los requerimientos más estrictos, y confío que esta opinión encontrará aceptación. Le confiero al mérito de esta representación la mayor importancia, de hecho una importancia única. Si la mencionada imagen es más apropiada que otra, si es capaz de abarcar toda la experiencia futura; incluso si abarca toda la experiencia presente, todo ello lo considero prácticamente nada frente a la cuestión de si ésta es en sí consistente, completa y pura. (Hertz 1894, p. 39)

La permisibilidad lógica de una imagen es algo que puede ser determinado *a priori*. Ello se debe a que las leyes mismas del pensamiento tienen, para Hertz, un carácter *a priori*. Éste es precisamente uno de los puntos en el que Hertz adoptada ciertos principios de la teoría del conocimiento kantiana[13]:

> Aquello que determina que las imágenes sean permisibles viene dado por la naturaleza de nuestra mente [*Geist*]. Si una imagen es permisible o no, lo podemos decidir sin ambigüedad, y nuestra decisión será válida para todos los tiempos. (Hertz 1894, p. 3)

[12] En sus propias notas para el curso de 1898, Hilbert menciona a los criterios de las imágenes de Hertz, luego de introducir los axiomas de enlace: "[Para] la presentación clásica de Hertz respecto de los requerimiento de una buena imagen, véase *Mechanik*, pp. 1–4" (Hilbert 1898b, p. 225).

[13] Sobre la presencia de algunas tesis kantianas en las ideas epistemológicas de Hertz, véase (Hyder 2003).

Sin embargo, a pesar de la confianza que Hertz deposita en la posibilidad de determinar si una imagen está libre de contradicciones, no especifica en cambio ningún procedimiento (formal) por medio del cual sea posible demostrar la ausencia de contradicciones. Más bien, Hertz sugiere que una mera inspección de la imagen basta para revelar sus posibles contradicciones con las leyes del pensamiento.

El criterio de permisibilidad o admisibilidad lógica se asemeja sin dudas al requerimiento de *consistencia* de un sistema axiomático, exigido por Hilbert como la propiedad más fundamental que todo sistema de axiomas debe cumplir. Como hemos visto, la importancia crucial de esta propiedad es una consecuencia de su nueva concepción formal del método axiomático, rasgo reconocido por el propio Hilbert al menos desde 1894.[14] Sin embargo, el problema de la consistencia comenzará a ser asociado inseparablemente con su nombre a partir 1900, en virtud de su formulación explícita en el segundo de sus “Problemas matemáticos” de París: demostrar la consistencia del sistema axiomático para la aritmética de los reales (Hilbert 1900b). Hilbert reconoció entonces al problema de la consistencia de la aritmética como una cuestión central, y plateó de ese manera el problema fundamental que daría lugar posteriormente al llamado “programa de Hilbert”. Es interesante observar que Hertz deposita, en la permisibilidad lógica de las imágenes, una importancia similar a la que Hilbert le confiere a la consistencia:

> El conocimiento maduro considera a la pureza lógica como de primera importancia; sólo las imágenes lógicamente claras pueden ser probadas respecto de la corrección; sólo las imágenes correctas pueden ser comparadas respecto de la adecuación. La urgencia de las circunstancias conduce [sin embargo] al camino inverso: Las imágenes son encontradas adecuadas para ciertos propósitos; luego son contrastadas en cuanto a su corrección, y finalmente sólo después son depuradas de las contradicciones internas. (Hertz 1894, p. 11)[15]

El segundo criterio establecido por Hertz se vincula con el requerimiento fundamental de las imágenes, y en cierta medida se funde con él. Las imágenes deben ser “correctas” [*richtig*], esto es, no debe darse el caso de que “sus relaciones esenciales contradigan las relaciones de las cosas externas” (Hertz 1894, p. 2). El punto central de este criterio – y del requerimiento fundamental – es que aquellas consecuencias que se siguen de la teoría

[14] Cf. capítulo 2, sección 2.2.2.2.

[15] En el capítulo siguiente veremos que el modo en que Hertz describe el desarrollo efectivo de las teorías científicas es muy similar a la manera en que Hilbert describe cómo se van construyendo históricamente las teorías matemáticas, y al papel del método axiomático en dicha construcción.

deben ser a su vez consecuencias en la naturaleza. Es decir, aquellas partes de la naturaleza que son descriptas por la imagen, deben ser correctamente descriptas. Aunque Hertz no aclara explícitamente qué entiende por relaciones esenciales, es posible inferir que se está refiriendo a aquellas relaciones que son empíricamente testeables o contrastables.[16] La corrección de una imagen es algo que puede ser definido empíricamente, aunque en consecuencia, no de un modo definitivo:

> Aquello que es introducido en la imagen en lo respecta a la "corrección", está contenido en hechos de la experiencia que han servido para la construcción de la imagen. (...) Y si una imagen es correcta o no, lo podemos decir igualmente de manera unívoca, pero sólo en función de nuestra experiencia presente y con la condición de admitir la referencia a futuras y más ricas experiencias. (Hertz 1894, p. 3)

Este criterio de "corrección" de una imagen guarda una relación inmediata con el modo en que Hilbert caracteriza desde 1894 la empresa de axiomatizar la geometría. Según hemos visto en el capítulo anterior, en este período temprano Hilbert entiende que esta tarea consiste en ofrecer una reconstrucción de la geometría euclídea elemental, por medio de la cual sea posible trazar una correspondencia entre las proposiciones del sistema abstracto resultante y los hechos fundamentales de la geometría, que conforman la "realidad geométrica". Por ejemplo, el sistema axiomático de Hilbert para la geometría euclídea elemental podrá ser considerado como "correcto", en la medida en que sea posible obtener de él todos los teoremas y proposiciones que aparecen en los *Elementos* de Euclides. En este sentido, la "corrección" de una imagen guarda algunas semejanzas con la propiedad de completitud de un sistema axiomático, según la concibe Hilbert en este período.

Por otro lado, la permisibilidad y la corrección se relacionan formalmente por el hecho de que una imagen que no es lógicamente admisible, i.e., que contiene una contradicción, permite deducir de ella cualquier conclusión, y por lo tanto, en ningún sentido puede ser una representación correcta del mundo exterior. Como lo señala Hertz en el último pasaje recién citado, "sólo las imágenes lógicamente claras pueden ser probadas respecto de la corrección".[17]

[16] Una discusión sobre este punto puede encontrarse en (Schiemann 1998) y (Lützen 2005).

[17] Podría pensarse que esta relación formal entre la admisibilidad lógica y la corrección de las imágenes tiene un cierto correlato en las propiedades metalógicas de los sistemas axiomáticos formales, a saber: un sistema inconsistente (inadmisible lógicamente) no puede ser completo (correcto), en tanto cualquier fórmula es demostrable en él, pero ninguna es refutable; en otras palabras, los sistemas inconsistentes son *trivialmente* completos.

Por último, dos imágenes lógicamente permisibles y correctas pueden distinguirse, según Hertz, en cuanto a su grado de "adecuación" o "conveniencia" [*Zweckmässigkeit*]:

> De dos imágenes del mismo objeto, la más adecuada será aquella que refleje más relaciones esenciales del objeto en relación a la otra – a la cual designaremos como la más distinta. De dos imágenes con el mismo grado de distinción, la más apropiada será aquella que contenga, junto con los elementos esenciales, el menor número posible de relaciones vacías o superfluas – la cual es además la más simple. (Hertz 1894, pp. 2–3)

Hertz divide al requerimiento de adecuación en dos sub–criterios: la distinción [*Deutlichkeit*] y la simplicidad [*Einfachheit*]. La distinción se asocia a la idea de que la imagen debe ser lo más completa posible, en el sentido de ser capaz de reflejar la mayor cantidad posible de características o relaciones esenciales de los fenómenos. Como se pregunta Hertz respecto de la distinción de la imagen clásica de la mecánica de Newton y Lagrange: "¿Contiene todas las características que nuestro conocimiento presente nos permite distinguir en los movimientos naturales?" (Hertz 1894, p. 11). La imagen más distinta posible será pues aquella que no sólo represente correctamente un gran número de movimientos naturales, sino aquella que incluya a todos los movimientos sin excepción.[18]

El requerimiento de la distinción de una imagen, conjuntamente con la noción de corrección, se relaciona claramente con la noción de completitud de un sistema axiomático, según es concebida por Hilbert en este período. Tal como lo han señalado ya múltiples autores[19], en esta etapa bien inicial Hilbert maneja una noción de completitud más bien informal o pragmática, que consiste en una especie de mixtura entre axiomática material y axiomática formal. De acuerdo con esta "noción informal", un sistema de axiomas Ω para una disciplina A es *completo* si todos[20] los hechos conocidos o teoremas de A pueden ser representados en Ω, ya sea como axiomas o como consecuencias deductivas de los axiomas. Esta noción puede ser ilustrada fácilmente a través de un ejemplo, tomado de la geometría. Una novedad importante de *Fundamentos de la geometría* es el tratamiento que allí recibe la relación de congruencia. En efecto, Hilbert abandona el método de Euclides para demostrar la congruencia de dos figuras, i.e., "el método de superposición", por ser lógicamente confuso y por estar basado en la noción de movimiento. Este

[18] Cf. (Hertz 1894, p. 42).

[19] Véase (Corry 2004a), (Awodey y Reck 2002), (Zach 1999) y (Sieg 1999)

[20] En la introducción de *Fundamentos de la geometría*, Hilbert habla de "los teoremas más importantes de la geometría" (Hilbert 1899, p. 1), y no de todos los teoremas. Véase *infra*, sección 6.4.1.

método es reemplazado por un conjunto de axiomas, que simplemente "postula" la congruencia de segmentos y ángulos. Luego, el sistema axiomático de Hilbert es *completo*, en la medida en que de sus axiomas de congruencia pueden obtenerse – con la ayuda del resto de los axiomas – todos los teoremas de congruencia que se encuentran en los libros I–IV de los *Elementos*. En este sentido, se observa que la noción informal de completitud es similar a una conjunción de los requerimientos de distinción y corrección de Hertz.[21]

En cuanto a la idea de simplicidad, Hertz exige que las imágenes contengan el menor número posible de elementos innecesarios, es decir, de conceptos que puedan ser excluidos sin detrimento de la capacidad predictiva de la teoría. Un ejemplo evidente de esta clase de simplicidad se observa en la propia imagen de la mecánica de Hertz, que utiliza sólo tres conceptos primitivos en lugar de cuatro, como era habitual.[22] De modo análogo, Hilbert incluye a la simplicidad como una propiedad de los sistemas axiomáticos, aunque no se trata de una propiedad que pueda ser demostrada formalmente, sino de un requerimiento que podría llamarse "estético". Sin embargo, la independencia exigida a todos los axiomas es un instrumento útil para evitar la introducción dentro del sistema de elementos redundantes o prescindibles.

La posición de Hertz respecto de la adecuación o conveniencia de una imagen es consecuente así con su afirmación de que pueden existir diversas imágenes correctas de los objetos externos. Asimismo, coincide con la observación de Hilbert, según la cual, aunque "todo sistema de unidades y axiomas que describe completamente a los fenómenos está tan justificado como cualquier otro" (Hilbert 1894, p. 104), es posible probar que un sistema de axiomas es el más adecuado, respecto de cierto punto de vista.

Hasta aquí las coincidencias entre las criterios para las imágenes de Hertz y las propiedades de los sistemas de axiomas de Hilbert. Pasemos ahora a analizar otro de los puntos de contacto entre ambas posiciones, a saber: la afirmación de Hilbert de que sus *axiomas* para la geometría pueden ser entendidos como las *imágenes* de Hertz.

3.5. Los axiomas de Hilbert y las *Bilder* de Hertz

Según hemos visto en las secciones anteriores, Hilbert apela en sus cursos a la teoría pictórica de Hertz para ilustrar el modo en que deben entenderse el lugar y la naturaleza de los axiomas dentro de las teorías axiomatizadas. Es decir, ya desde 1894, año en que adopta por primera vez un abordaje axiomático a la geometría, Hilbert reconoce que un sistema axiomático debe ser entendido como un entramado de conceptos, una

[21] El tema de la completitud es abordado detalladamente en el capítulo 6.
[22] Véase *infra*, sección 3.6.1.

estructura relacional, que no está restringida a un determinado dominio fijo, sino que por el contrario es libre de recibir diversas interpretaciones. De la misma manera, un axioma geométrico no podrá ser más entendido como una verdad inmediata acerca de un dominio intuitivo fijo – el espacio físico –, sino que en sus sistemas axiomáticos para la geometría, Hilbert sostiene que los axiomas funcionan como proposiciones no interpretadas. Es decir, si bien las conectivas lógicas todavía poseen su significado habitual, los términos geométricos básicos no están ligados a una interpretación fija, sino que pueden recibir diversas interpretaciones, tanto dentro de otras teorías matemáticas, como dentro de otra clase de teorías, por ejemplo, las teorías físicas. En consecuencia, aunque la experiencia y la intuición hayan desempeñado un papel fundamental en el establecimiento del conjunto de 'hechos' básicos, una teoría geométrica no debe limitarse a lo que está intuitiva o empíricamente justificado. En ese sentido, ninguna interpretación o realización particular puede ser privilegiada por sobre otras.

Ahora bien, esta nueva manera de ver los sistemas axiomáticos en general, y los axiomas de la geometría en particular, encuentra un paralelo notable en el modo en que Hertz define las teorías físicas como sistemas hipotéticos–deductivos y en su noción de "principio" de la mecánica:

> En sentido estricto, originalmente en la mecánica se ha entendido por un principio a toda afirmación que no se deriva de otras proposiciones de la mecánica, sino que *se considera como el resultado directo de otras fuentes de conocimiento.* (...) Pero estas proposiciones concretas particulares no serán lo que tendremos en mente cuando hablemos sencilla y generalmente de los principios de la mecánica; por ello entenderemos a *cualquier elección entre aquellas y entre otras proposiciones similares, que satisfaga la condición de que sea posible desarrollar de allí toda la mecánica por medios puramente deductivos, sin una referencia ulterior a la experiencia.* (Hertz 1894, pp. 4–5. El énfasis es mío)

Lo que determina que una proposición deba ser considerada como un "principio" de la mecánica no es la inmediatez de su evidencia intuitiva o empírica, sino la capacidad de obtener a partir de ella el resto de proposiciones y teoremas, exclusivamente por medio de inferencias deductivas y sin apelar a la experiencia. A ello se hace referencia cuando se habla de la posición axiomática o deductivista de Hertz. Además, este modo de concebir los principios de la mecánica conlleva que una imagen, en tanto producto puramente intelectual, se relaciona con los objetos externos estrictamente en función del cumplimiento del requerimiento fundamental: las consecuencias deductivas de las imágenes en el pensamiento deben valer a su vez en la naturaleza. En otras palabras, un principio de la mecánica – tomado como una imagen de los objetos externos – no intenta ser una afirmación acerca de la esencia de las cosas externas, de cómo éstas son en sí; su relación se limita a la condición establecida en el criterio fundamental. Por otro lado, como una consecuencia de lo anterior, y al igual que lo sostenido por Hilbert en relación a los sistemas axiomáticos, para Hertz una característica central de las imágenes permisibles y correctas es que no puede afirmarse justificadamente que alguna de ellas se halla más cerca que otra de la naturaleza de los objetos:

> En este sentido, las ideas fundamentales de la mecánica junto con los principios que las conectan, representan la imagen más simple que la física puede producir de las cosas en el mundo sensible y de los procesos que ocurren en ella. *Al cambiar la elección de las proposiciones que tomamos como fundamentales, podemos dar diversas presentaciones de los principios de la mecánica. De este modo podemos obtener diversas imágenes de las cosas, y estas imágenes deben ser comparadas entre sí respecto de la admisibilidad lógica, la corrección y la conveniencia.* (Hertz 1894, p. 4–5. El énfasis es mío.)

Desde un punto de vista epistemológico, ninguna imagen [*Bild*] puede ser privilegiada argumentando que representa con mayor fidelidad la *verdadera naturaleza* de los objetos. Luego, de ese modo de concebir los principios de la mecánica a la noción de axioma como proposición no interpretada, sólo hay un pequeño paso.

Otra consecuencia de entender los principios de la mecánica – y los axiomas de la geometría – de esta manera, es que el problema de la admisibilidad lógica y de la consistencia se vuelve crucial. En la concepción clásica, la ausencia de contradicción de los principios y axiomas estaba garantizada por su carácter de verdades fundadas en una evidencia intuitiva inmediata. Sin embargo, al convertir los principios de la mecánica en *Bilder* o representaciones intelectuales, que son *postuladas* como los elementos básicos de un sistema, la cuestión de si estos principios no conllevan o pueden conducir a contradicciones se vuelve primordial. De allí la insistencia de Hertz en la admisibilidad lógica como el criterio más importante que debe ser garantizado de una imagen.

En el caso de Hilbert, esta transición se pone notablemente de manifiesto en la renombrada controversia epistolar que mantuvo con Frege, a propósito de la publicación del *Festschrift* (Hilbert 1899). Como es bien sabido, Frege manifiesta allí serias dudas en torno al 'nuevo significado' que Hilbert le confiere a la palabra axioma. Frege defiende una concepción tradicional de los axiomas de la geometría, que coincide exactamente con la caracterización que presenta Hertz de la noción clásica de principio en la mecánica:

> Llamo axiomas a las proposiciones que son verdaderas pero no demostradas, ya que nuestro conocimiento de ellas se sigue de una fuente de conocimiento distinta a la lógica, que se puede llamar intuición espacial. De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí. (Frege 1976, p. 63)

Por el contrario, para Hilbert los axiomas de la geometría no son proposiciones verdaderas acerca del espacio físico, sino un conjunto de enunciados (hipotéticos) acerca de un sistema de 'objetos del pensamiento'. Es precisamente por ello que una prueba de consistencia es el criterio fundamental para establecer la validez de un sistema axiomático.[23]

Ahora bien, sugestivamente en favor de la tesis de este capítulo, Hilbert recurre justamente a Hertz para resaltar que la incomprensión de Frege se debe a su incapacidad para advertir este nuevo modo de concebir los principios de una teoría organizada axiomáticamente. En el tercer volumen de sus "Diarios científicos" [*Wissenchaftliches Tagebuch*], Hilbert realiza la siguiente observación:

> Frege tergiversa [las cosas] al haber entendido completamente mal el sentido y el objetivo de mi fundamentación [de la geometría]. Obviamente es posible emplear otras palabras en lugar de 'punto', 'línea', 'plano', 'entre'; lo cual no es nada nuevo. (...) Mi concepción coincide exactamente con la de Hertz (introducción a su mecánica). Lo que yo llamo objetos del pensamiento [*Gedankendinge*], son las imágenes de Hertz, los 'signos' de Pringsheim, Thomae, etc.[24]

Hilbert señala una vez más que en su presentación axiomática de la geometría los términos primitivos, aun cuando conservan su nombre habitual que nos recuerda su significado geométrico intuitivo, se refieren a un conjunto de 'objetos del pensamiento', i.e., objetos pertenecientes a un nivel conceptual, y no a las 'líneas', 'puntos' y 'planos' intuitivos o 'reales'. En este preciso sentido, resulta fructífero concebir estos objetos del pensamiento

[23] La polémica entre Hilbert y Frege será analizada en el capítulo 4.

[24] Cod. Ms. D. Hilbert 600:3, p. 75-76. El énfasis es mío. Hasta donde llega mi conocimiento, éste es el único lugar en donde Hilbert se refiere a la controversia con Frege, tras haberla interrumpido abruptamente en 1902. Es difícil datar con precisión la observación; sin embargo, el contexto de estas notas permite inferir que no pudo haber sido escrita después de 1905.

como las imágenes de Hertz. Sin embargo, como hemos señalado, Hilbert afirma también en reiteradas oportunidades que sus *axiomas* deben ser entendidos como las imágenes de Hertz. De este modo, las *Bilder* de Hertz pueden ser, para Hilbert, imágenes tanto de *objetos u cosas* como de *hechos geométricos*.

Es preciso reconocer que el propio Hertz utiliza con esta misma flexibilidad su noción de ‘imagen’. Es decir, por un lado Hertz reitera en múltiples lugares, desde las primeras líneas de la introducción a sus *Principios de la mecánica*, que las imágenes son “las representaciones que nos creamos para nosotros de los objetos externos” (Hertz 1894, p. 1).[25] Por otro lado, sostiene asimismo que con su nueva presentación de la mecánica busca proponer una nueva imagen de esta teoría física. En otras palabras, su objetivo es ofrecer una nueva imagen [*Bild*] que describa de un modo más simple, completo y consistente, el comportamiento de un determinado rango de fenómenos, o sea, el conjunto de hechos de los que se ocupa la mecánica.[26]

Luego, más allá de esta libertad para hacer que las imágenes sean representaciones tanto de objetos u cosas como de hechos, las referencias de Hilbert a la teoría pictórica de Hertz resultan completamente consecuentes respecto de lo siguiente. En mi opinión, es claro que el modo en que Hertz describe en su *Bildtheorie* la relación entre las teorías físicas y los fenómenos ilustra elocuentemente el *giro metodológico* que Hilbert intenta imprimirle a la idea de axiomática en geometría. Dicho brevemente, aunque en cuanto a su origen la geometría es – al igual que la mecánica – una ciencia natural, gracias al proceso de axiomatización formal se convierte en una teoría matemática pura, que no intenta ser una descripción directa o inmediata del espacio físico. En este sentido, parecería entonces correcto pensar que para Hilbert el *sistema axiomático mismo*, con sus correspondientes axiomas y términos primitivos, constituye una imagen en el sentido de Hertz. Otra similitud entre ambas propuestas, que enseguida analizaremos, apunta en esta dirección.

3.6. Elementos ideales y masas invisibles

Este nuevo modo de concebir los axiomas de la geometría y los principios de la mecánica acarrea, como una consecuencia inmediata, una modificación en la manera de entender cómo debe proceder la construcción de una teoría – ya sea matemática o física – en forma axiomática o hipotético–deductiva. Es interesante subrayar que, también en este punto, es posible encontrar entre Hilbert y Hertz coincidencias notables. Me refiero a las seme-

[25] Véase también (Hertz 1894, pp. 2–3).
[26] Cf. (Hertz 1894, pp. 39–40).

janzas conceptuales que existen entre una de las innovaciones técnicas y metodológicas más importantes que lleva a cabo Hertz en su presentación de la mecánica, i.e., la introducción de masas invisibles u ocultas, y uno de los pilares del método axiomático hilbertiano: el método de los elementos ideales.

3.6.1. Las 'masas invisibles' en la mecánica de Hertz

La concepción de Hertz de las teorías científicas como imágenes intelectuales implica una nueva manera de entender la relación entre las teorías físicas y los fenómenos. De acuerdo con esta nueva concepción, el único respecto en el que nuestras teorías científicas o imágenes deben concordar con los fenómenos es el cumplimiento del criterio fundamental: las consecuencias en el pensamiento que se siguen de las imágenes deben valer a su vez en la naturaleza. Cualquier concordancia ulterior es, a los efectos de la predicción científica, superflua; incluso, Hertz señala que otra concordancia quizás no sea siquiera posible. Luego, este modo de concebir las teorías ofrece una justificación para la introducción de elementos teóricos o conceptos que, aunque carecen de un correlato empírico observable, permiten simplificar y generalizar la explicación de un rango determinado de *phenomena*. Más aún, para Hertz ello no es solamente posible, sino que es absolutamente imprescindible para conseguir una imagen *completa*:

> Si intentamos comprender el movimiento de los cuerpos a nuestro alrededor y reducirlo a reglas simples y claras, considerando exclusivamente lo que puede ser observado directamente, nuestro intento en general fracasará. Inmediatamente nos convenceremos de que la totalidad de lo que podemos ver y tocar no forma aún un universo legaliforme [*gesetzmässige*], en el que de las mismas condiciones se siguen siempre las mismas consecuencias. (...) Si deseamos obtener una imagen del mundo [*Weltbild*] completa, acabada y conforme a una ley, tenemos que admitir, detrás de las cosas que vemos, otras cosas invisibles; debemos buscar detrás de los límites de nuestros sentidos, otros elementos co–actuantes que están ocultos [*heimliche Mitspieler*]. (Hertz 1894, p. 30)

Hertz cree que no podemos alcanzar una explicación de la materia tangible y visible sin asumir la existencia de ciertos actores "invisibles". Ahora bien, esto oculto no es sino masas que en sí son iguales a las masas tangibles, con la excepción de que no podemos percibirlas de la misma manera en que percibimos a la materia visible. Podemos inferir sus propiedades a partir del modo en que éstas operan sobre la materia tangible, a través de sus conexiones. Empero, la única diferencia entre la materia tangible y la intangible consiste en el modo en que están conectadas con el aparato sensorial humano. No se trata de una diferencia de clase, sino sólo respecto a nuestro modo de percepción.

La 'imagen' de la mecánica de Hertz consta entonces sólo de tres conceptos primitivos – espacio, tiempo y masa –, a los que se les deben añadir las masas ocultas. Las tres primeras nociones pueden ser determinadas a través de experiencias sensibles concretas, con lo cual resultan justificadas empíricamente:

> En primer lugar introducimos los tres conceptos básicos e independientes de tiempo, espacio y masa como objetos de la experiencia, y al mismo tiempo fijamos por medio de qué experiencias sensibles concretas, tiempo, espacio y masa serán determinados. Con respecto a las masas, afirmamos así que junto con las masas que pueden ser percibidas por los sentidos, [otras] masas ocultas pueden ser introducidas por medio de hipótesis. (Hertz 1894, p. 32)

Hertz evita de esta manera la inclusión de un cuarto elemento primitivo: la fuerza, en la concepción mecánica clásica de Newton y Lagrange; o la energía, en la representación energeticista de la mecánica que intenta fundarla en las leyes de la transformación de la energía.[27] Por otro lado, para compensar la exclusión de las fuerzas como un concepto primitivo de la teoría, se introducen cantidades ocultas, bajo la forma de masas ocultas (*verborgen Masses*). Las masas ocultas cooperan con las cantidades visibles en la descripción de los movimientos a través de una transformación de todos los movimientos en movimientos inerciales. Asimismo, gracias a la inclusión de estas masas invisibles, la energía potencial, que carece de sentido sin el concepto de fuerza, puede ser redefinida simplemente como energía cinética de estas mismas masas ocultas.[28] La introducción de estas "masas invisibles" permite así que la imagen hertziana de la mecánica gane sustancialmente en claridad lógica, cumpliendo de ese modo con el criterio fundamental de permisibilidad. Es decir, en opinión de Hertz, aunque la primera imagen de la mecánica es aceptable en lo que se refiere a la "corrección" (*Richtigkeit*), las propiedades contradictorias que le atribuye a la noción de fuerza – al considerarla en ocasiones tanto

[27] Hertz reconoce que, en el momento de la redacción de su libro, no existía todavía un manual que expusiera a la mecánica desde el punto de vista de la idea de energía. En tal sentido, Hertz no asocia la imagen energicista a un autor particular, sino más más bien a una idea general muy influyente durante las "últimas décadas" (Hertz 1894, p. 17). Básicamente, esta imagen de la mecánica consta de cuatro conceptos fundamentales: espacio, tiempo, masa y energía, y utiliza al principio de Hamilton de la mínima acción como la ley mecánica fundamental.

[28] Cf. (D'Agostino 2000, p. 194).

como causa y como resultado del movimiento – introduce problemas y confusiones importantes en el que respecta a la permisibilidad lógica.[29] Según Hertz, su imagen supera entonces en claridad lógica y simplicidad a las presentaciones anteriores de la mecánica, al basarse únicamente en tres conceptos básicos[30], a los que se les deben sumar los elementos invisibles. Por otra parte, Hertz pensaba que estas masas ocultas ofrecían una solución al problema de la explicación mecánica de la electrodinámica, tal como había sido planteado por Maxwell.[31]

En resumen, Hertz le confirió una gran importancia a la admisión de cantidades ocultas, en cuanto nueva herramienta para presentar el sistema de mecánica. En efecto, estos elementos invisibles no hacían sino confirmar su visión del cambio de estatus de las teorías científicas, a saber: éstas debían dejar de ser consideradas como una descripción de la naturaleza, para comenzar a ser vistas como construcciones intelectuales, como imágenes de los fenómenos. Dicho de otro modo, la admisión de elementos invisibles en la presentación de la mecánica se corresponde con la concepción de Hertz de las teorías físicas como modelos teóricos, en donde cada uno de los conceptos no debía corresponderse necesariamente con algo observable en un nivel empírico. Y en definitiva, en este rechazo de la correspondencia entre un concepto y algo observable, consiste su tesis de que las teorías no son sino imágenes intelectuales [*innere Scheinbilder*] de los fenómenos.

Por otro lado, en lo que toca a su estatus epistemológico, Hertz reconoce que estas masas invisibles no son nada misterioso, no corresponden a ninguna categoría especial, sino que en el fondo se trata de los mismos conceptos básicos, introducidos siguiendo el único objetivo metodológico de simplificar y completar la explicación del movimiento mecánico de los fenómenos:

> Podemos admitir que hay algo oculto operando y sin embargo negar que pertenezca a una categoría especial. Podemos suponer libremente que esto oculto [*Verborgene*] no es otra cosa sino nuevamente movimiento y masa; y

[29] El problema fundamental que encuentra Hertz en la concepción mecánica clásica, cuya exposición más acabada se encuentra para este autor en las obras de Newton y Lagrange, tiene que ver con el concepto básico de fuerza. En particular, para Hertz, en la imagen clásica de la mecánica el concepto de acción y reacción aplicado al movimiento circular y, en general, a la relación entre fuerzas externas e internas (inerciales), es lógicamente confuso. Sobre las críticas de Hertz a la imagen de la mecánica clásica véase (Hertz 1894, pp. 6–16).

[30] Es posible argumentar que ésta no sería una razón suficiente para mantener que la imagen de la geometría de Hertz es más simple. Por ejemplo, el sistema para la mecánica clásica de Kirchhoff contaba ya de sólo tres conceptos básicos (espacio, tiempo y masa). Cf. Kirchhoff (1877). Sobre la presentación de la mecánica clásica de Kirchhoff puede verse Passos˜Videira (2011).

[31] Para una discusión sobre el rol de estos agentes ocultos en la imagen de la mecánica de Hertz véase (Lützen 2005).

> de hecho movimiento y masa tales que en sí no se distinguen de los visibles, sino sólo en relación a nosotros y a nuestros medios usuales de percepción. Ahora bien, este modo de pensar es nuestra hipótesis. Suponemos que es posible representarse las masas visibles del universo junto con otras masas que obedecen las mismas leyes, y del tal modo que el todo se vuelve inteligible y conforme a una ley. (Hertz 1894, pp. 30–31)[32]

Vemos entonces que la admisión de elementos invisibles en la presentación de la mecánica se corresponde con la concepción de Hertz de las teorías físicas como modelos teóricos, en donde cada uno de los conceptos no debe corresponderse necesariamente con algo observable en un nivel empírico. En suma, Hertz pone de manifiesto un procedimiento inevitable en la elaboración de una teoría científica, a saber: la necesidad de transcender el dominio de los fenómenos inmediatamente dados – el dominio original de la teoría – para conseguir una explicación teóricamente más completa, simple y general.

3.6.2. Elementos ideales y el método axiomático en Hilbert

Este aspecto que Hertz destaca del pensamiento teórico se vincula evidentemente, en el campo de la matemática, con el método de extensión de dominios mediante la introducción de elementos ideales. En el siglo XIX, grandes matemáticos como Kummer, Dirichlet y Dedekind, entre otros, pusieron en práctica este método fructíferamente. Sin embargo, a través de su nuevo método axiomático, Hilbert le confirió una justificación explícita y lo convirtió en una herramienta fundamental para la labor matemática. En las notas que hemos venido analizando, Hilbert presenta una serie de observaciones muy interesantes, cuyas similitudes con Hertz quisiera resaltar.

El método de los elementos ideales ha sido aplicado prácticamente en todas las ramas de la matemática: álgebra, análisis, teoría de números, geometría, etc. Un caso muy conocido, y a menudo citado a modo de ejemplo, es la introducción de puntos, líneas y planos impropios o “del infinito” en la geometría proyectiva.[33] Sin embargo, en sus notas de clases (Hilbert 1898b), Hilbert presenta un ejemplo diferente del método de los elementos ideales y realiza una serie de comentarios muy sugerentes e ilustrativos al respecto. Como veremos más en detalle en la segunda parte de este trabajo, las notas de clases de Hilbert muestran claramente que uno de sus objetivos primordiales era asegurar que su sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental pudiera tener un

[32] Véase también (Hertz 1894, §301).

[33] Este ejemplo es analizado, en conexión con el método axiomático de Hilbert, por (Torres 2009).

'modelo' o realización en la geometría analítica cartesiana, i.e., la geometría analítica basada en el sistema usual de los números reales. La investigación en torno a qué axiomas eran necesarios para alcanzar tal fin, se convirtió así en una tarea central en sus indagaciones geométricas. Ahora bien, el sistema axiomático presentado en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899) era insuficiente para garantizar una completa coordenatización de los puntos de la línea geométrica con los números reales. El problema residía en el grupo de axiomas de continuidad, que en el sistema de axiomas original de 1899 estaba conformado únicamente por el axioma de Arquímedes, en su versión más usual. Dicho axioma, y Hilbert lo advierte manifiestamente, permite solamente asignar unívocamente a cada punto de la línea un número real. No garantiza, en cambio, que a cada número real le corresponda un punto en la línea geométrica. En consecuencia, el sistema axiomático original del *Festschrift* sólo puede tener un 'modelo' en una geometría analítica cuyas coordenadas forman un cuerpo ordenado arquimediano – como por ejemplo el de los números algebraicos – pero no un cuerpo ordenado completo, i.e., el cuerpo de los números reales. Para que dicho sistema de axiomas pudiera garantizar la correspondencia biunívoca entre los puntos de la línea y los números reales, era necesario en cambio completar el dominio definido originalmente agregando nuevos puntos. Hilbert lo explica de la siguiente manera en el manuscrito recién mencionado:

> En virtud del axioma de Arquímedes se puede conseguir ahora la introducción del número en la geometría (...). Sin embargo no se sigue de nuestros axiomas que también a cada número le corresponde un punto de la línea. Ello puede lograrse a través de la introducción de puntos irracionales – ideales – (axioma de Cantor). (Hilbert 1898a, pp. 390–91)

Un poco más tarde Hilbert solucionará el problema de la correspondencia uno–a–uno – isomorfismo – de su sistema de axiomas con la geometría analítica cartesiana basada en los número reales agregando, a su sistema original, el famoso axioma de completitud. Como veremos detalladamente en el capítulo 6, ello ocurrió por primera vez en la traducción al francés de *Fundamentos* en 1900, y luego a partir de la segunda edición alemana, en 1903. Esencialmente, el axioma de completitud impone una condición de maximalidad sobre el conjunto de los objetos geométricos, determinando que el único cuerpo numérico que puede satisfacer la totalidad de los axiomas para la geometría euclídea es el cuerpo ordenado completo de los reales. Sin embargo, ya que estas notas datan de 1898, Hilbert todavía no contaba con el axioma de completitud. La correspondencia biunívoca es entonces lograda por medio de la introducción de puntos irracionales o "ideales" a través del llamado “axioma de Cantor”, que afirma precisamente que a cada número real le corresponde un único punto en la línea geométrica.[34] Postulando la existencia de estos nuevos puntos, es posible completar el sistema de objetos definido por los axiomas, con lo cual se logra un isomorfismo con la geometría analítica construida sobre los números reales.

Ahora bien, a la hora de pronunciarse respecto del estatus epistemológico de estos nuevos puntos del sistema y de la justificación de su inclusión, Hilbert realiza en estas notas la siguiente afirmación, de una similitud notable al pasaje anteriormente citado de Hertz:

> Es posible mostrar que estos puntos ideales satisfacen el conjunto de axiomas I–IV; luego es por ello indiferente si éstos son introducidos aquí, o antes en un lugar previo. La pregunta respecto de si estos puntos realmente “existen”, es en virtud de las razones mencionadas completamente inútil [*müssig*]; para nuestro conocimiento empírico de las propiedades espaciales de las cosas estos puntos irracionales no son necesarios. Su utilidad es exclusivamente metodológica; recién con su ayuda se vuelve posible desarrollar a la geometría analítica en su completa extensión. (Hilbert 1898a, p. 391)

De modo análogo a Hertz, la razón para postular estos nuevos elementos (ideales) es estrictamente metodológica, i.e., la simplificación y la mayor plenitud en la explicación o caracterización del dominio que es objeto de indagación. La pregunta por la naturaleza de estos nuevos elementos cobra entonces sentido sólo respecto del sistema axiomático o la teoría en cuestión. Y la respuesta es, a su vez, simple y directa: podemos postular cualquier nuevo elemento dentro del sistema, en la medida en que su introducción no conduzca a contradicciones en relación a la estructura relacional originalmente definida.

Finalmente, más allá de las diferencias específicas entre el ejemplo matemático presentado y la utilización de este método por parte de Hertz en la mecánica, esta comparación ilustra una coincidencia fundamental entre ambos autores, respecto de un rasgo esencial del pensamiento teórico: estamos justificados e incluso es necesario *transcender* el campo de lo dado inmediata e intuitivamente, a través de la postulación de la existencia de nuevos elementos, con el fin de lograr una simplificación, generalización y completitud en la explicación o caracterización de los objetos en cuestión. Sólo estamos limitados por un único requisito: la consistencia. Hilbert lo señala de la siguiente manera, en un texto correspondiente a un período posterior:

[34] Véase Capítulo 6, apartado 6.4.4.2.

> Existe luego una condición, una única [condición], pero también absolutamente necesaria, para la aplicación del método de los elementos ideales, a saber: la prueba de consistencia. La extensión a través de la inclusión de [elementos] ideales es solamente lícita, cuando con ello no se originan contradicciones en el dominio original; es decir, cuando al eliminar los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales también son válidas en el dominio original. (Hilbert 1926, p. 179)

Y en ello concuerda también Hertz, al poner el énfasis en el valor de la admisibilidad lógica de las imágenes que nos formamos.

3.7. Observaciones finales

Para concluir este capítulo, quisiera señalar que la influencia de la *Bildtheorie* de Hertz en la temprana concepción axiomática de la geometría de Hilbert pone de manifiesto tres cuestiones centrales respecto de la posición de este último.

En primer lugar, la conexión con la teoría pictórica de Hertz circunscribe el empirismo que caracteriza la concepción hilbertiana de la geometría, en este período inicial, al reconocimiento del origen de la geometría como una ciencia natural. Dicho de otro modo, las referencias a la *Bildtheorie* permiten ver con claridad cuán lejos se hallaba la concepción de la geometría de Hilbert respecto de otras posiciones radicalmente empiristas.[35] Ello resulta evidente en función de lo siguiente: al caracterizar sus axiomas para la geometría por medio de las *Bilder* de Hertz, Hilbert rechaza el principio básico de toda posición *radicalmente* empirista. De acuerdo con este principio, los conceptos geométricos básicos deben corresponderse originalmente con objetos empíricos, y las relaciones expresadas en los axiomas deben corresponderse exactamente con 'hechos de la experiencia'. En contraposición a este empirismo radical, Hilbert resalta el origen empírico de muchos de los axiomas de la geometría, pero impone – al igual que Hertz – como único requerimiento fundamental, que el conjunto de los objetos y axiomas elegidos permita una reconstrucción consistente, completa, lógicamente clara y simple de la 'realidad geométrica'. Ello sin importar que se introduzcan elementos o conceptos, cuya certeza intuitiva o empírica diverja respecto de la certeza que poseemos de otros objetos básicos.

En segundo lugar, en virtud del análisis presentado es posible precisar mejor la tesis de Hilbert, en cierta medida llamativa dada su posición axiomática abstracta, según la

[35] El ejemplo quizás más claro de una posición radicalmente empirista es Pasch (1882). Un análisis de ésta y otras posiciones empiristas puede encontrarse en Schlimm (2010b) y Torretti (1984).

cual la geometría es una ciencia natural. *En este período*[36], dicha afirmación se explica en la medida en que para Hilbert la geometría no es exclusivamente un producto del ‘pensamiento puro’, como sí lo son en cambio la aritmética y el análisis. En otras palabras, que la geometría es la más perfecta de las ciencias naturales se sigue, en esta etapa para Hilbert, de la distinción fundamental – de raigambre gaussiana – entre matemática pura y matemática mixta. Ello implica, sin embargo, el rechazo de una intuición pura en la base de la geometría. Y aunque Hilbert disimula este supuesto al señalar que en sus investigaciones la cuestión de si nuestra intuición espacial es empírica o *a priori* no es abordada, es claro que su concepción temprana de la geometría es incompatible con una intuición pura del espacio.

Por último, la conexión con Hertz aporta elementos contundentes para oponerse a las interpretaciones formalista radical[37] y deductivista[38] de la concepción de la geometría de Hilbert. El resultado de una axiomatización de la geometría *á la Hilbert* es un sistema axiomático abstracto o formal. En tanto tal, dicha concepción axiomática es totalmente compatible con la idea de que la matemática debe entenderse como una mera colección de sistemas abstractos y formales, construidos a partir de un conjunto arbitrariamente dado de postulados, sin un significado intrínseco. Ahora bien, al describir su objetivo como la tarea de proporcionar una “imagen de la realidad geométrica”, Hilbert se separa indudablemente de aquellas posiciones excesivamente formalistas. Los elementos del sistema hilbertiano – al igual que en el sistema de Hertz para la mecánica – no son los ‘puntos’, ‘líneas’ y ‘planos’ reales o intuitivos, sino un conjunto de ‘objetos del pensamiento’ [*Gedankendinge*], abstractamente caracterizados por medio de los axiomas. Ello no quita que la razón fundamental para realizar un análisis axiomático sea profundizar nuestro conocimiento, y perfeccionar la claridad epistemológica, de una disciplina matemática en un estado muy avanzado y elaborado de su desarrollo. No se trata de jugar con un conjunto cualquiera de postulados o axiomas, para ver qué proposiciones o teoremas es posible obtener de allí exclusivamente por medio de deducciones lógicas. Antes bien, lo que se busca es alcanzar una re–presentación más perspicua y consistente, que también lleve a descubrir nuevos resultados, de una disciplina en sus orígenes enraizada en la experiencia y la intuición. En definitiva, el método axiomático se ajusta a aquella creencia fundamental, tantas veces repetida por Hilbert, que indica que toda la matemática es un resultado de la íntima interacción entre el pensamiento y la intuición.

[36] Corry (2006) ha analizado las consecuencias que tuvo, para la concepción de la geometría de Hilbert, el advenimiento de la teoría de la relatividad especial (1905) y general (1915) de Einstein.

[37] Cf. introducción, sección 0.2.1.

[38] Cf. introducción, sección 0.2.2.

CAPÍTULO 4

Método axiomático e intuición

4.1. Introducción

La controversia epistolar entre Frege y Hilbert, a raíz de la publicación de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), ha sido un episodio intensamente estudiado por los filósofos e historiadores de la lógica y la matemática. Ello se explica no sólo en virtud de la celebridad de sus protagonistas, sino también en función de que el breve intercambio epistolar ilustra elocuentemente el conflicto entre la concepción clásica y la concepción moderna del método axiomático, representadas por Frege y Hilbert, respectivamente. Asimismo, en las pocas páginas en las que se extiende la polémica, los autores discuten muchos de los problemas perennes de la filosofía de la matemática, por ejemplo, el papel de las definiciones, las nociones de axioma, verdad y existencia matemática, entre otros tópicos. Sin embargo, desde el punto de vista de la presente tesis doctoral, el aspecto quizás más interesante y relevante de esta discusión reside en que Hilbert se vio obligado allí a resumir, para responder a las críticas de Frege, los rasgos centrales de su nueva concepción abstracta del método axiomático.

Un primer objetivo de este capítulo será examinar la descripción del método axiomático formal llevada a cabo por Hilbert en su intercambio epistolar con Frege. Más precisamente, sostendré que Hilbert percibió inmediatamente que el *origen* de las críticas de Frege se encontraba en su concepción todavía tradicional del método axiomático, y que, en consecuencia, la preocupación excluyente en sus respuestas fue resaltar la *naturaleza abstracta* de su nueva concepción del método axiomático. En otras palabras, intentaré mostrar que, en su discusión con Frege, Hilbert se ocupó principalmente de enfatizar el nuevo carácter abstracto de su concepción axiomática, mientras que otros aspectos significativos de esta concepción están allí por completo ausentes.

Luego, un segundo objetivo de este capítulo será analizar un componente significativo de la concepción axiomática de la geometría de Hilbert, que sin embargo no aparece en la mencionada polémica. Me refiero a la importancia conferida a la intuición y a la experiencia en el *proceso de axiomatización* de una teoría matemática, en especial, de la geometría. Esta importancia es explicitada y destacada constantemente por Hilbert en otro escrito casi contemporáneo, a saber: sus notas de clases para el curso *Principio lógicos del pensamiento matemático* (Hilbert 1905b;c). Este curso constituye la exposición más acabada y completa de la concepción hilbertiana del método axiomático, en esta primera etapa geométrica que se extiende hasta 1905. En efecto, por un lado Hilbert vuelve a presentar en este manuscrito sus sistemas de axiomas para la geometría elemental y para la aritmética de los reales, acompañados esta vez por reflexiones generales más extensas respecto de las consecuencias metodológicas que acarrea su nueva concepción del método axiomático. Por otro lado, en este trabajo el matemático alemán pone por primera vez en práctica su 'programa' de axiomatizar distintas ramas de la física, siguiendo el modelo de la geometría. En este curso encontramos esbozos de sistemas axiomáticos para la mecánica, la termodinámica, el cálculo de probabilidades, la teoría cinética de gases y la electrodinámica.

En la segunda parte de este capítulo me ocuparé entonces de analizar la descripción del método axiomático llevada a cabo en las notas de clases (Hilbert 1905b;c). Sostendré que un aspecto llamativo de esta descripción consiste en la insistencia de Hilbert en que el "entramado de conceptos", obtenido gracias a la axiomatización formal, conserve un cierto *paralelismo* con los hechos intuitivos básicos de la disciplina matemática en cuestión. Más aún, intentaré mostrar que esta preocupación se tradujo en criterios puntuales que guiaron a Hilbert en su propia elaboración del sistema axiomático para la geometría euclídea elemental, i.e., criterios relacionados a la elección de las nociones primitivas y al lenguaje utilizado para formular el sistema de axiomas.

Por último, concluiré que: *a)* la caracterización del método axiomático articulada en este curso aporta elementos contundentes para considerar las interpretaciones formalista radical y deductivista de su concepción axiomática de la geometría como claramente inadecuadas; *b)* esta exposición pone también en evidencia ciertas limitaciones importantes en la interpretación formalista estructural, a la hora de dar cuenta de algunos elementos de la concepción del método axiomático de Hilbert, que el propio autor identifica como significativos.

4.2. La polémica entre Hilbert y Frege

La renombrada polémica entre Hilbert y Frege tuvo lugar entre 1899 y 1900, y consistió en cinco cartas.[1] La discusión estuvo centrada exclusivamente en el *Festschrift* de Hilbert, aunque sabemos que Frege conoció las notas de clases del curso de Hilbert sobre geometría de 1898/1899, en la versión elaborada por von Shaper (Hilbert 1898a).[2] Debido a las duras críticas de Frege en su segunda carta, Hilbert decidió interrumpir el intercambio epistolar, acusando no contar con el tiempo suficiente para sostener la discusión por escrito.[3] Esta situación no contentó a Frege, y motivó la redacción de un artículo en 1903, donde intentaba hacer pública la discusión y explicar más detalladamente su punto de vista sobre los problemas suscitados por la aparición del trabajo de Hilbert. Este artículo fue entonces respondido por Alwin Korselt (1864–1947), un profesor de matemática de colegio secundario, que contaba en aquel momento con un escaso reconocimiento en el ámbito académico.[4] Korselt (1903) se propuso defender a Hilbert de las críticas lanzadas por Frege (1903a), en su opinión originadas por una comprensión totalmente errada de la nueva concepción formal del método axiomático. Finalmente, Frege atacó una vez más a la nueva concepción "moderna" del método axiomático en un extenso artículo publicado en 1906.[5] Este último trabajo ha suscitado particularmente el interés de los especialistas, en tanto Frege desarrolla allí su propia teoría para probar la *independencia* de un axioma o una proposición dada.[6]

Como he señalado antes, mi objetivo en este capítulo es analizar la descripción del método axiomático que lleva a cabo Hilbert en sus respuestas a Frege, para contrastarla luego – o mejor, para completarla – con sus reflexiones sobre la misma temática en sus interesantísimas notas de clases "Principios lógicos del pensamiento matemático" (Hilbert 1905b;c). No me detendré a comentar cada una de las críticas de Frege en todas sus cartas, ni tampoco intentaré presentar una nueva valoración del *resultado* de la con-

[1] La totalidad del intercambio epistolar se extiende entre 1885 y 1903, y consta de cuatro cartas de Frege y dos cartas y cuatro postales de Hilbert. Véase (Frege 1976).

[2] Frege recibió un ejemplar del curso "Elemente der Euklidischen Geometrie" (Hilbert 1898a) a través de Heinrich Liebmann, matemático y docente en aquel momento en Göttingen. En una carta fechada el 29 de julio de 1900, Frege le agradece a Liebmann el envío del manuscrito de Hilbert. Cf. (Frege 1976, pp. 147-149).

[3] Véase Hilbert a Frege, 15 de enero de 1900; en (Frege 1976, p. 76).

[4] Sobre Korselt puede verse (Frege 1976, p. 140).

[5] Cf. Frege (1906b).

[6] Este artículo de Frege ha sido el centro de una importante discusión por parte de los intérpretes. En particular, las ideas allí vertidas ha planteado la cuestión de si la concepción fregeana de la lógica admite una perspectiva metalógica. Sobre esta cuestión puede verse (Tappenden 2000) y (Ricketts 2005).

troversia. Ésta es una cuestión compleja, que en gran medida excede los límites de la presente tesis doctoral.[7] Por el contrario, en la próxima sección me concentraré específicamente en las críticas de Frege formula en su primera carta, que por otra parte es la única que Hilbert respondió directamente.

4.2.1. Frege y la concepción tradicional del método axiomático

La carta inicial de Frege que dio origen a la polémica está fechada el 27 de diciembre de 1899. En ella el autor critica fundamentalmente las nociones de definición y axioma de la geometría, que Hilbert *a primera vista* maneja en su presentación axiomática de la geometría euclídea elemental. La expresión "a primera vista" alude al hecho de que, en ningún momento en su exposición, Hilbert se pronuncia clara y directamente sobre esta cuestión; por el contrario, el modo en que concibe la naturaleza de los axiomas y la función de las definiciones se resume a un par de referencias lacónicas y, en cierta medida, enigmáticas. Por un lado, Frege encuentra sumamente confusa y problemática la afirmación de Hilbert de que los axiomas *definen* los conceptos primitivos de su teoría geométrica; por otro lado, entiende que su noción de *axioma* de la geometría se aparta de la concepción tradicional, y resulta por ello contradictoria. Ambas críticas las expresa conjuntamente de la siguiente manera:

> Las afirmaciones según las cuales "una descripción precisa y completa de las relaciones se sigue de los axiomas de la geometría" (§1) y "los axiomas definen el concepto 'entre' "(§3), me resultan dudosas. De ese modo se carga a los axiomas con algo que es propio de las definiciones. En mi opinión, de esta forma se borra de un modo dudoso la línea divisoria entre definiciones y axiomas, y junto al significado viejo de la palabra 'axioma', que es sugerido en su afirmación de que los axiomas expresan hechos fundamentales de la intuición, aparece también otro significado, que sin embargo no puedo llegar a comprender.[8]

Frege expresa su perplejidad ante una serie de afirmaciones de Hilbert, que no sólo encuentra contradictorias, sino sobre todo incomprensibles. En *Fundamentos de la geometría* (1899), Hilbert comienza asumiendo la existencia de "tres sistemas de cosas

[7] La literatura que se ha ocupado de la controversia entre Frege y Hilbert es extensa. Entre estos trabajos cabe mencionar a Blanchette (1996), Boos (1985), Chihara (2004), Coffa (1986; 1991), Demopoulos (1994), Hallett (2010; 2012), Peckhaus (1990), Resnik (1974; 1980), Shapiro (1997; 2005), Torretti (1984) y Wehmeier (1997).

[8] Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, pp. 61–62).

[*Dinge*]”, a las que designa con los nombres ‘punto’, ‘línea’ y ‘plano’. Estas cosas u objetos deben ser concebidos como manteniendo ciertas relaciones mutuas, denominadas ‘estar sobre’, ‘entre’ y ‘congruente’. Los axiomas de la geometría son entonces los responsables de proporcionar “la descripción precisa y matemáticamente completa de estas relaciones” (Hilbert 1899, p. 4). Asimismo, los axiomas son dispuestos en cinco grupos: incidencia (I), orden (II), paralelas (III), congruencia (IV) y continuidad (V).[9] Luego, por un lado Hilbert advierte inicialmente que “cada grupo particular de axiomas expresa ciertos hechos básicos de la intuición” (Hilbert 1899, p. 4), dando la impresión de que adhiere a una concepción tradicional del método axiomático. Esta impresión es repetida en la introducción de la obra, cuando señala que el abordaje axiomático a la geometría elemental que se propone emprender equivale a un “análisis lógico de nuestra intuición espacial” (Hilbert 1899, p. 3). Sin embargo, por otro lado Hilbert sostiene que sus axiomas *definen* los términos primitivos de la teoría. Puntualmente, Hilbert afirma en el *Festschrift* que el grupo de axiomas de orden “define el concepto ‘entre’ ” (Hilbert 1899, p. 6) y que “los axiomas del grupo de congruencia definen el concepto ‘congruente’ ” (Hilbert 1899, p. 10). Frege concluye entonces que, a menos que se trate de una nueva noción de definición y de axioma que él no llega a comprender, la exposición de Hilbert parte de una equivocación muy común entre los matemáticos de la época, a saber: la confusión entre la naturaleza de las definiciones y de los axiomas en matemática. Uno de los objetivos centrales de esta primera carta de Frege será entonces aleccionar sobre este tema al ya célebre matemático de Göttingen, exponiéndole brevemente su teoría de las definiciones en matemática.[10]

Para Frege todas las proposiciones matemáticas se dividen estrictamente en definiciones y el resto de las proposiciones matemáticas, *i.e.*, axiomas, teoremas, leyes fundamentales. El objetivo de una definición no es afirmar algo, sino establecer el significado de un signo (una palabra, una expresión) que no poseía significado antes de la definición. La función principal de una definición es de ese modo, para Frege, fijar la referencia de un término o signo. Por el contrario, el resto de las demás proposiciones de la matemática constituyen aseveraciones o afirman algo, esto es, *expresan un pensamiento y*

[9] A partir de la segunda edición de *Fundamentos de la geometría* (1903) Hilbert cambia el orden de los distintos grupos de axiomas. En particular, el grupo de axiomas de congruencia pasa a ser el grupo III, y el axioma de las paralelas el grupo IV.

[10] Una explicación precisa de la naturaleza de las definiciones era fundamental para el proyecto logicista de Frege, en tanto que una de sus tesis centrales sostenía que las leyes de la aritmética podían ser obtenidas de las leyes de la lógica, por medio de definiciones transformacionales. En la sección § 33 del primer volumen de *Grundgesetze der Arithmetik* (1893), Frege desarrolla una teoría formal de las definiciones, en donde establece por ejemplo los requerimientos de *eliminabilidad* y *no–creatividad*. Esta sección en mencionada por Frege en su primer carta a Hilbert.

poseen un valor de verdad. Ahora bien, de acuerdo con la teoría semántica de "Sobre sentido y referencia" (Frege 1892), una proposición sólo puede expresar un pensamiento, y sólo puede tener una valor de verdad, si todos los términos que la componen tienen una referencia. Luego, es claro que para que los axiomas, teoremas y leyes fundamentales puedan expresar un pensamiento, es esencial que no contengan ningún término o signo cuyo *sentido* y *referencia* no haya sido previamente establecido. Frege le señala precisamente este punto a Hilbert, de la siguiente manera:

> Las otras proposiciones (axiomas, leyes fundamentales y teoremas) no deben contener ninguna palabra o signo cuyo sentido y referencia, o cuya contribución al pensamiento expresado, no haya sido ya completamente establecida, de modo que no existan dudas respecto del sentido de la proposición, respecto del pensamiento allí expresado.[11]

Si se acepta esta distinción entre la naturaleza y la función de los axiomas y de las definiciones, es evidente que la idea según la cual un axioma puede servir como definición de algún término primitivo de un sistema axiomático es conceptualmente errónea. Para Frege, la función de un axioma es expresar un pensamiento verdadero. De allí se sigue que un axioma no puede ser utilizado para fijar la referencia de los términos primitivos en él contenido, ya que que éstos deben tener previamente un significado establecido de antemano. Pero de la misma manera, si los axiomas *definen* los elementos y relaciones básicas del sistema, entonces los axiomas no constituyen afirmaciones, esto es, no expresan pensamientos y, por lo tanto, no pueden ser considerados como axiomas en un sentido tradicional del término.

Ahora bien, aun cuando la sugerencia de que un axioma sea tomado como la definición de los términos primitivos de una teoría es absurda – si se parte de esta estricta distinción entre axiomas y definiciones recién trazada –, Frege encuentra todavía más paradójico que los axiomas hilbertianos no son *in stricto sensu* ni definiciones ni tampoco verdaderos axiomas. Más precisamente, en lo que respecta a los axiomas – y particularmente a los axiomas de la geometría – Frege adopta una concepción tradicional o euclídea, que hace explícita en este misma carta:

> Llamo axiomas a las proposiciones que son verdaderas pero no son demostradas, ya que su conocimiento proviene una fuente bien distinta a la lógica, una fuente que podemos llamar 'intuición espacial'.[12]

[11] Frege a Hilbert, 27 del diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 62).
[12] Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 63).

Según Frege, los axiomas de la geometría expresan pensamientos *verdaderos* y, en consecuencia, todos los términos (primitivos) que los componen poseen un sentido determinado y una referencia (fija). Por ejemplo, consideremos el axioma II.1 del sistema axiomático de Hilbert: "Si A, B, C son tres puntos de una línea, y B se encuentra entre C y A, entonces B se encuentra también entre C y A" (Hilbert 1899, p. 6). Para que esta proposición exprese un pensamiento verdadero y, por lo tanto, pueda ser considerada como un auténtico axioma de la geometría, el sentido de los términos 'punto' y 'entre' debe ser conocido de antemano, y su referencia debe estar unívocamente determinada. En palabras del propio Frege:

> Si tuviera que postular su axioma II.1 en cuanto tal, entonces presupondría un conocimiento completo e inequívoco del significado de las expresiones 'algo es un punto sobre una línea' y 'B se encuentra entre A y C', y en este último caso, también un conocimiento general de lo que debe entenderse por estas letras.[13]

Sin embargo, es claro que los 'axiomas de Hilbert' no respetan este requerimiento básico, puesto que en su sistema axiomático los términos primitivos no tienen una referencia fija, sino que pueden recibir diversas interpretaciones. Como lo advierte en su carta el propio Frege:

> Pero tampoco resulta claro qué es lo que Ud. llama punto. Primero pensamos en los puntos en el sentido de la geometría euclídea, una idea que se ve reforzada por la proposición de que los axiomas expresan hechos fundamentales de nuestra intuición. Pero después (p. 20) Ud. piensa en un par de números como un punto.[14]

Luego, si los términos primitivos que aparecen en los axiomas de Hilbert no poseen un sentido y *una* referencia, de acuerdo con la teoría semántica fregeana no pueden expresar un pensamiento verdadero y, por lo tanto, no pueden ser considerados como verdaderos axiomas.[15] Por otra parte, para Frege un simple análisis sobre los axiomas hilbertianos

[13] Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899, en (Frege 1976, p. 63).

[14] Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 61).

[15] "Luego, el axioma no puede ser utilizado para proporcionar una explicación más precisa de, por ejemplo, la palabra 'entre', y es por supuesto imposible darle a esta palabra otro significado posteriormente, como Ud. parece querer hacer en la página 20. Si este significado es diferente del significado de la palabra 'entre' en la sección 3, entonces Ud. tiene aquí una ambigüedad sumamente sospechosa. Ello parece no dejarnos otra alternativa que aceptar que la palabra 'entre' no tiene todavía ningún significado en el axioma II.1 Pero entonces II.1 no puede ser verdadero y, por lo tanto, no puede ser una axioma en mi sentido de las palabras, que es, creo, el sentido aceptado generalmente". Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899, en (Frege 1976, p. 63).

muestra palmariamente que éstos no pueden ser considerados como definiciones, en el sentido antes explicitado. En primer lugar, existe para él una desprolijidad notable en el modo de proceder de Hilbert, en la medida en que lo que aquel estaría proponiendo sería que un conjunto de proposiciones (axiomas) constituye al mismo tiempo una única definición para varios conceptos. Más aún, si se toma seriamente la sugerencia de que sus axiomas constituyen definiciones, entonces es posible percibir inmediatamente que las 'definiciones' de Hilbert son evidentemente circulares, en tanto que los mismos términos que se pretende definir aparecen en los axiomas como parte de la definición. Ambas críticas son expresadas por Frege en una carta a Liebmann, uno de sus interlocutores principales en su discusión con Hilbert[16]:

> Así, se supone que los axiomas deben proporcionar las determinaciones individuales de un concepto. Pero aquí tenemos todavía otra monstruosidad: no es un concepto individual sino tres conceptos (punto, línea, plano) lo que debe ser definido al mismo tiempo en una definición que comprende casi una hoja impresa (...) Además, [los axiomas] deben ayudar a definir, por ejemplo, el concepto de 'linea', pero la palabra 'línea' aparece en ellos; y no sólo la palabra 'línea', sino también 'punto' y 'plano', que en sí mismas son lo que debe ser definido.[17]

Más allá de estas desprolijidades lógicas, para Frege el problema fundamental con la idea de Hilbert de que los axiomas sirven como definiciones, es que *no pueden ser utilizados para determinar el sentido y fijar la referencia de los términos primitivos*, que es la función que deben cumplir las definiciones. En otras palabras, los axiomas hilbertianos no proporcionan criterios o características que permitan reconocer si un objeto determinado cae bajo el concepto que se intenta definir. Es decir, los "axiomas–definiciones" de Hilbert no establecen condiciones necesarias y suficientes para determinar si un objeto forma parte de la extensión del concepto que está siendo definido. Frege le señala burlonamente este problema a Hilbert en una carta posterior:

> No sé cómo puedo, con sus definiciones, responder la pregunta acerca de si mi reloj pulsera es un punto o no. Incluso su primer axioma se refiere a dos puntos. Así, si deseo saber si el axioma vale para mi reloj pulsera, debo conocer en primer lugar si algún otro objeto es un punto. Sin embargo, incluso si hubiese sabido, por ejemplo, que mi pluma es un punto, todavía

[16] Sobre Liebmann véase (Frege 1976, p. 147).
[17] Frege a Liebmann, 29 de julio de 1900, en (Frege 1976, p. 148).

> no hubiese podido determinar si mi reloj pulsera y mi pluma determinan conjuntamente una línea, puesto que no sé lo que es una línea recta.[18]

Frege concluye en su primera carta que es menester que Hilbert explique con claridad qué es lo que entiende por axioma de la geometría y qué es lo que entiende por definición, puesto que de su exposición en el *Festschrift* no se logra obtener una explicación lógicamente perspicua.

Ahora bien, es preciso reconocer que las críticas y la conclusión de Frege se apoyan en dos supuestos que Hilbert sin dudas no puede compartir, a saber: en primer lugar, en su elaborada teoría semántica; en segundo lugar, en su concepción tradicional del método axiomático. En lo que refiere a la primera suposición, es posible resumir los elementos relevantes para *nuestro caso* de la teoría fregeana del significado, a través de dos tesis fundamentales. La primera de estas tesis es conocida en la literatura como la "fijación de la referencia" (*fixity of reference*), y afirma que el *sentido* de una expresión determina unívocamente su *referencia*.[19] Es decir, para Frege cualquiera que sea capaz de comprender el sentido de una expresión como 'punto', tiene los elementos suficientes como para determinar si un objeto cualquiera "cae bajo este concepto", o sea, si este objeto cualquiera es o no un punto.[20] La segunda tesis ha sido denominada "proposicionalismo" por Coffa (1991) y es compartida además por otros autores, como por ejemplo, Russell.[21] De acuerdo con esta tesis, en toda teoría matemática, una proposición constituye una afirmación o aseveración acerca de una colección o dominio fijo de objetos y conceptos, y su valor de verdad viene determinado por la naturaleza de los objetos y conceptos a los que se refiere.[22] Es claro que esta última tesis de Frege guarda así una relación inmediata con una concepción tradicional del método axiomático, de acuerdo con la cual los axiomas de una teoría expresan un conjunto de verdades acerca de un determinado dominio fijo de objetos.

La adopción de una concepción clásica del método axiomático es completamente visible en la propia carta de Frege, en tanto realiza allí afirmaciones como: "los axiomas son proposiciones verdaderas pero no demostradas". Sin embargo, esta misma opinión es expresada numerosas veces en otros lugares, en su texto (póstumo) "Über Euklidische Geometrie":

[18] Frege a Hilbert, 6 de enero de 1900; en (Frege 1976, p. 73).
[19] Sobre las nociones fregeanas de "sentido" y "referencia" véase (Frege 1892).
[20] La expresión "fijación de la referencia" ha sido acuñada por Hallett, quien además ha enfatizado esta tesis a la hora de analizar la controversia. Véase Hallett (1994; 2010).
[21] Véase (Coffa 1991, cap. 7).
[22] Quizás deba señalarse además que el *principio de composicionalidad* juega también para Frege un papel central en la determinación del valor de verdad de un enunciado.

> En la geometría euclídea ciertas verdades han sido tomadas como axiomas. Si un pensamiento es considerado falso, entonces no puede ser reconocido como un axioma, puesto que un axioma es una verdad. Por otra parte, al concepto de axioma pertenece el hecho de que puede ser reconocido como verdadero con independencia de otras verdades.[23] (Frege 1985, p. 182)

En suma, el núcleo de estas objeciones de Frege a la nueva concepción axiomática formal de Hilbert reside sin dudas en su concepción tradicional del método axiomático.[24] Consecuentemente, el objetivo central de la respuesta de Hilbert será disipar estas confusiones de Frege, provocadas por una comprensión para él errónea de la naturaleza de su nueva concepción abstracta del método axiomático.

4.2.2. Hilbert y la concepción abstracta del método axiomático

4.2.2.1. Motivaciones y objetivos diferentes

Hilbert percibió rápidamente que las críticas de Frege a su nueva concepción del método axiomático estaban originadas en, y respondían a, preocupaciones bien distintas a las suyas. En efecto, mientras que los primeros comentarios y críticas que recibió de sus colegas se trataban de cuestiones estrictamente matemáticas, los reparos de Frege eran a primera vista de una naturaleza puramente filosófica. Es por ello que, en el inicio de su carta, Hilbert reconoce que los problemas que lo condujeron a su nueva concepción del método axiomático son de un carácter puramente matemático. Hilbert describe entonces los problemas que lo llevaron a su abordaje axiomático a la geometría en *Fundamentos de la geometría*, como así también sus objetivos principales, de la siguiente manera:

> (...) todavía una observación: si queremos entendernos mutuamente, no debemos olvidar que los propósitos que nos guían son de una clase diferente. La necesidad fue lo que me impulsó a construir mi sistema de axiomas: deseaba mostrar la posibilidad de comprender aquellos teoremas de la geometría, que consideraba los resultados más importantes de las investigaciones geométricas: que el axioma de las paralelas no es una consecuencia de los demás axiomas, y lo mismo para el axioma de Arquímedes, etc. Quería responder la

[23] Esta concepción clásica del método axiomático es repetida constantemente en (Frege 1903a; 1906b).

[24] Las críticas de Frege al método axiomático de Hilbert no se limitan a las recién expuestas. En particular, las cartas subsiguientes de Frege como sus artículos de 1903 y 1906, analizan en detalle y critican el procedimiento utilizado en *Fundamentos de la geometría* para demostrar la independencia de un axioma o grupo de axiomas. Por las razones ya mencionadas, no me ocuparé aquí de estas críticas. Blanchette (1996) y Hallett (2012) analizan específicamente estas críticas.

> pregunta acerca de si la proposición, según la cual en dos rectángulos iguales con la misma base también los lados son iguales – este teorema es pues el fundamento de toda la planimetría –, puede ser demostrada, o si más bien es, como en Euclides, un nuevo postulado. Quería en general lograr la posibilidad de responder y comprender tales preguntas, [tales como] por qué la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos y cómo este hecho se vincula con el axioma de las paralelas. Que mi sistema de axiomas permite responder tales cuestiones de un modo definitivo, y que las respuestas a estas cuestiones son sorprendentes e incluso bastante inesperadas, en mi opinión lo muestra mi *Festschrift* como así también los escritos de algunos de mis estudiantes que lo han continuado; entre éstos me referiré sólo a la disertación del Sr. Dehn, que será publicada pronto en los *Mathematische Annalen*.[25]

Hilbert reconoce aquí que aquello que lo condujo a su nueva concepción del método axiomático fue la búsqueda de una herramienta matemática eficaz que le permitiera resolver aquellos problemas que consideraba los más importantes de la geometría, y no consideraciones o reflexiones de carácter filosófico respeto de la naturaleza de las definiciones y los axiomas en matemática, como las que parecen estar detrás de las críticas de Frege.

Por otra parte, tres de los cuatro ejemplos que menciona Hilbert son de una naturaleza particular, a saber: son problemas geométricos que tienen que ver con la independencia de un teorema o de un axioma, respecto de un conjunto de principios dados. Los dos primeros casos, i.e., el axioma de las paralelas y el axioma de Arquímedes[26], son ejemplos bien evidentes y paradigmáticos. El otro ejemplo mencionado se pregunta por la relación entre el axioma de las paralelas y una de sus consecuencias más inmediatas, i.e., el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Este teorema, que no se cumple en las geometrías no–euclídeas, ha sido pensado a menudo como equivalente al axioma de las paralelas, e incluso fue postulado como un posible substituto.[27] Sin embargo, M. Dehn, uno de los estudiantes más destacados de Hilbert en el campo de la geometría, logró mostrar que este teorema sólo implica al axioma de las paralelas si el axioma de Arquímedes es supuesto. En otras palabras, el axioma de las paralelas es independiente del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, si el axioma de Arquímedes no forma parte del sistema de axiomas.[28]

[25] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (I); en (Frege 1976, p. 65).
[26] El caso del axioma de Arquímedes es abordado en detalle en el capítulo 6.
[27] Cf. (Hallett 2010, p. 449).
[28] Véase (Dehn 1900).

Los ejemplos mencionados por Hilbert revelan que las preguntas sobre la independencia fueron una motivación muy relevante en su elaboración del método axiomático formal, y de hecho, estas cuestiones constituyen la novedad más importante de sus investigaciones geométricas.[29] En gran parte, la relevancia de estas investigaciones residía en que la nueva concepción formal del método axiomático permitió por primera vez elaborar una técnica que hacía posible el estudio sistemático de la independencia.[30] La técnica introducida por Hilbert a los efectos de desarrollar estas investigaciones consistió en la construcción de "modelos", que en este contexto específico significaba traducir la teoría que se pretendía investigar dentro de otra teoría matemática.[31] Pero para ello era necesario que los conceptos primitivos no estén ligados a su significado intuitivo habitual, sino que, por el contrario, puedan ser reinterpretados libremente. En otras palabras, las investigaciones de independencia, que como señala Hilbert arrojaron resultados sorprendentes e incluso inesperados, presuponían el rechazo de la tesis de Frege de la *fijación de la referencia*. Mas este rechazo fue provocado por el descubrimiento de resultados matemáticos importantes, y no en cambio por un análisis filosófico previo acerca de las nociones de axioma y definición en matemática.

4.2.2.2. Axiomas y 'definiciones implícitas'

Como hemos señalado en una sección anterior, para Frege una de las ideas más problemáticas en la "nueva" concepción del método axiomático defendida por Hilbert, consistía en la afirmación según la cual los axiomas debían ser tomados a su vez como definiciones de los términos primitivos de la teoría axiomática. Luego, uno de los objetivos principales de Hilbert en su respuesta, será entonces explicarle a Frege esta idea más detalladamente. En primer lugar, y a diferencia del *Festschrift*, Hilbert afirma ahora que *la totalidad de los axiomas*, y no un grupo en particular, debe ser considerada como la definición de los términos primitivos del sistema:

> Considero a mi explicación en §1 como la definición de los conceptos punto, línea y plano, si uno añade además todos los axiomas de los grupos I a V

[29] Sobre la importancia de la independencia en las investigaciones geométricas de Hilbert, véase el capítulo 6.

[30] Por supuesto, las preguntas por la independencia antecedieron a Hilbert, principalmente en las investigaciones que dieron lugar al descubrimiento de geometrías no–euclídeas. Sin embargo, el método axiomático formal de Hilbert fue lo que permitió abordar estas cuestiones por primera vez de un modo sistemático y formal.

[31] El 'modelo' más utilizado por Hilbert en *Fundamentos de la geometría* fue el cuerpo Ω de números algebraicos.

> como marcas características (...) Por otra parte, intentar dar una definición de punto en tres líneas me parece imposible, ya que recién el sistema de axiomas en su totalidad proporciona una definición completa. Cada axioma contribuye algo a la definición.[32]

Una afirmación similar se encuentra en la misma carta, aunque en el resumen elaborado por Frege:

> Por lo tanto, la definición completa del concepto de punto es recién alcanzada cuando la construcción del sistema de axiomas está terminada. Cada axioma contribuye algo a la definición.[33]

Y finalmente, Hilbert realiza una afirmación semejante en sus "Problemas matemáticos" de París:

> Cuando se trata de investigar los fundamentos de una ciencia, entonces se debe construir un sistema de axiomas que contiene una descripción exacta y completa de las relaciones existentes entre las ideas elementales de esa ciencia. *Los axiomas así establecidos son al mismo tiempo las definiciones de aquellas ideas elementales.* (Hilbert 1900b, p. 299. El énfasis es mío.)

Debemos admitir que Hilbert no es muy directo en su explicación, ni tampoco lo suficientemente claro como sería deseable. Ello ha provocado que no sólo Frege haya encontrado insatisfactoria esta aclaración, sino que además exista en la actualidad un disenso importante respecto de cómo debe interpretarse su afirmación de que el conjunto de los axiomas *define* a los términos primitivos de la teoría. En particular, existen dos interpretaciones especialmente influyentes que es preciso mencionar. La primera de estas interpretaciones explica la enigmática afirmación de Hilbert asociándola, por lo general de un modo bastante impreciso, a la teoría de las *definiciones implícitas*. Según esta interpretación, al afirmar que los axiomas "definen" los términos primitivos de su sistema axiomático, Hilbert pretendía mostrar que los elementos primitivos como 'punto', 'línea', 'plano', etc., podían ser concebidos estrictamente como *cualquier objeto o entidad que satisfaga las relaciones prescriptas por los axiomas*. Más precisamente, los axiomas constituyen para Hilbert definiciones *implícitas* de los objetos primitivos, puesto que no postulan directamente las condiciones necesarias y suficientes para su aplicación, como

[32] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (I); en (Frege 1976, p. 66).
[33] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (II); en (Frege 1976, pp. 69–70).

ocurre con las definiciones explícitas, sino que en cambio los "definen" al indicar que ellos pueden ser entendidos como cualquier entidad que satisface un conjunto dado de axiomas formales.[34]

La expresión "definición implícita" fue utilizada por primera vez, en relación el método axiomático de Hilbert, por Enriques (1907).[35] Sin embargo, Moritz Schlick (1882–1936) presentó, en su *Allgemeine Erkenntnistheorie* de 1918, una de las lecturas que más influyó en el establecimiento y difusión de la interpretación de la teoría "hilbertiana" de las definiciones implícitas por medio de axiomas.[36] Asimismo, otro autor que ha contribuido notablemente a formar esta interpretación, muy esparcida en el ámbito de la filosofía de la ciencia, ha sido Hermann Weyl.[37] Finalmente, en la actualidad y en ámbito de la filosofía de la matemática, Shapiro (1997; 2000; 2005) ha enfatizado el papel central de las definiciones implícitas para entender la nueva concepción de la matemática que se desprende del método axiomático formal de Hilbert. Más precisamente, Shapiro ha

---

[34] Cf. (Bunnin y Yu 2004, pp. 334–335). Es importante destacar que en la literatura es habitual hablar de la teoría de Hilbert de las definiciones implícitas, sin explicitar debidamente qué es lo que se entiende por esta noción. Sin embargo, esta explicitación resulta sumamente relevante, en la medida en que la noción de definición implícita ha sido entendida de diversas maneras. Por ejemplo, Gabriel (1978) distingue al menos tres ideas distintas asociadas a la noción definición implícita. En primer lugar, el concepto de definición implícita introducido inicialmente por Gergonne (1818). Brevemente, Gergonne concibe las definiciones implícitas como enunciados compuestos tanto por términos cuyo significado es desconocido como por términos cuyo significado es conocido, y por medio de los cuales el significado desconocido puede ser asido:

> Uno percibe claramente que, si una frase contiene una única palabra cuya significación nos es desconocida, la enunciación de esta misma frase podrá bastarnos para revelar su valor. Por ejemplo, si a alguien que conoce las palabras *cuadrilátero* y *triángulo*, pero nunca ha escuchado pronunciar la palabra *diagonal*, se le dice que *cada una de las dos diagonales de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos*, entonces aquel comprenderá en el acto qué es una diagonal. (Gergonne 1818, pp. 22–23)

Un aspecto central de las definiciones implícitas *en el sentido de Gergonne* es que no se refiere a sistemas de axiomas o postulados, con lo cual no puede ser identificada con la segunda noción de definición implícita, a saber: *las definiciones por medio de axiomas o postulados*, a la que he aludido recién.

Finalmente, un tercer modo de entender este concepto consiste en identificarlo con las llamadas definiciones contextuales, en donde el significado de la expresión que debe ser definida es determinado en el contexto con otras expresiones ya definidos. El ejemplo clásico de este tipo de definiciones es la definición russelliana del operador de identidad en *Principia Mathematica* (1910).

Por último, no debe confundirse a ninguna de estas tres nociones, y en especial la segunda, con la posterior noción formal, proveniente de la teoría de modelos, de *definible implícitamente* de Beth.

[35] "Su relevancia [i.e. la concepción del rigor en geometría] se plasma en el punto de vista lógico y abstracto a partir de postulados [tomados] como estipulaciones arbitrarias, y de la totalidad de las relaciones lógicas, expresadas por ellos, que forman un tipo de *definición implícita* de los primitivos" (Enriques 1907, p. 11).

[36] Véase (Schlick 1918, § 7).

[37] Véase, por ejemplo, (Weyl 1949, pp. 25–29).

señalado que un claro indicio de la adopción de Hilbert de la teoría de las definiciones implícitas, es su afirmación de que los términos primitivos de su teoría axiomática son definidos o "adquieren su significado" exclusivamente en virtud de las relaciones que mantienen entre sí, tal como son establecidas por los axiomas.[38] Es decir, las definiciones implícitas de Hilbert son a su vez una suerte de "definiciones holísticas", en el sentido de que un concepto en particular es caracterizado exclusivamente en términos de su relación con otros conceptos del sistema: por ejemplo, un punto es un punto en virtud de su relación con otros dos objetos, llamados líneas y planos.[39] Según Shapiro, Hilbert adhiere a esta tesis en un breve pasaje de su segunda carta a Frege:

> En mi opinión, un concepto puede ser establecido lógicamente sólo en su relación con otros conceptos. Estas relaciones, formuladas en ciertas afirmaciones, las llamo axiomas, y así llegamos a la idea de que los axiomas (quizás junto con otras proposiciones que asignan nombres a los conceptos) son las definiciones de los conceptos.[40]

Independientemente de los reparos que se tenga para con la noción anterior de definición implícita, esta interpretación enfrenta un problema importante: en ningún lugar, por lo menos en lo que se ha podido ser constatado hasta la actualidad, Hilbert utiliza expresamente el término "definición implícita". En otras palabras, no se conoce hasta el momento ninguna fuente textual en la que Hilbert acepte expresamente el concepto de "definición implícita". Ello ha provocado que se intente explicar de otra manera la alusión de Hilbert de que el conjunto de axiomas proporciona una definición de los términos primitivos. De acuerdo con esta segunda interpretación, la sugerencia de que los axiomas de una teoría matemática son a la vez definiciones debe ser tomada en serio; sin embargo, por ello no debe entenderse que los axiomas proporcionan definiciones implícitas de los términos primitivos, sino en cambio *definiciones explícitas de un concepto de orden superior*, esto es, un concepto bajo el que caen estructuras o dominios, o en términos más modernos, una *n–tupla* para un respectivo n.[41] Al afirmar que la totalidad de los axiomas definen los ideas elementales de la teoría, Hilbert estaría entonces proponiendo que sus axiomas definen explícitamente el concepto de un espacio euclídeo tridimensional, o sea, un concepto de orden superior.

[38] Cf. (Shapiro 1997, p. 164).
[39] Cf. (Klev 2011, p. 662).
[40] Hilbert a Frege, 22 de septiembre de 1900; en (Frege 1976, p. 79).
[41] En el caso del sistema de axiomas para la geometría de Hilbert, sería $n = 6$.

Diversos autores han señalado que esta interpretación fue sugerida inicialmente por el propio Frege. En efecto, éste sostiene en numerosas oportunidades, tanto en sus cartas a Hilbert y Liebemann como en sus artículos posteriores (Frege 1903a; 1906b), que en el caso de que pudiera decirse que los axiomas hilbertianos definen algo, entones se trataría de conceptos de segundo orden:

> Si examinamos los axiomas de Hilbert y los consideramos partes de la definición de un punto, encontramos que las características indicadas en ellos no son de primer grado, no son propiedades que ha de tener un objeto para ser un punto, sino que son de segundo grado. Toda definición de un concepto por medio de ellas sólo puede producir un concepto de segundo grado. Es ciertamente dudoso que quede definido un concepto, porque no sólo la palabra 'punto' está allí presente, sino además las palabras 'línea' y 'plano'. (Frege 1903a, p. 374)

El contexto de estas afirmaciones no permite decidir con certeza si por concepto de segundo orden Frege está pensando en un concepto bajo el cual pueden caer dominios o estructuras. Antes bien, la descripción que presenta en sus cartas a Hilbert sugiere lo contrario, en tanto llama allí conceptos de segundo orden a los cuantificadores.[42] Más aún, la cuestión de si Frege pudo haber llegado a concebir algo similar a nuestra idea moderna de estructura, es todavía objeto de una intensa discusión entre un gran número de intérpretes de Frege.[43] En cualquier caso, una discusión en detalle sobre este punto nos alejaría del tema central de este trabajo.

El primer autor en proponer explícitamente esta interpretación, con el objetivo de fondo de rechazar la noción misma de definición implícita, fue Carnap. En su artículo "Eigentiliche und uneigentliche Begriffe" (1927), Carnap afirma que los axiomas de Hilbert pueden ser vistos como proporcionando una *definición explícita* de una relación n–ádica de orden superior:

> También por medio de los axiomas de Hilbert, como por medio de cualquier sistema de axiomas, un determinado *concepto propio* es definido explícitamente. Si designamos las tres clases básicas del sistema de axiomas con p, g, y e, las tres relaciones básicas con I, Z, K, entonces el concepto propio es la relación H de seis lugares, cuyos argumentos son designados por medio de las variables básicas:

[42] Cf. Frege a Hilbert; 6 de enero de 1900; en (Frege 1976, pp. 73–74).
[43] Sobre este punto véase (Heck 1995).

> $H = \hat{p}\hat{g}\hat{e}\hat{Y}\hat{Z}\hat{K}$ [... producto lógico de los axiomas ...]. Df (Carnap 1927, p. 369)[44]

De la misma manera, Bernays defendió más tarde esta misma interpretación, aunque esta vez en relación directa con las críticas de Frege. En primer lugar, este autor acepta la crítica de Frege respecto de que la noción de "definición implícita por medio de axiomas" es poco clara y está abierta a malentendidos. Sin embargo, advierte al mismo tiempo que esta teoría no coincide con la posición de Hilbert. Por el contrario, para Bernays la afirmación de Hilbert pretende ilustrar el hecho de que los axiomas definen explícitamente un concepto de orden superior, y sólo en relación a este predicado relacional de orden superior los términos como 'punto', 'línea' y 'plano' "adquieren significado":

> Los axiomas de Hilbert definen, no los conceptos 'punto', 'línea', 'incidencia', etc., sino el concepto de espacio euclídeo tridimensional, y los otros conceptos meramente con respecto a éste; o, más detalladamente, los axiomas de Hilbert formulan las condiciones en virtud de las cuales los dominios de individuos y las tres funciones lógicas referidas a ellos constituyen el sistema de puntos, líneas y planos, junto con las relaciones de incidencia, orden y congruencia de un *espacio tridimenional euclídeo*.
>
> Este punto de vista concuerda íntegramente como la explicación de Hilbert, mencionada arriba, de que los axiomas no son individualmente una definición en sí mismos, sino que son partes de una definición que comprende a la totalidad de ellos.[45] (Bernays 1942, pp. 92–93)

En el contexto de la literatura más actual, esta interpretación ha sido defendida por Resnik (1974; 1980) y Chihara (2004), entre otros. Este modo de entender la propuesta hilbertiana evita así las dificultades provenientes de la noción, mayormente imprecisa, de definición implícita; asimismo, se condice en gran medida con el resultado de una axiomatización formal de la geometría, tal como es descripta por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*. Sin embargo, enfrenta igualmente el mismo problema que la interpretación anterior: en ningún lugar Hilbert afirma explícitamente que sus axiomas definen "estructuras". Luego, creo es posible interpretar la afirmación de Hilbert, según la cual los axiomas definen los términos primitivos de la teoría, de una manera diferente. Esta interpretación alternativa resulta más cercana al modo en que éste describe, *en este*

[44] El símbolo ˆ significa aquí un operador de abstracción. Citado por (Klev 2011, p. 663).
[45] Véase además (Bernays 1967).

período, la naturaleza de su nueva concepción formal del método axiomático. Para ello sus notas de clases resultan esenciales.

4.2.2.3. Una interpretación alternativa

Hemos visto en capítulos anteriores que la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899) fue precedida por un curso sobre geometría euclídea, dictado en el semestre de invierno de 1898/99. Las notas de clases para este curso – disponibles en dos versiones, (Hilbert 1898b) y Hilbert (1898a) – no sólo fueron la base que Hilbert utilizó para elaborar su monografía, sino que en diversos aspectos son más completas.[46] Por ejemplo, Hilbert elimina en su libro prácticamente todas las reflexiones y aclaraciones metodológicas que pudieran resultar extrañas, o quizás inadecuadas, para una obra de carácter y con objetivos estrictamente matemáticos. Dicho de otro modo, en estas notas de clases Hilbert se permite ciertas licencias y realiza en ocasiones interesantes aclaraciones respecto de cómo concibe su novedoso abordaje axiomático a las teorías matemáticas. Respecto del problema que venimos analizando, estas aclaraciones son pertinentes.[47]

En el comienzo de sus notas de clases, Hilbert señala que un rasgo central de su axiomatización de la geometría consiste en considerar que los términos primitivos tales como 'punto', 'línea', 'plano', 'entre', etc., no poseen en sí mismos ningún significado o propiedad, que pueda pensarse como anterior a la teoría. Ello lo expresa de la siguiente manera:

> Tomamos como elementos a los *puntos*, *líneas* y *planos*. Es decir, tenemos un sistema de cosas, a las que llamamos *puntos* y designamos con A, B, C $\ldots$, *un segundo* y un *tercer* sistema de cosas, a las que llamamos *líneas* (a, b, c,$\ldots$) y planos (α, β, γ,$\ldots$) respectivamente. Puntos, líneas y planos son sólo términos para cosas, a las que no les asociamos ninguna intuición ni tampoco ninguna propiedad. Sistema dado, i.e., es posible distinguir a estas cosas entre sí $A \neq B$. (Hilbert 1898b, p. 224)

A diferencia de su presentación en *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se permite aquí explicar de un modo un poco más directo y con más detalle, en qué consiste

[46] Sobre las diferencias entres estas notas de clases y el *Festschrift* véase la introducción de M. Hallett al capítulo 4 de (Hallett y Majer 2004).

[47] Otro cuestión metodológica que Hilbert trata más detalladamente en estas notas, y en *Fundamentos de la geometría* sólo es mencionada fugazmente en la conclusión, es la 'pureza del método'. Sobre este tema véase (Hallett 2008) y (Arana y Mancosu 2012).

la idea central de su nuevo abordaje axiomático (formal) a la geometría: comenzamos presuponiendo la existencia de tres sistemas o conjuntos de 'cosas' u objetos cualesquiera, a las que sin embargo no se les asigna *ninguna propiedad ni ninguna característica particular*. Es decir, aunque estas 'cosas' son designadas con los nombres utilizados habitualmente para referirse a los objetos geométricos básicos, ello es lo único que comparten estrictamente con estos objetos de la intuición. De ese modo, los axiomas son los *únicos* responsables de asignarles a estas 'cosas pensadas' (*Gedankendinge*), como se las llama más tarde, sus características específicas y de describir las relaciones que mantienen entre sí. Hilbert lo pone exactamente en estos términos, en la otra versión de este mismo curso:

> Vayamos ahora a nuestra tarea. *Para construir la geometría euclídea pensamos tres sistemas de cosas, a las que llamamos puntos, líneas y planos y deseamos designar con* $A, B, C, \ldots; a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$. No debemos pensar que por medio de los nombres escogidos estamos añadiendo a estas cosas ciertas propiedades geométricas, como las que comúnmente asociamos con estas designaciones. *Hasta ahora sólo sabemos que las cosas de un sistema son diferentes a las cosas de los otros dos sistemas. Estas cosas reciben todas las demás propiedades a través de los axiomas, que reunimos en cinco grupos.* (Hilbert 1898a, p. 304)

Hilbert nos alerta además que en la estricta separación o disociación de los objetos primitivos de su sistema respecto de los objetivos geométricos intuitivos usuales, reside una de las dificultades – y las novedades – más importantes para comprender su nueva manera de abordar axiomáticamente la geometría:

> Quisiera ahora resaltar la dificultad principal para la comprensión [de este curso]. Un esfuerzo y atención considerables son necesarios para abstraerse constantemente de las cosas, representaciones e intuiciones con las que uno está familiarizado, como así también para ubicarse nuevamente en un estado de ignorancia. Sin embargo, someterse a este esfuerzo es más fácil, cuando el objetivo es reconocido. (Hilbert 1898b, p. 223)

Estos pasajes ofrecen así un contexto interesante para analizar la afirmación de que los axiomas son *definiciones*. Hilbert advierte aquí de un modo más directo que en el *Festschrift* que, si bien en su sistema axiomático los nombres geométricos habituales son utilizados para referirse a los objetos primitivos, es importante cuidarse de no asociarle a estos últimos sus significados o connotaciones ordinarias e informales. Por el contrario, resulta vital comprender que, en su concepción abstracta del método axiomático, las únicas propiedades y relaciones que deben ser tenidas en cuanta son aquellas estipuladas o postuladas por los axiomas. Y ello es lo mismo que decir que *los axiomas son los únicos que pueden desempeñar la función de asignarles propiedades o características a los objetos primitivos del sistema*. Es entonces en este preciso sentido que, poco después, Hilbert afirma que sus axiomas cumplen también el papel de definiciones:

> Las definiciones (esto es, las explicaciones, definiciones y axiomas), deben contener todo, y sólo [ellas] pueden contener todo, lo que se requiere para la construcción de una teoría. Con respecto a mi división entre explicaciones, definiciones y axiomas, que conjuntamente hacen a las definiciones en su sentido, puede decirse que contiene cierto grado de ambigüedad, aunque creo que en general, mi ordenación es utilizable y perspicua.[48]

La manera en la que Hilbert describe, en sus notas de clases, este aspecto central de su concepción formal del método axiomático, nos lleva a pensar que su afirmación de que los axiomas definen los términos primitivos no debe ser entendida *en un sentido literal*. Es decir, la explicación que ofrece Hilbert en estos pasajes, respecto de cómo deben ser concebidos en su sistema los objetos primitivos, sugiere que para él los axiomas no constituían *definiciones en un sentido estricto*, i.e., determinaciones o estipulaciones del significado de estas expresiones. Por el contrario, estas aclaraciones nos llevan a pensar que la problemática afirmación de Hilbert no era sino una manera abreviada de señalar que, en su sistema de axiomas para la geometría, los objetos y relaciones primitivas reciben estricta y exclusivamente de los axiomas sus características o propiedades geométricas fundamentales. En otras palabras, al afirmar que "los axiomas definen los conceptos primitivos", Hilbert no estaba proponiendo una nueva teoría de las definiciones matemáticas, sino que más bien intentaba señalar que los objetos primitivos de su sistema no poseían una "estructura" o un conjunto de propiedades previas a la axiomatización. En efecto, podría decirse que precisamente a este aspecto responde la elección de Hilbert del término sumamente vago e impreciso 'sistema de cosas', o sea, un conjunto de objetos cualesquiera, completamente indeterminados.

Por otra parte, el hecho de que Hilbert haya intentado ilustrar este rasgo fundamental de su concepción axiomática, afirmando que los "axiomas son a la vez definiciones",

[48] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (II); en (Frege 1976, p. 68).

puede a su vez explicarse en razón de que su nuevo abordaje axiomático destierra definitivamente las viejas definiciones de los términos primitivos *à la Euclides*. Es decir, en la medida en que su presentación axiomática de la geometría omite las clásicas definiciones de los *Elementos*, en cierto sentido resulta lógico que Hilbert haya afirmado, con una finalidad más bien alegórica, que en los axiomas puede encontrarse ahora "la definición" de los objetos primitivos. Luego, Hilbert le expresa a Frege su rechazo a las definiciones de Euclides de la siguiente manera:

> Si uno está buscando otras definiciones de 'punto' – por ejemplo, a través de una paráfrasis tal como 'sin extensión', etc. – entonces debo ciertamente oponerme a tales intentos del modo más decisivo; uno está buscando algo que nunca podrá encontrar porque no hay nada allí; y todo se pierde, se vuelve vago y confuso, y termina en un juego de escondidas.[49]

En resumen, si se toman en consideración las explicaciones presentadas en sus notas de clases para cursos sobre geometría, es posible concluir que Hilbert no propuso directamente la teoría de las definiciones implícitas por medio de postulados. Al señalar que los "axiomas definen los términos primitivos", como por ejemplo, 'entre', Hilbert no parece haber defendido la idea de que los axiomas determinan o fijan, aunque de un modo indirecto, el significado de estos términos; en consecuencia, no sostuvo explícitamente que sus axiomas eran auténticas definiciones o definiciones en un sentido estricto. Por el contrario, Hilbert parece haber querido indicar meramente que estos conceptos reciben sus características o propiedades geométricas fundamentales de los axiomas. Por otro lado, la segunda interpretación según la cual los axiomas definen una clase de modelos, es decir, predicados relacionales de orden superior, se corresponde con el resultado de una axiomatización formal *à la Hilbert*, aunque no parece haber sido lo que éste tenía en mente en aquella etapa inicial. Principalmente, parece difícil pensar que Hilbert haya defendido un interpretación tal, en tanto que esta lectura presupone por lo menos una mínima claridad conceptual respecto de ciertas nociones "metalógicas", que ciertamente Hilbert no parecía disponer en aquel momento.[50]

4.2.2.4. 'Entramado de conceptos' y estructuralismo

Si los axiomas son los únicos responsables de asignarles características a los objetos básicos del sistema axiomático, es claro que el contenido de los conceptos 'punto', 'línea',

[49] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (I); en (Frege 1976, p. 66).
[50] Sobre esta afirmación véase el capítulo 6.

etc. dependerá exclusivamente del sistema de axiomas dado. Es decir, tomando como ejemplo el sistema de Hilbert, el concepto de línea no tiene las mismas propiedades geométricas si el grupo de axiomas de continuidad está formado solamente por el axioma de Arquímedes, o si en cambio comprende también al axioma de completitud. Hilbert le llama la atención a Frege sobre esta cuestión:

> Cada axioma contribuye algo a la definición, y por lo tanto cada nuevo axioma modifica el concepto. 'Punto' es en cada caso algo diferente en la geometría euclídea, no–euclídea, arquimediana, no–arquimediana.[51]

Por otra parte, en tanto que para Hilbert los objetos primitivos no se refieren a objetos geométricos de la intuición, es claro que su sistema axiomático no constituye un conjunto de proposiciones verdaderas acerca de determinado dominio intuitivo fijo, i.e., el espacio físico. Hilbert destaca expresamente que este cambio, de gran importancia en el estatus de las teorías matemáticas, es una consecuencia inmediata de su nueva concepción del método axiomático. Más precisamente, al responder la crítica de Frege respecto de que en su sistema los términos 'punto', 'línea', etc. refieren en distintos momentos a cosas diferentes, Hilbert afirma:

> Pero es evidente que cada teoría es sólo un entramado [*Fachwerk*] o esquema de conceptos, junto con sus mutuas relaciones necesarias, y que los elementos básicos pueden ser pensados del modo que uno quiera. Si al hablar de mis puntos pienso en un sistema de cosas cualquiera, por ejemplo, el sistema: amor, ley y deshollinador . . . , y luego supongo que todos mis axiomas describen las relaciones entre estas cosas, entonces mis proposiciones, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, son también válidas para estas cosas. En otras palabras: cualquier teoría puede ser aplicada a un número infinito de sistemas de cosas. Lo único que se necesita es aplicar una transformación uno–a–uno y establecer que los axiomas son respectivamente los mismos para las cosas transformadas (. . .) Esta circunstancia no puede ser nunca un defecto de la teoría (más bien es una ventaja enorme), y en cualquier caso es inevitable.[52]

La descripción de una teoría matemática axiomatizada como un "entramado o esquema de conceptos" [*Fachwerk von Begriffe*], que más tarde se convertirá en un rasgo

[51] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (I); en (Frege 1976, pp. 66–67).
[52] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899 (I); en (Frege 1976, p. 67).

característico de su método axiomático formal[53], no constituye para nada una novedad introducida por Hilbert aquí por primera vez. Por el contrario, hemos visto que esta descripción es presentada en 1894, en sus notas de clases "Los fundamentos de la geometría" (Hilbert 1894). Sin embargo, este pasaje ha sido citado e interpretado por varios autores como un indicio contundente del estructuralismo *avant la lettre* de Hilbert; es decir, como la fuente textual más importante de la interpretación formalista estructural.[54] Esta interpretación afirma que, desde 1899, la concepción axiomática de Hilbert consistía básicamente en el intento de reducir las teorías matemáticas a distintos entramados de conceptos o estructuras relacionales, que diversos dominios pueden compartir entre sí, y que constituyen ahora el objeto de estudio de la matemática. En uno de sus artículos dedicados al programa de Hilbert, Detlefsen (1993a) ha resumido esta interpretación de la siguiente manera:

> El formalismo inicial de Hilbert consiste en la posición según cual que las teorías matemáticas definen objetos abstractos llamados 'estructuras relacionales', y que estas estructuras, que son los objetos propios de investigación matemática, constituyen 'formas' que diferentes dominios particulares tienen en común.(Detlefsen 1993a, p. 286)

En función del análisis que hemos llevado a cabo hasta el momento, es posible concluir que esta interpretación 'formalista estructural' describe correctamente el giro metodológico que Hilbert le imprimió a la idea de axiomática. Las fuentes textuales que hemos presentado en éste y en los capítulos anteriores, muestran claramente que Hilbert concibió el resultado de una axiomatización formal de la geometría como en "entramado de conceptos", en sus propias palabras, que no se halla atado a un dominio fijo, sino que puede tener diversas interpretaciones o aplicaciones, en otras teorías matemáticas o físicas, como también en la "realidad". Sin embargo, en lo que resta de este capítulo intentaré mostrar que esta interpretación no abarca completamente la temprana concepción axiomática de Hilbert. Es decir, sostendré que existen otros elementos en su concepción axiomática, cuya importancia es por él enfatizada en diversas oportunidades, que no son tenidos en cuenta por esta interpretación. Más precisamente, en primer lugar, estos elementos están vinculados al *significado* que Hilbert deposita, en esta etapa temprana, en la tarea de llevar a cabo una axiomatización (formal) de la geometría;

[53] Especialmente, ésta es la clásica descripción de una teoría matemática axiomatizada que aparece en "El pensamiento axiomático" (Hilbert 1918).

[54] Por ejemplo, Resnik (1974; 1980), Chihara (2004) y en especial Shapiro (1997; 2000; 2005), construyen su interpretación alrededor de ese pasaje de la correspondencia entre Hilbert y Frege.

en segundo lugar, a cómo concebía la manera en que debía proceder dicho proceso de axiomatización. Pero antes de emprender esta tarea, haré un pequeño paréntesis en la exposición para referirme a otro tema que Hilbert aborda en su respuesta a Frege.

4.2.2.5. Consistencia y existencia matemática

Otra de las ideas interesantes que se encuentran en esta carta de Hilbert es la formulación de su famosa tesis, según la cual la "consistencia implica existencia". Como ya he repetido, una de las diferencias más profundas entre la concepción formal o moderna y la concepción clásica del método axiomático reside en que la primera no considera a los axiomas como proposiciones verdaderas autoevidentes acerca de un determinado dominio de objetos. En consecuencia, la *evidencia* (intuitiva) deja de ser adoptada como el criterio de validez de un sistema de axiomas, y es en cambio reemplazada por el requerimiento de la consistencia. Hilbert no tuvo problemas entonces en notar que muchas de las críticas de Frege se originaban precisamente en su concepción todavía clásica del método axiomático. Es por ello que intentó ilustrarle esta diferencia de la siguiente manera:

> Si Ud. prefiere llamar a mis axiomas marcas características de un concepto, que son dadas y están contenidas en mis explicaciones, no tengo ningún tipo de objeción, salvo quizás que contradice la práctica habitual de los matemáticos y físicos; y por supuesto debo además poder postular libremente como yo desee las marcas características. Puesto que desde el momento en que he establecido un axioma, éste existe y es 'verdadero'; ello me lleva a otro punto importante de su carta. "Ud. escribe: 'Yo llamo axioma a las proposiciones ... de la verdad del axioma se sigue que ellos no se contradicen entre sí' .... Encontré por demás interesante esta afirmación en su carta, puesto que desde que he pensado, escrito y ensañado sobre el tema, he sostenido exactamente lo contrario: si los axiomas arbitrarios dados no se contradicen unos con otros, con todas sus consecuencias, entonces ellos son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Éste es para mí el criterio de verdad y existencia.[55]

En primer lugar, la respuesta de Hilbert no explica para nada su posición de un modo perspicuo y coherente. En particular, su afirmación, según la cual de la consistencia

[55] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 66).

de un axioma se sigue que es “verdadero”, es poco feliz, y sin una explicación adecuada que permita comprender su sentido, resulta incorrecta. Por otra parte, un análisis mínimamente detallado de su tesis de que la “consistencia implica existencia” nos alejaría demasiado del tema de esta sección, en la medida en que supone que se expliquen por lo menos algunas de las novedades teóricas introducidas por Hilbert, en una etapa pre–axiomática, en el campo de la teoría de invariantes. Así, por ejemplo, deberíamos comentar su prueba *no constructiva* de la existencia de una base finita para un sistema de invariantes de cualquier forma algebraica.[56] Me limitaré entonces a hacer unos breves comentarios en relación a la formulación de Hilbert de esta tesis en su respuesta a Frege, que no es sino una repetición de lo afirmado poco antes en sus notas de clases.[57]

Hilbert entiende que el primer paso (lógico) en la construcción de un sistema axiomático abstracto consiste en *suponer la existencia* de tres sistemas de ‘cosas’, acerca de las cuales los axiomas establecerán ciertas relaciones.[58] Dicho de otro modo, en un sistema axiomático abstracto, partimos de la suposición de que las ‘cosas’ de las que hablan los axiomas *existen*. En “Über den Zahlbegriff” (Hilbert 1900c), Hilbert lo advierte precisamente en estos términos:

> En el caso de la construcción de la geometría, el procedimiento es fundamentalmente distinto. Lo común en ella es comenzar con la suposición de la existencia de una totalidad de elementos. Es decir, suponemos desde un inicio la existencia de tres sistemas de objetos: los puntos, las rectas y los planos. (Hilbert 1900c, p. 180)

Una prueba de la consistencia del sistema de axiomas constituye así, para Hilbert, la justificación de esta suposición inicial. Si podemos encontrar una prueba de que la aplicación de los axiomas no puede conducir a una contradicción, entonces hemos probado su consistencia, y el concepto descripto por los axiomas *existe matemáticamente*. Hilbert lo señala de la siguiente manera en “Problemas matemáticos”:

[56] La exposición más completa del “Teorema de la base de Hilbert” o “Teorema fundamental de Hilbert” se encuentra en Hilbert (1893).

[57] Para un estudio integral de la noción de existencia matemática en Hilbert, que va desde sus trabajos sobre teoría de invariantes hasta el ‘programa de Hilbert’, véase Boniface (2004). Desde una perspectiva más acotada, pero más filosófica, este tema ha sido analizado por Hallett (1995b) y Ferreirós (2009).

[58] Me refiero al primer paso ‘lógico’, ya que Hilbert también reconoce que un estudio axiomático de una disciplina matemática supone que su estado de desarrollo sea avanzado; esto es, que exista un consenso importante respecto del conjunto de hechos fundamentales que componen a la disciplina en cuestión, y que constituirá el punto de partida del análisis axiomático.

> Si a un concepto se le asignan características que se contradicen entre sí, entonces sostengo: el concepto no existe matemáticamente. Así, por ejemplo, no existe matemáticamente el número real cuyo cuadrado es -1. Pero si puede demostrarse, a través de la aplicación de un número finito de inferencias lógicas, que las características asignadas al concepto nunca pueden conducir a contradicciones, entonces afirmo que la existencia matemática de ese concepto ha sido de ese modo demostrada. (Hilbert 1900b, pp. 300–301)

Hilbert tomó esta definición de existencia matemática de sus propias notas de clases para el curso de 1898/1899:

> 'Existir' significa que las características (axiomas) que definen a un concepto no se contradicen entre sí; esto es, por medio de deducciones puramente lógicas no es posible demostrar, a partir de todos los axiomas con la excepción de uno, una proposición que contradice a este último axioma. (Hilbert 1898b, p. 282)

La concepción abstracta del método axiomático acarrea como novedad que la consistencia, antes considerada un mero corolario de la verdad de los axiomas, es tomada ahora como una condición necesaria y suficiente de la existencia. Sin embargo, Hilbert insiste constantemente en que aquello que implica la consistencia es la existencia *matemática*. Es decir, su abordaje axiomático formal propicia una distinción precisa entre la existencia dentro de la matemática o existencia matemática y la existencia física o real. El sistema de 'cosas', cuya existencia es el presupuesto inicial en la construcción de un sistema formal de axiomas, es un sistema de 'objetos–pensados'. Como señala Hilbert elocuentemente en un pasaje de sus "Diarios científicos" [*Wissenschaftliche Tagebücher*] que ya hemos citado: "Los puntos, líneas y planos de mi geometría no son sino 'cosas del pensamiento' [*Gedankendinge*], y en cuanto tales nada tienen que ver con los puntos, líneas y planos reales".[59] La afirmación de su existencia está de ese modo restringida a un nivel conceptual y por lo tanto debe ser asegurada o legitimada dentro de este nivel. La condición requerida para que estas 'cosas del pensamiento' existan matemáticamente es que puedan ser perspicuamente caracterizadas y que su utilización no lleve a contradicciones. Para Hilbert, ello se alcanza cuando el concepto es *introducido axiomáticamente* y se demuestra que el sistema axiomático es consistente. En otras palabras, la existencia de un concepto matemático, justificada sobre la base de una descripción axiomática consistente del mismo, no significa sino que el concepto matemático es válido y puede ser

[59] Citado en (Hallett 1994, p. 167).

utilizado legítimamente. Una consecuencia del método axiomático formal es entonces, para Hilbert, que el problema de la existencia de los conceptos y objetos con los que trabaja la matemática, se convierte en una cuestión *intra-matemática*.[60]

Por otra parte, esta nueva manera de concebir la noción de existencia matemática está íntimamente ligada a la actitud de Hilbert respecto de los elementos ideales. Hemos mencionado brevemente esta cuestión en el capítulo anterior.[61] Tomando como ejemplo el sistema de axiomas para la aritmética de los reales, Hilbert afirma que un elemento, por ejemplo $\sqrt{-1}$, tiene un estatus diferente, o es un elemento "ideal", cuando es añadido *por primera vez* a este sistema axiomático. Sin embargo, una vez que se han establecido las leyes que permiten integrar o relacionar los nuevos elementos con los elementos del sistema original, entonces puede decirse que estos "elementos ideales" existen de la misma manera que los elementos del sistema dado en primer lugar. La única condición para ello será demostrar la consistencia del nuevo sistema ampliado, que comprende a los elementos ideales. Hilbert le explica a Frege este aspecto importante, inmediatamente a continuación de su afirmación de que la consistencia implica existencia:

> La proposición 'toda ecuación tiene una raíz' es verdadera o la existencia de la raíz está demostrada, ni bien el axioma 'toda ecuación tiene una raíz' puede ser añadido a los otros axiomas aritméticos, sin generar la posibilidad de una contradicción, no importa cuáles sean las conclusiones que de ellos se sigan. Esta concepción es la clave para comprender no sólo mi *Festschrift*, sino también mi reciente conferencia de Múnich sobre los axiomas de la aritmética, donde he demostrado, o al menos he indicado como probar, que el sistema usual de los números reales *existe*, mientras que el sistema de todos los números cardinales cantorianos o de todos los alefs – como lo afirma Cantor en un sentido similar, aunque utilizando otras palabras – no existe.[62]

La designación de un elemento como 'ideal' sólo puede tener un carácter *relativo*, o sea, en relación al sistema original de axiomas del que partamos y a los elementos contemplados por éste como reales. En otras palabras, en un nuevo sistema de axiomas

[60] Las discusiones de Hilbert sobre la existencia matemática se dan en el contexto del "abordaje abstracto conceptual" a la matemática, que comenzó a ser dominante a partir de la segunda mitad del XIX, sobre todo en Alemania. Sobre este contexto general puede consultarse (Ferreirós 2007, cap. 1).

[61] Véase sección 3.6.2.

[62] Hilbert a Frege, 29 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 66).

consistente, que incluya tanto a los elementos del sistema original como a los anteriormente llamados 'elementos ideales', tal distinción no tiene mayor sentido. En el nuevo sistema, todos los elementos pueden ser considerados como 'reales'. Hilbert señala esta idea en un texto bastante posterior, aunque todavía en relación a la utilización del método de los elementos ideales en geometría:

> La expresión "elementos ideales" sólo tiene aquí sentido, hablando propiamente, desde el punto de vista del sistema del que hemos partido. En el nuevo sistema no distinguimos de ninguna manera entre elementos reales e ideales. (Hilbert 1992, p. 91)

En resumen, las opiniones divergentes de Frege y Hilbert en torno a la cuestión de la consistencia y la existencia matemática expresan visiblemente las diferencias entre una concepción clásica y una concepción moderna o abstracta del método axiomático. Asimismo, debe admitirse que en numerosas ocasiones Hilbert expone sus puntos de vista de un modo bastante confuso, que ciertamente puede dar lugar a errores conceptuales importantes. Por ejemplo, su afirmación de que una vez establecidos los axiomas son "verdaderos"; o también su escueta e imprecisa caracterización, al menos en textos publicados, de los axiomas como *definiciones* de los términos primitivos del sistema. Sin embargo, creo que nuestro análisis muestra claramente que Hilbert entendió que el origen de las críticas de Frege se encontraba en su concepción tradicional del método axiomático, y que el objetivo primordial de su respuesta fue explicarle su nueva concepción axiomática formal. En este sentido, es lógico que ciertos aspectos de esta concepción hayan sido allí obviados, mientras que otros hayan sido enfatizados considerablemente; en particular, me refiero aquí a su descripción de las teorías matemáticas (axiomatizadas) como entramados de conceptos, que como dijimos ha sido quizás la fuente textual más importante utilizada por los defensores de la interpretación formalista estructural. En las secciones siguientes, intentaré exhibir otros aspectos de la concepción axiomática temprana de Hilbert que, en mi opinión, permiten ofrecer una mirada más completa y mejor contextualiza. Para ello me ocuparé de analizar sus notas de clases para el curso "Principios lógicos del pensamiento matemático" (Hilbert 1905b;c), quizás su exposición más completa del método axiomático formal, en este período inicial de sus trabajos sobre los fundamentos de la matemática.

4.3. *Principios lógicos del pensamiento matemático* (1905)

Tras la publicación de *Fundamentos de la geometría* en 1899, Hilbert conservó por algún tiempo su interés en las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría. Un claro ejemplo lo constituye su notable artículo "Über die Grundlagen der Geometrie" (Hilbert 1902a), en donde utiliza el concepto de grupo de transformaciones para ofrecer una caracterización del plano euclídeo, sobre la base de un conjunto muy simple de axiomas o premisas; este trabajo es considerado además una instancia crucial en el desarrollo del concepto de espacio topológico.[63] Sin embargo, con la llegada del nuevo siglo, comenzó a centrar cada vez más su atención en las investigaciones sobre los fundamentos de la aritmética y la teoría de conjuntos. Más precisamente, luego de presentar un sistema de axiomas para la aritmética de los números reales en (Hilbert 1900b), Hilbert propuso directamente al problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética como el segundo de sus "Problemas matemáticos" de París.

Este interés por los fundamentos de la aritmética se convirtió en una cuestión mucho más apremiante, cuando en 1903 Russell hizo publicas las famosas paradojas que afectaban al sistema lógico de Frege. Este descubrimiento perturbador motivó en gran medida el artículo "Sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética" (Hilbert 1905a), presentado en 1904 en el congreso internacional de matemáticos en Heidelberg. Hilbert esboza allí un programa para atacar el problema de la consistencia de la aritmética, tal como lo concebía el aquel momento. La idea básica era *desarrollar simultáneamente las leyes de la lógica y la aritmética*, en lugar de intentar reducir una a la otra o a la teoría de conjuntos. El punto de partida era la noción básica de "objeto–pensado", que podía ser designado por medio de un signo y que ofrecía la posibilidad de tratar las pruebas matemáticas como meras fórmulas. En este sentido, este trabajo es considerado como el primer antecedente de su posterior programa para la fundamentación de la aritmética y el análisis. Sin embargo, Hilbert desarrolló allí esta idea de un modo muy rudimentario e impreciso. En efecto, el artículo se limita a declarar meramente que este modo de encarar el problema podía ayudar a conseguir la pretendida prueba directa de la consistencia de la aritmética.

Estas ideas fueron elaborados más detalladamente poco después en el curso "Principios lógicos del pensamiento matemático" (Hilbert 1905b;c), dictado en el semestre de verano de 1905. El objetivo principal de estas notas manuscritas era analizar los "fundamentos lógicos" de la matemática, una tarea motivada por el reconocimiento de que

[63] Cf. (Hilbert 1902a). Sobre este trabajo véase (Torretti 1984, pp. 185–188).

"la aplicación correcta [en la matemática] de la lógica tradicional conduce a contradicciones" (Hilbert 1905b, p. 4). En la segunda parte de este curso, Hilbert presenta un cálculo formalizado para la lógica proposicional, que podía ser utilizado en lugar de la "lógica tradicional", como la lógica subyacente de sus sistemas axiomáticos.[64]

Ahora bien, la construcción de este cálculo proposicional es precedida por una extensa discusión respecto de las ideas fundamentales del método axiomático, y de su aplicación a la aritmética, la geometría y las ciencias naturales. Más aún, la primera parte de este curso constituye la exposición de Hilbert más completa y acabada de la concepción del método axiomático, que es posible encontrar en esta primera "etapa geométrica". En particular, Hilbert reflexiona allí expresamente respecto de la naturaleza del método axiomático formal y de su significado para la matemática. En lo que resta de este capítulo me ocuparé de analizar la descripción del método axiomático presentada por Hilbert en estas notas de clases de 1905.

4.3.1. La idea general del método axiomático

La primera parte de estas notas de clases lleva el nombre de "El pensamiento axiomático". El objetivo general de Hilbert en esta sección es ilustrar la aplicación del método axiomático a la aritmética, la geometría y diversas ciencias físicas. En particular, en estas notas encontramos esbozos de sistemas axiomáticos para la mecánica, la termodinámica, el cálculo de probabilidades, teoría cinética de gases y la electrodinámica.[65]

Hilbert se ocupa en primer lugar de comentar la aplicación del método axiomático a la aritmética. Como una suerte de novedad, nuestro autor distingue en estas notas tres vías o caminos que pueden ser utilizados para fundar esta teoría matemática: la vía geométrica, la vía genética y la vía axiomática.

La *vía geométrica* se identifica con la 'aritmética de segmentos' presentada en *Fundamentos de la geometría*.[66] La idea general de este procedimiento consiste en tomar un segmento fijo cualquiera como unidad lineal y definir un "número" como un punto sobre la recta; a continuación, se utilizan los axiomas y teoremas de la geometría para obtener cada una de las propiedades aritméticas usuales de los números reales. Por ejemplo, Hilbert ilustra este procedimiento con la ley conmutativa para la suma:

> Luego, definimos la suma $a + b$ como el punto que se obtiene cuando se

[64] Sobre el cálculo proposicional desarrollado por Hilbert en este curso véase *infra*, capítulo 6.

[65] En su libro sobre las investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la física, Corry (2004a) ha analizado estos sistemas de axiomas.

[66] Éste será el tema central del capítulo 5.

> traslada el segmento $\overline{0a}$ desde b en dirección a $0\vec{1}$. La ley conmutativa de la adición no es entonces sino un hecho geométrico de la intuición: el mismo punto se obtiene cuando se traza $\overline{0a}$ desde b, o $\overline{0b}$ desde a. (Hilbert 1905b, p. 7)

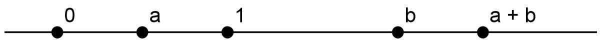


Figura 4.1.: (Hilbert 1905b, p. 7)

Una contribución importante de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), en relación a esta vía geométrica para fundamentar la aritmética, fue exponer el papel central de los "teoremas de incidencia" [*Schliessungssätze*] para probar distintas propiedades "algebraicas" de su cálculo de segmentos; por ejemplo, uno de sus resultados más importantes fue mostrar que la ley conmutativa de la multiplicación dependía del teorema de Pascal. Sin embargo, aunque todas las leyes de la aritmética de los reales podían ser definidas de manera geométrica, Hilbert sostiene que esta vía debe ser rechazada en función de lo siguiente:

> Lo anterior debe bastar para identificar esta manera de fundamentar la aritmética, que naturalmente debe ser completada. Aquello que resulta dudoso y extraño en esta vía se nota inmediatamente. Este método consiste esencialmente en la utilización de la intuición y de proposiciones geométricas, mientras que la geometría y sus fundamentos son mucho menos simples que la aritmética, e incluso para la fundamentación de la geometría a menudo los números son ya utilizados. De ese modo, se pretende fundar lo más simple en lo más complejo, o al menos, en mucho más de lo que resulta necesario para esta fundamentación. (Hilbert 1905b, p. 9)

Por otro lado, la segunda vía para la fundamentación de la aritmética, i.e., el método genético, había sido mencionada y criticada previamente por Hilbert. Este método consistía en definir los números reales a través de su construcción sucesiva partiendo de los números naturales. Es decir, este procedimiento "genético" era la vía predominante en aquel momento y consistía básicamente en tomar como punto de partida a los números naturales e ir construyendo cada uno de los conjuntos numéricos (enteros, racionales, irracionales, reales) en función de la definición de nuevas operaciones sobre el conjunto original. Estas construcciones sucesivas, sin embargo, podían ser realizadas de diversas maneras; especialmente, en lo que refiere a la definición de los números reales. Los procedimientos habituales consistían en definir un número real como la cortadura de números racionales (Dedekind), como el límite de una sucesión fundamental o "de Cauchy" de números racionales (Cantor) o como el límite de una serie infinita de números racionales (Weierstrass).[67] Luego, Hilbert encuentra insatisfactorio este método debido a que no define a los números reales en virtud de sus propiedades, sino más bien a partir de procesos de construcciones sucesivas. Ello determinaba entonces que el concepto mismo de número real no sea definido de un modo lógicamente perspicuo. En "Sobre el concepto de número" (Hilbert 1900c), señala precisamente esta deficiencia de la construcción de los números reales como límite de sucesiones fundamentales de números racionales:

> De acuerdo con lo dicho, por conjunto de números reales no tenemos que entender la totalidad de las leyes posibles según las cuales pueden avanzar los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien, como acabamos de decir, un sistema de objetos cuyas relaciones se encuentran determinadas por el sistema finito y cerrado de los axiomas. (Hilbert 1900b, p. 184)

Hilbert se inclina entonces por la tercera vía: el método axiomático. En las próximas páginas del manuscrito encontramos una caracterización muy precisa de su sistema axiomático para los números reales, acompañada además por una serie de interesantes reflexiones respecto de la naturaleza y función del método axiomático en general. Por ejemplo, Hilbert resume la idea básica del método axiomático de la siguiente manera:

> Los elementos generales de una concepción axiomática han estado siempre, inadvertidamente, en la base de la matemática, como así también de otras ciencias. Uno tiene a su disposición un acervo de hechos [*Thatsachenmaterial*], que consiste en ciertas proposiciones, incluso algunas dudosas, conjeturas, etc.; luego se selecciona un conjunto de estas proposiciones, se las separa y se las agrupa en un sistema particular [*einem eigenen System*], *el sistema axiomático*. Éste es concebido entonces como el fundamento, y se busca derivar de él todo el material presentado por medio del combinaciones lógicas, según las leyes lógicas conocidas. Asimismo, ahora nos interesan especialmente las siguientes tres preguntas: 1) ¿son los axiomas *consistentes*,

[67] Sobre estos procedimientos "genéticos" para definir los números reales, véase (Boniface 2002).

> ello es, es imposible deducir por medio de puras operaciones lógicas una proposición y su negación?; 2) ¿son ellos *independientes* entre sí, o sea, no se puede deducir alguno de los axiomas a partir de los otros? (...); 3) ¿es el sistema axiomático *completo*, i.e., contiene todos los hechos en cuestión como consecuencias lógicas? (Hilbert 1905b, pp. 11–12)

Esta explicación de la idea general de la axiomática puede ser considerada como la descripción estándar del método axiomático formal, tal como lo concibe Hilbert en esta primera etapa. Un aspecto importante de esta caracterización se ve reflejado en el reconocimiento de que la aplicación del método axiomático presupone *siempre* que sea dado un conjunto de hechos y proposiciones básicas. Es decir, la manera en que aquí se entiende la naturaleza y función del método axiomático, implica que se lo concibe fundamentalmente como una herramienta que debe ser aplicada a una teoría matemática, o científica, *preexistente*. Luego, en mi opinión, ello significa que, para Hilbert, en el proceso de axiomatización se debe prestar particular atención al carácter o naturaleza de los conjuntos básicos de la disciplina en cuestión. Esta afirmación se comprenderá mejor a continuación.

El sistema de axiomas para los números reales presentado en estas notas coincide con el sistema axiomático de (Hilbert 1900c). Este sistema estaba compuesto por dieciocho axiomas y constituye la primera caracterización axiomática de un cuerpo ordenado completo, de acuerdo con su denominación moderna. Por otro lado, Hilbert resalta el carácter abstracto o formal del sistema axiomático, por medio de la siguiente observación:

> Entendemos por "números" a ciertas cosas cualesquiera, cuyas propiedades son expresadas por los siguientes axiomas, y que designamos con a, b, c (...); el conjunto de los números es el sistema de estas cosas. Utilizamos aquí la lógica habitual sin mayores reparos [*Skrupellos*], para someterla a una investigación posterior. En particular adoptamos el signo "=" y el concepto de igualdad: $a = b$ significa que a y b son el mismo número, la misma cosa. (Hilbert 1905b, p. 13)

Al menos dos cuestiones relevantes en relación a este pasaje deben ser señaladas. En primer lugar, es interesante notar que Hilbert evita aquí utilizar la expresión según la cual los axiomas definen los conceptos primitivos del sistema axiomático; por el contrario, solamente sostiene que la función de los axiomas es establecer o precisar las propiedades de estos objetos primitivos o no definidos. En segundo lugar, Hilbert reconoce que la lógica subyacente de sus sistemas axiomáticos es la "lógica tradicional", que por otra parte hasta el momento había sido *presupuesta* sin mayores reparos. La importancia de este reconocimiento descansa en que, sin una adecuada explicitación de cuáles son los principios o leyes lógicas que serán utilizados, la afirmación de que es posible construir la aritmética – o cualquier otra teoría matemática axiomatizada – de un modo puramente lógico, sobre la base de los axiomas, posee más bien un carácter programático. Hilbert lo aclara en la otra versión de estas notas de clases (Hilbert 1905c), o sea, en la versión redactada por Max Born:

> Estos axiomas resultan suficientes para construir a partir de ellos la aritmética de un modo "puramente lógico". Lo que debe entenderse por "puramente lógico" lo asumimos aquí de antemano. (Hilbert 1905c, pp. 13–14)

A continuación de esta aclaración, Hilbert formula los dieciocho axiomas que conforman su sistema axiomático para los números reales, de acuerdo a cómo fueron presentados previamente en (Hilbert 1900c). Sin embargo, en este manuscrito encontramos como una novedad una discusión, bastante detallada, de algunos resultados "meta–lógicos" en relación a este sistema de axiomas. Más aún, Hilbert señala que este tipo resultados pone de manifiesto la capacidad del método axiomático para promover fructíferas investigaciones y llegar a nuevos y sorprendentes descubrimientos matemáticos:

> La fecundidad ilimitada del método axiomático consiste en la discusión, por él mismo suscitada, respecto de la *dependencia* y la *independencia*[68] de los axiomas particulares entre sí. (Hilbert 1905b, p. 21)

En este sentido, algunos de los resultados que son allí mencionados, aunque no todos rigurosamente demostrados, son los siguientes[69]:

- El axioma 3 (existencia del 0) puede deducirse de los axiomas 1 y 2, si se asume también la ley de asociativa para la adición (axioma 7).[70]
- El axioma 6 (existencia del 1) puede deducirse de los axiomas 4 y 5, si se cuenta además con ley asociativa para la multiplicación (axioma 9).
- La ley conmutativa de la adición (axioma 8) puede deducirse de los axiomas 1–7 y de las dos leyes distributivas (axiomas 10 y 11).

[68] Hilbert agrega en la lápiz sobre el texto original: "o sea, en la segunda de la preguntas anteriores".
[69] Cf. (Hilbert 1905b, pp. 21–33).
[70] La numeración del sistema de axiomas que Hilbert presenta en estas notas de clases coincide con la de (Hilbert 1900c).

Asimismo, algunos resultados sobre la *independencia* de los axiomas son:

- El axioma 12 no es deducible de los axiomas 1–11, 13–16; es decir, no puede ser probado si no se cuenta también con el axioma de Arquímedes (axioma 17).
- El axioma de Arquímedes es independiente a los axioma 1–16.

Es oportuno mencionar que estas proposiciones constituyen los únicos resultados "metamatemáticos" alcanzados por Hilbert en este período, en relación al sistema de axiomas para la aritmética de los números reales. Por otro lado, una vez concluida su explicación de la aplicación del método axiomático a la aritmética, Hilbert prosigue con la geometría. Sin embargo, antes de emprender esta tarea, realiza una observación muy interesante respecto de cómo debe entenderse su presentación axiomática de los números reales. Esta observación resulta sumamente relevante para comprender cómo concibe Hilbert, en esta etapa temprana, la naturaleza del método axiomático:

> En la presentación axiomática de la aritmética nos hemos alejado totalmente del concepto original de número y con ello nos hemos separado de toda intuición. Los números se convirtieron para nosotros solamente en un entramado de conceptos, a los que por supuesto sólo somos guiados por la intuición; sin embargo, podemos operar con este entramado sin recurrir a la ayuda de la intuición. Ahora bien, para que este sistema conceptual pueda ser aplicado a las cosas que nos rodean, *es necesario que sea construido de tal manera que forme una completa analogía con nuestras intuiciones más triviales y con los hechos de la experiencia.* (Hilbert 1905c, p. 27. El énfasis es mío.)

Hilbert reconoce que la intuición es una motivación fundamental en la construcción del entramado de conceptos; más precisamente, asevera que en la construcción del sistema de axiomas somos *guiados por la intuición.* El contexto que antecede a esta afirmación sugiere que la guía proporcionada por la intuición atañe particularmente a la *elección de los axiomas.* Continuando con el caso de la aritmética, Hilbert estaría sugiriendo que su elección de los axiomas aritméticos se vio orientada por un conjunto de hechos intuitivos de la aritmética, que por ejemplo pueden ser inmediatamente percibidos cuando se intenta fundarla siguiendo el método geométrico.[71] La intuición nos guía entonces en la construcción del entramado de conceptos, en tanto que nos presenta el conjunto de

[71] Esta afirmación de Hilbert se encuentra ciertamente en contradicción con su posición "proto–logicista" respecto de los fundamentos de la aritmética, según hemos visto en los capítulos anteriores.

hechos básicos que se encuentran en la base de la disciplina que se intenta axiomatizar. Hilbert sostiene exactamente esta idea, en la otra versión del manuscrito de 1905:

> El objetivo de toda ciencia es, en primer lugar, establecer un esquema de conceptos basado en axiomas a cuya misma concepción somos naturalmente guiados por la intuición y la experiencia. Idealmente, todos los fenómenos de un dominio dado aparecerán como una parte del esquema y todos los teoremas que pueden ser derivados de los axiomas encontrarán su expresión allí. (Hilbert 1905a, p. 36)

Ahora bien, el sistema axiomático, una vez establecido, debe ser considerado como completamente independiente de la intuición y la experiencia. Los conceptos primitivos no aluden directamente a objetos o a hechos de la intuición. Es decir, los "números" no se refieren a nuestras intuiciones, o a su construcción geométrica, sino a un 'sistema de objetos pensados', cuyas propiedades son completa y rigurosamente expresadas por los axiomas. De la misma manera, en el caso de la geometría, no debe pensarse que los términos 'puntos', 'líneas' y 'planos' refieren directamente a objetos dados a nuestra "intuición geométrica". Hilbert lo repite una vez más de un modo similar, esta vez aludiendo al sistema de axiomas para la geometría:

> Así, si queremos establecer un sistema de axiomas para la geometría, el punto de partida debe sernos dado por los hechos intuitivos de la geometría y éstos deben corresponderse con el esquema que debe ser construido. Los conceptos obtenidos de este modo, sin embargo, deben ser considerados como separados completamente de la experiencia y la intuición. (Hilbert 1905b, pp. 36–37)

La *teoría matemática misma* es ahora, para Hilbert, 'sólo un esquema de conceptos'. En cuanto tal puede ser diversamente interpretada, tanto por medio de aplicaciones al mundo físico, como así también utilizando otras teorías matemáticas y físicas. Por medio de la afirmación de que su sistema de axiomas caracteriza un "entramado de conceptos", Hilbert subraya abiertamente que sus sistemas axiomáticos son abstractos o formales. Asimismo, esta caracterización de la naturaleza de los sistemas axiomáticos coincide totalmente con el modo en que se suele describir la concepción formal del método axiomático. Es decir, coincide con las caracterizaciones esgrimidas anteriormente, en especial con la explicación presentada por Hilbert en su correspondencia con Frege. Sin embargo, en el pasaje recién citado se establece explícitamente un requisito ulterior, sugerido también previamente en otras oportunidades: todo sistema de axiomas para una teoría matemática en particular debe *ser construido de tal manera que forme una completa analogía con nuestras intuiciones más triviales y con los hechos de la experiencia*. Debemos reconocer que no es fácil interpretar a qué se refiere Hilbert aquí con esta condición. Es decir, más allá del sentido figurativo, y por lo tanto impreciso, que pueda conferirse a este requisito: ¿qué significa realmente que un sistema de axiomas *formal*, ya sea para la aritmética, para la geometría euclídea, o para cualquier otra teoría matemática, debe conformar al mismo tiempo una completa analogía con nuestras intuiciones básicas? En mi opinión, esta afirmación expresa una condición o una serie de criterios, que Hilbert establece como guía para la *elaboración misma de un sistema axiomático* para una disciplina matemática en particular. Estos criterios se explican en el fondo en función del *significado* que Hilbert le otorga al método axiomático para la matemática – y el pensamiento teórico en su conjunto–, como así también en virtud de su concepción de la matemática en general.

La 'analogía con nuestras intuiciones más básicas', que un sistema de axiomas debe reflejar, se manifiesta en dos criterios que deben ser tenidos en cuenta en el momento de la elaboración o construcción de un sistema axiomático, a saber:

- la elección de los conceptos primitivos del sistema axiomático.
- el lenguaje utilizado para formular el sistema de axiomas.

Es preciso admitir que estos criterios de ningún modo pueden ser comparados con las condiciones formales que Hilbert impone sobre todos los sistemas de axiomas: consistencia, completitud e independencia. Quizás en algún sentido puede decirse que se corresponden con el requisito de la *simplicidad*, que es el único que no es capaz de recibir un tratamiento formal. Asimismo, debe señalarse también que estos dos criterios no son exhaustivos, pues la "analogía del sistema de axiomas con nuestras intuiciones básicas" puede ponerse de manifiesto de otras maneras. Sin embargo, como se verá a continuación, Hilbert menciona específicamente a estos dos criterios, y los identifica además como dos componentes importantes de su concepción del método axiomático.

4.3.2. Método axiomático e intuición

El criterio de la *elección de los conceptos primitivos* es mencionado por Hilbert en relación al sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental, que por otra parte es el caso ejemplar de la aplicación del método axiomático formal. En estas notas de clases nuestro autor comienza del modo habitual su análisis axiomático de la geometría elemental, introduciendo "abstractamente" los objetos primitivos de su sistema, a saber: pensamos tres sistemas distintos de cosas, a las que llamamos *puntos*, *líneas* y *planos*. Asimismo pensamos que estos objetos están relacionados entre sí en virtud de ciertas "conexiones lógicas", cuya descripción exacta y completa es expresada a través de los axiomas.[72] Ahora bien, una vez introducidos de esta manera los conceptos primitivos, Hilbert realiza la siguiente aclaración al respecto:

> Vamos a disponer estas determinaciones de tal manera, que las tres clases de elementos y sus relaciones se correspondan exactamente con los puntos, líneas y planos de la geometría intuitiva. El hecho de que tomemos [a estos objetos] como las cosas básicas de nuestro entramado conceptual es en efecto arbitrario, y sólo obedece a su simplicidad intuitiva. En principio, también podríamos tomar círculos y esferas como las cosas primitivas, y formular sus determinaciones de tal modo que se correspondan con la geometría intuitiva. (Hilbert 1905b, p. 39)

Dado que el entramado de conceptos que se obtiene a través de la axiomatización formal no se refiere a un dominio intuitivo fijo de objetos, para la concepción abstracta del método axiomático no sólo es posible tomar cualquier principio o postulado como axioma de la teoría – respetando como único requisito la *consistencia* – sino que también los conceptos primitivos pueden ser elegidos libremente. En el caso de la geometría euclídea, ello significa que el sistema axiomático formal no debe necesariamente partir de tres nociones primitivas llamadas 'punto', 'línea' y 'plano', tal como ocurre en la geometría "intuitiva".[73] Hilbert reconoce entonces este hecho, al señalar que siempre existe una cierta "arbitrariedad" en la elección de las nociones primitivas de un sistema axiomático formal. Sin embargo, al mismo tiempo declara una vez más que, en *su propia elaboración de un sistema de axiomas* para la geometría elemental, respetó el criterio según el cual no sólo los axiomas sino además los elementos primitivos debían corresponderse lo más posible con la geometría de la intuición. Sin dudas, éste es un criterio que no debe ser necesariamente adoptado por cualquiera que intente llevar a cabo una axiomatización formal de una teoría matemática en particular. Sin embargo, es claro que para Hilbert era un requisito a tener en cuenta en la elaboración de un sistema axiomático, es decir,

[72] Cf. (Hilbert 1905b, pp. 38–39).

[73] Recordemos que en 1891 Hilbert define a la geometría intuitiva como "la geometría que reduce sus proposiciones a los hechos simples de la intuición, sin investigar ella misma su origen y legitimidad" (Hilbert 1891a, p. 21); asimismo, dentro de la geometría de la intuición incluye a la geometría escolar (teoremas de congruencia, polígonos, círculos, etc.), la geometría proyectiva y el *analisis situs*. Véase capítulo 1, sección 1.2.2.

como un elemento importante de su modo de entender el método axiomático formal. En el caso específico del sistema axiomático para la geometría, la insistencia respecto de la relevancia de este criterio se explica, en gran parte, en virtud de que en esta época Hilbert consideraba realmente a la geometría como una teoría matemática fundada en gran medida en la intuición y en la experiencia. En este preciso sentido, aunque el proceso mismo de axiomatización formal consistía en una proyección desde un plano intuitivo inicial a un nivel puramente conceptual, Hilbert juzgaba como esencial que su sistema de axiomas conserve de algún modo un cierto *paralelismo* con el contenido intuitivo–empírico de esta teoría. En otras palabras, la supuesta arbitrariedad con la que *en principio* podían ser elegidos los axiomas y términos primitivos de un sistema axiomático, estaba para Hilbert limitada *de hecho* por la exigencia de que éstos permanezcan lo más cerca posible a los *hechos básicos de la intuición*.

Por otra parte, el *lenguaje* empleado para formular el sistema axiomático constituye para Hilbert un segundo aspecto concreto que pone de manifiesto la analogía del 'entramado de conceptos' con nuestras intuiciones básicas. A diferencia de algunos de sus contemporáneos, en especial de los matemáticos italianos, como por ejemplo Peano y Pieri, Hilbert no utilizó un lenguaje "formal" artificial para formular su sistema de axiomas, tanto para la geometría elemental como para los números reales. Por el contrario, prefirió utilizar un lenguaje natural, enriquecido con algunos términos técnicos. En esta etapa temprana los sistemas hilbertianos son *sistemas axiomáticos formales no formalizados*.[74] Ahora bien, es interesante mencionar que estas notas de clases muestran con claridad que esta decisión de Hilbert no respondió a limitaciones conceptuales o técnicas, sino que más bien estaba ligada a su modo de concebir la naturaleza de los sistemas axiomáticos abstractos. Más precisamente, por un lado Hilbert admite que la utilización de un lenguaje natural para formular un sistema axiomático puede generar graves confusiones y equivocaciones, si no se tiene bien presente desde un inicio que los conceptos primitivos no tienen un significado intuitivo prefijado de antemano. Sin embargo, al mismo tiempo, reconoce que si se tiene presente este hecho fundamental de los sistemas axiomáticos abstractos, entonces el empleo del lenguaje natural resulta muy útil para facilitar la comprensión de la teoría axiomática y para conservar de alguna manera una referencia al contenido intuitivo original de los axiomas. Hilbert señala este punto de la siguiente manera:

> En la ambigüedad del lenguaje, a la que aquí nos enfrentamos, reside una dificultad, que pronto en nuestras investigaciones lógicas se volverá inapro-

[74] Sigo aquí la terminología adoptada por (Cassini 2007, p. 57).

> piada y generadora de confusiones. Utilizaremos todas estas expresiones como sinónimos[75], y con ellas sólo pensaremos en las relaciones establecidas por medio de los axiomas; estas relaciones, que hemos postulado para cosas abstractas del pensamiento, no tienen ningún significado intuitivo; y si de hecho utilizamos las designaciones habituales 'estar sobre', o luego 'entre', 'congruente', etc., ello sólo se debe a que a través de ellas es más fácil comprender el contenido de los axiomas, y de ese modo uno puede al final – una vez que el edificio conceptual esté completo – hacer más fácil su aplicación a los fenómenos. (Hilbert 1905b, p. 40)

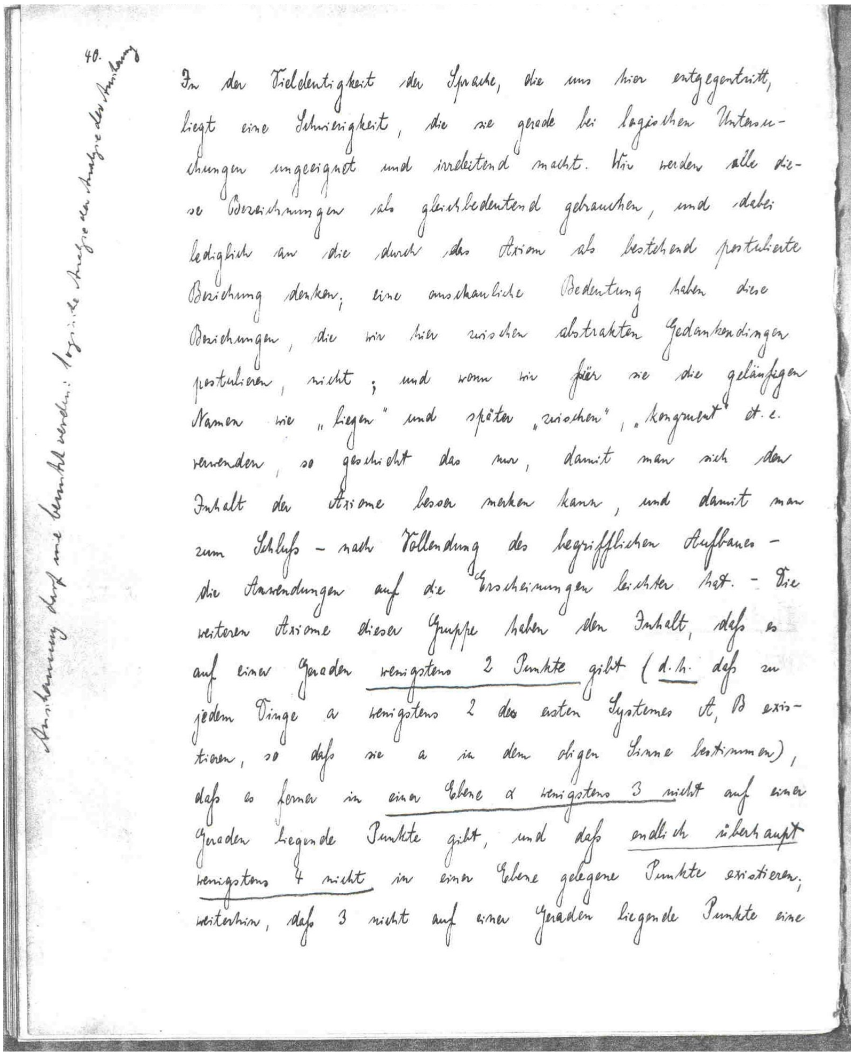
Al margen de esta página, Hilbert agrega además la siguiente observación (figura 4.2):

> Nunca debemos apoyarnos en la intuición: análisis lógico de la analogía de la intuición.

La elección de los nombres habituales tales como 'punto', 'línea' y 'plano', para referirse a los conceptos básicos del sistema de axiomas, no es de ningún modo un requisito impuesto por la concepción abstracta del método axiomático. Por el contrario, si no se advierte desde un comienzo que estas nociones primitivas no poseen un significado intuitivo concreto, entonces dicha elección puede llegar a provocar graves malentendidos. Sin embargo, Hilbert afirma que, una vez que este hecho fundamental es debidamente reconocido, el uso de los nombres habituales para designar a los conceptos geométricos primitivos *conlleva un beneficio de una importancia considerable para el sistema axiomático propuesto*, a saber: permite comprender mejor el "contenido original" de los axiomas y, de ese modo, conserva, por decirlo de alguna manera, el paralelismo entre el contenido intuitivo original de la geometría y el entramado conceptual.[76] Más aún, en un pasaje posterior, Hilbert afirma que la utilización de un lenguaje artificial, como por ejemplo la creación arbitraria de palabras, para hacer más evidente el carácter formal del sistema axiomático, es un recurso ciertamente legítimo pero totalmente inadecuado en función del objetivo final de un análisis axiomático (formal):

> Cuando uno se pregunta por el lugar, dentro de todo el sistema, de un teorema conocido desde antaño como el de la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo, entonces naturalmente se debe apartar de las creencias tradicionales y de la intuición, y aplicar solamente las consecuencias lógicas de

[75] "Cuando esta relación [de incidencia] tiene lugar decimos también que el punto A 'se encuentra sobre' la línea a, o que a 'pasa por' el punto A, o que a 'une' a los puntos A y B" (Hilbert 1905b, p. 38).
[76] Sobre la noción de "contenido", a la que alude aquí Hilbert, véase (Arana y Mancosu 2012).



40.

Anschauung darf nie bewusst verwendet werden: logische Analyse der Analyse der Anschauung

In der Vieldeutigkeit der Sprache, die uns hier entgegentritt, liegt eine Schwierigkeit, die sie gerade bei logischen Untersuchungen ungeeignet und irreleitend macht. Wir werden alle diese Bezeichnungen als gleichbedeutend gebrauchen, und dabei lediglich an die durch das Axiom als bestehend postulierte Beziehung denken; eine anschauliche Bedeutung haben diese Beziehungen, die wir hier zwischen abstrakten Gedankendingen postulieren, nicht; und wenn wir für sie die geläufigen Namen wie „liegen" und später „zwischen", „kongruent" etc. verwenden, so geschieht das nur, damit man sich den Inhalt der Axiome besser merken kann, und damit man zum Schluss – nach Vollendung des begrifflichen Aufbaues – die Anwendungen auf die Erscheinungen leichter hat. – Die weiteren Axiome dieser Gruppe haben den Inhalt, dass es auf einer Geraden wenigstens 2 Punkte gibt (d.h. dass zu jedem Dinge a wenigstens 2 des ersten Systemes A, B existieren, so dass sie a in dem obigen Sinne bestimmen), dass es ferner in einer Ebene α wenigstens 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte gibt, und dass endlich überhaupt wenigstens 4 nicht in einer Ebene gelegene Punkte existieren; weiterhin, dass 3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte eine

Figura 4.2.: Fotografía del manuscrito de (Hilbert 1905b, p. 40)

los axiomas presupuestos. Para asegurarse de ello, a menudo se ha hecho la sugerencia de evitar los nombres usuales de las cosas, ya que éstos pueden desviarnos, a través de las numerosas asociaciones con los hechos de la intuición, de la rigurosidad lógica. Se ha sugerido así introducir en el sistema axiomático nuevos nombres para 'puntos', 'líneas', 'planos', etc.; nombres que recuerden solamente lo que ha sido establecido en los axiomas. Se ha propuesto incluso que palabras como 'igual', 'mayor', 'menor', sean reemplazadas por formaciones arbitrarias de palabras, como 'a–rig', 'b–rig', 'a–rung', 'be–rung'. Ello es de hecho un buen medio pedagógico para mostrar que un sistema axiomático sólo se ocupa de las propiedades establecidas en los axiomas y de nada más. Sin embargo, en la práctica este procedimiento no es

> ventajoso, e incluso no está realmente justificado. En efecto, uno siempre debe guiarse por la intuición al formular un sistema axiomático y uno siempre tiene a la intuición como una meta [*Zielpunkt*]. Por lo tanto, no es defecto alguno si los nombres nos recuerdan siempre, e incluso hacen más fácil recordar, el contenido de los axiomas, puesto que se puede evitar fácilmente la intromisión de la intuición en las investigaciones lógicas, al menos con un poco de cuidado y práctica. (Hilbert 1905a, pp. 87–88)

Esta advertencia de Hilbert puede ser utilizada para contrastar su propia concepción del método axiomático con algunas de las interpretaciones radicalmente formalistas que aparecieron poco después de la publicación del *Festschrift*. En particular, este pasaje puede ser tomado como una respuesta directa a algunas de las críticas formuladas posteriormente por Frege, en la serie de artículos que buscaron continuar la controversia epistolar.[77] En estos trabajos, Frege diferencia nuevamente su propia noción clásica o euclídea de axioma, según la cual "los axiomas son pensamientos verdaderos, no demostrados por medio de inferencias lógicas" (Hilbert 1903, pp. 265–266), de la concepción moderna de axioma defendida por Hilbert, que concibe estrictamente a los axiomas como "pseudo–proposiciones". Una *pseudo-proposición* es un grupo de signos que no expresa un pensamiento, como sí ocurre con una proposición propiamente dicha, sino que sólo comparte con ella su forma gramatical.[78] En otras palabras, en la medida en que los términos básicos 'punto', 'línea', etc., no poseen en el sistema de Hilbert una referencia (intuitiva) fija, Frege concluye que deben ser considerados como meros símbolos vacíos, sin significado, y los axiomas que los contienen, como meras reglas para la manipulación de signos. Más aún, Frege señala, aunque con un mínimo reparo[79], que la presentación axiomática de la geometría de Hilbert coincide con la aritmética formal de Thomae y Heine, quienes conciben las teorías matemáticas como teorías formales puras, que en cuanto tales pueden ser entendidas como "un juego de signos vacíos sin significado":

> Podemos, pues, llamar a la teoría formal pura un juego de signos vacíos, carentes de significado, y cosas por el estilo; como rigurosa asociación legal de proposiciones no precisa de ninguna otra dignidad especial. (Frege 1906b, p. 317)

[77] Cf. (Frege 1903a; 1906b).
[78] Cf. (Frege 1906a, p. 297).
[79] "Tengo la impresión de que el señor Korselt pretende dar a la teoría del señor Hilbert un giro especial al concebirla como una teoría formal pura. Queda por ver si esto es del agrado del señor Hilbert. En todo caso gran parte induce a creer que sí". (Frege 1906b, pp. 281–282).

Dado que para Frege los axiomas hilbertianos son pseudo–proposiciones, cualquier axioma de su sistema es equiparable con una formación arbitraria de palabras. Más aún, Frege ridiculiza la posición Hilbert, al comparar por ejemplo su axioma “Toda recta contiene al menos dos puntos” (I.7), con la construcción arbitraria de palabras sin ningún sentido: “Toda anej bacea, por lo menos dos helas” (Frege 1906a, p. 284).

Pasajes como el recién citado permiten apreciar con claridad la firme oposición de Hilbert respecto de este tipo de interpretación, formalista radical, de su método axiomático. El hecho de que la geometría sea presentada como un sistema axiomático formal no significaba para él, de ningún modo, que la naturaleza de esta teoría matemática pueda ser comparada con un juego de símbolos o signos vacíos, sin significado. De la misma manera, la propuesta de formular los axiomas de la geometría a través de construcciones arbitrarias de palabras, carentes de todo sentido, tampoco era una opción atendible. Aunque el resultado de una axiomatización formal de la geometría era un entramado conceptual o estructura relacional capaz de recibir distintas interpretaciones y aplicaciones, Hilbert sostenía que uno de los objetivos centrales de su empresa axiomática era conservar de alguna manera la relación con el conjunto de hechos geométricos intuitivos, que se encuentran en la base de esta disciplina. Y una preocupación de tal índole revela cuán lejos se encuentra esta interpretación formalista radical de su concepción axiomática de la geometría. Dicho de otro modo, si bien la construcción de la geometría como un sistema axiomático formal era un logro matemático notable, que inauguraba a su vez diversas líneas nuevas de investigación matemática, ello no significaba de ningún modo que Hilbert estaba interesado en presentar a la geometría como mero juego de fórmulas, desprovista de todo significado. Más bien, en esta etapa inicial, Hilbert estaba ciertamente convencido de que su análisis axiomático formal contribuía en gran medida a proporcionar un fundamento conceptual para el acervo de hechos geométricos intuitivos, que según él conformaba la base de esta disciplina.[80]

4.4. Observaciones finales

Resultará oportuno concluir este capítulo con un par de observaciones finales. En primer lugar, considero que los pasajes que hemos presentado del manuscrito de Hilbert “Principios lógicos del pensamiento matemático” (Hilbert 1905b;c) permiten apreciar con claridad un aspecto o faceta de su concepción temprana del método axiomático, que sin dudas confirma su actitud frente a la geometría y a la axiomática en general.

[80] Cf. (Corry 2006, p. 143).

Esta faceta, sin embargo, no es advertida por la interpretación "formalista estructural" o, al menos, su importancia no es debidamente reconocida. Es decir, por un lado hemos constatado que, tanto en este manuscrito como en su correspondencia con Frege, Hilbert formula de un modo explícito la idea fundamental de una concepción formal del método axiomático. De acuerdo con esta concepción, las teorías matemáticas axiomatizadas no conforman un conjunto de proposiciones verdaderas acerca de un determinado dominio (intuitivo) fijo de objetos, sino que constituyen un entramado de conceptos o una estructura relacional – en términos más actuales. Una estructura relacional puede recibir tanto diversas interpretaciones, dentro de otras teorías matemáticas o físicas, como así también aplicaciones empíricas a los objetos del mundo físico; en este último caso, la interpretación sólo posee un carácter aproximativo. Asimismo, dado que el objeto propiamente dicho de investigación matemática es la estructura relacional, Hilbert sostiene que una parte central de nuestro conocimiento matemático se refiere a las "relaciones lógicas", dentro de una teoría, entre las proposiciones. Es decir, puesto que una teoría matemática no consiste en un conjunto de proposiciones verdaderas acerca de un determinado dominio de objetos – los objetos primitivos de la teoría –, el análisis axiomático no se centra en la "verdad" de los enunciados de una teoría, sino más bien en sus relaciones o conexiones lógicas. Éstas últimas comprenden *a)* las relaciones lógicas de varias partes de la teoría, *b)* el modo en que los axiomas se combinan para probar teoremas y *c)* la relación inversa (o de independencia) entre los teoremas y los axiomas. Hilbert lo señala de la siguiente manera, en un texto bien posterior:

> De este modo llegamos a comprender que lo fundamental del método axiomático no consiste en la adquisición de una certeza absoluta, que es transferida de los axiomas a los teoremas por medio de una vía lógica; por el contrario, [lo esencial] reside en la investigación de las relaciones lógicas, que es independiente de la pregunta por la verdad objetiva. (Hilbert 1921, p. 3)

De esta manera, la interpretación formalista estructural, especialmente Bernays (1922a; 1967) y los trabajos que se apoyan en él, explican acertadamente y de un modo perspicuo *el cambio conceptual* introducido por Hilbert en la idea de axiomática, tanto en sus textos publicados – (Hilbert 1899; 1900c;b) – como en sus notas de clases manuscritas. Ahora bien, estas últimas fuentes muestran además que, en esta etapa inicial, Hilbert no pensaba que la función y la utilidad del método axiomático se *limitaban solamente a reducir distintas teorías matemáticas a estructuras relacionales o esquemas conceptuales.* Por el contrario, y especialmente en el caso de la geometría, Hilbert señala en reiteradas oportunidades que el método axiomático es una herramienta o instrumento eficaz para echar luz sobre las fuentes originales del conocimiento geométrico. Más precisamente, Hilbert es muy reiterativo, en esta etapa temprana, en cuanto a que el origen de la geometría elemental se encontraba en investigaciones intuitivas e incluso empíricas, y que una función importante del método axiomático formal era instruir a esta intuición, por medio de un estudio de las relaciones y propiedades lógicas de las proposiciones originalmente intuitivas, que la misma intuición es incapaz de llevar a cabo. Aunque esta convicción excedía, por decirlo de algún modo, la concepción formal del método axiomático, Hilbert creía que la proyección de la esfera intuitiva a la esfera conceptual, llevada a cabo gracias al análisis axiomático formal, no significaba un abandono total de la primera; por el contrario, Hilbert estaba todavía convencido de que un análisis axiomático de la geometría era al mismo tiempo un análisis sistemático y completo de lo que, en el fondo, proporcionaba la fuente y guía fundamental de nuestro conocimiento geométrico, a saber, la intuición y la experiencia.

En resumen, en esta primera etapa geométrica, Hilbert consideraba a una teoría geométrica completamente axiomatizada como un entramado conceptual que, sin embargo, conservaba "relaciones o conexiones significativas" con la intuición y la experiencia. Puntualmente, estas "conexiones significativas" con la intuición se traducían en rasgos puntuales: los términos o conceptos básicos de la teoría axiomatizada, concebidos ahora como objetos abstractos, debían mantener una cierta correspondencia, en número y designación, con los objetos primitivos de la geometría de la intuición. En definitiva, estos requerimientos revelan que para Hilbert, su abordaje axiomático formal a la geometría realmente debía ser visto como un análisis lógico de la intuición.

Parte II.

Metageometría

CAPÍTULO 5

Aritmetizando la geometría desde dentro

5.1. Introducción

En los capítulos precedentes he señalado que la cuestión de determinar cuál es el papel que desempeñan las condiciones de continuidad en la geometría euclídea elemental, fue un problema que motivó en gran medida las investigaciones axiomáticas de Hilbert. Este problema tiene sus antecedentes en el último tercio del siglo XIX, cuando comenzó a ser intensamente estudiado y discutido, aunque fundamentalmente en relación a los fundamentos de la geometría proyectiva. En 1847, el geómetra alemán Christian von Staudt (1798–1867) realizó una contribución notable a los fundamentos de la geometría proyectiva, al mostrar que esta teoría podía ser construida como una disciplina autónoma, independiente de toda consideración métrica. Uno de los elementos claves de su método fue una definición puramente proyectiva de la noción de cuaterna armónica, a la cual se acudía para definir el concepto central de proyectividad entre formas fundamentales. El trabajo de von Staudt aportó además los instrumentos necesarios para introducir un sistema coordenadas *por medios estrictamente proyectivos*, tanto en el plano como en el espacio. Sin embargo, estos resultados se vieron empañados por la existencia de ciertas 'lagunas' en las demostraciones de algunos teoremas fundamentales. Ello fue observado posteriormente por Felix Klein (1849–1925), quien en un célebre artículo de 1873 sostuvo que era necesario añadir un axioma de continuidad al procedimiento desarrollado por von Staudt, para poder llevar a cabo la coordenatización del plano y el espacio proyectivo.[1] La crítica de Klein generó entonces una animada controversia en la década de 1870, y la gran mayoría de los geómetras siguieron a Klein en este punto, es decir, sostuvieron que efectivamente un axioma de continuidad era imprescindible para la introducción de

[1] Cf. Klein (1873).

coordenadas dentro de la geometría proyectiva. Luego, una de las contribuciones más importantes de Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899) consistió en mostrar que, en el caso de la geometría euclídea, la introducción de un sistema de coordenadas adecuado podía ser realizada sin recurrir a ningún axioma de continuidad. En particular, este resultado fue conseguido por medio de la construcción de una aritmética para segmentos lineales [*Streckenrechnung*], *en donde no se utilizaba ningún postulado de continuidad*, sino que en cambio los teoremas de incidencia de Desargues y Pascal jugaban un papel central. La construcción axiomática de la aritmética de segmentos le permitió a Hilbert efectuar una coordenatización del plano euclídeo, sin tener que apelar a ningún axioma de continuidad.

El objetivo de este capítulo es analizar esta notable contribución de Hilbert a los fundamentos de la geometría. Más precisamente, sostendré que, en sus manuscritos, Hilbert le confiere a su nueva aritmética de segmentos un destacado significado epistemológico y metodológico, que sin embargo no es particularmente enfatizado en su libro *Fundamentos de la geometría*. Este significado epistemológico y metodológico consiste en que la aritmética de segmentos permite *introducir números (coordenadas) dentro de la geometría, no como una imposición desde afuera, como ocurre en la geometría analítica, sino desde dentro, de una manera puramente geométrica*. En otras palabras, por un lado, la aritmética de segmentos permitió dar una nueva respuesta a la pregunta perenne respecto de cuál es la relación entre la geometría y la aritmética. Por otro lado, Hilbert concluyó que su cálculo de segmentos ilustraba uno de los aspectos más novedosos y atractivos de su nueva concepción axiomática, a saber: *el poder del método axiomático de exhibir conexiones internas o estructurales entre distintas teorías matemáticas, y contribuir de ese modo a la unidad del conocimiento matemático*.

El capítulo está organizado de la siguiente manera: en las dos primeras secciones (5.2, 5.3) analizo brevemente los antecedentes del problema de la "introducción del número" en geometría, a propósito de las discusiones en torno a la definición de un sistema de coordenadas para la geometría proyectiva. Seguidamente, en la sección (5.4), utilizo los manuscritos de Hilbert para enfatizar el significado metodológico y epistemológico que este autor le confirió a este problema, y en particular, la importancia del método axiomático para encontrar una respuesta a esta cuestión central para los fundamentos de la geometría. Es decir, en este apartado, analizo una serie de consideraciones vertidas por Hilbert en sus notas de clases, en donde resalta la importancia de que la introducción de los números en geometría no sea llevada a cabo como una imposición desde fuera, sino más bien desarrollando desde dentro una estructura equivalente a la de los números (reales), o sea, de un modo puramente geométrico. A continuación, en la sección (5.5), presento el cálculo de segmentos elaborado por Hilbert en el capítulo III de la primera edición *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899) – i.e., la aritmética de segmentos basada en el teorema de Pascal – y analizo cómo este resultado puede ser utilizado para introducir un sistema de coordenadas dentro de la geometría. Finalmente, en la última sección (5.6), señalo una serie de consecuencias, de carácter epistemológico y metodológico, que se siguen de esta contribución de Hilbert. En particular, argumento que, para Hilbert, estas investigaciones axiomáticas no sólo permitían descubrir nuevas conexiones entre la geometría y la aritmética, sino que además constituían un claro ejemplo de *la unidad esencial de la matemática*.

5.2. La introducción de un sistema de coordenadas en la geometría proyectiva

En el primer capítulo de esta tesis hemos señalado que von Staudt fue el responsable de liberar a la geometría proyectiva de los conceptos y técnicas de la geometría métrica (euclídea), a la que hasta el momento había estado atada.[2] En efecto, von Staudt renunció a definir la relación de proyección entre formas fundamentales a partir de la conservación de la razón doble o razón anarmónica de cuatro puntos, tal como resultaba habitual en los trabajos de los geómetras anteriores. En cambio, su estrategia consistió en sustituir aquel concepto por la noción de *armonicidad*, que podía ser definida de manera puramente proyectiva a partir de la propiedad fundamental del cuadrilátero (cuadrángulo) completo. La noción de correspondencia proyectiva entre formas fundamentales fue así definida en función de la propiedad de conservar la armonicidad, y por lo tanto sin que intervenga ninguna noción métrica, como la longitud de un segmento o la medida de un ángulo. El resultado central de von Staudt fue entonces la construcción del "cuadrilátero completo", que le permitió definir de manera puramente proyectiva – sin ninguna referencia a ningún tipo de definición (métrica) de razón doble–, la noción de "formas armónicas" [*Harmonische Gebilde*]:

> Si sobre una línea son dados tres puntos A, B, C, y si se construye un cuadrilátero tal que sus lados opuestos cortan a la línea en los puntos A y C, y una de sus diagonales pasa por B, entonces la otra diagonal corta a la recta en el punto D, que se llama el cuarto armónico. (von Staudt 1847, p. 43)

[2] Véase capítulo 1, sección 1.3.1.

En su libro *Geometría de la posición* (1847), Von Staudt describe la construcción del cuadrilátero completo de la siguiente manera: Sean A, B, C tres puntos dados sobre una recta, y E un punto cualquiera que no pertenece a la recta. Sea CFG una recta, no coincidente con ABC, que no pasa por E, donde F es el punto de intersección entre CFG y la línea BE, y G es el punto donde CFG pasa por la línea AE. Sea H el punto donde la línea AF corta a la línea BG. Entonces D es el punto donde la línea EH interseca a ABC. Luego, D se llama el conjugado armónico de C con respecto a los puntos A y B.[3] Esta construcción del cuadrilátero completo permite determinar el cuarto punto D de una cuaterna armónica consistente en los puntos A, B, C y D (figura 5.1).

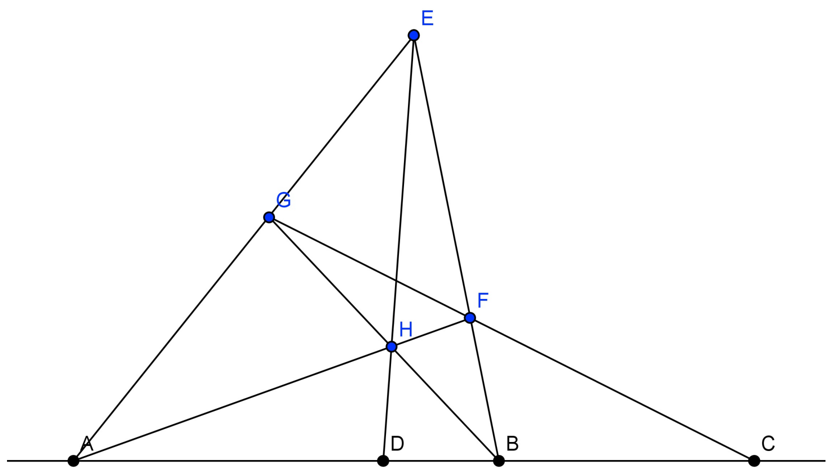


Figura 5.1.: Construcción de von Staudt del cuadrilátero completo

Los cuatro puntos A, B, C, D sobre la línea a se denominan usualmente cuaterna armónica, aunque von Staudt los designa simplemente formas armónicas.[4] De la misma manera, los puntos A y C separan armónicamente a los puntos B y D, de donde se sigue que estos dos últimos puntos son los armónicos conjugados de A y C. Asimismo, es importante mencionar que, una vez que los tres puntos colineales A, B, C son dados, la posición del cuarto armónico D se determina de manera *única*, es decir, independientemente de la elección del punto E y de la línea CFG. Esta propiedad se demuestra

[3] Cf. (von Staudt 1847, §13).

[4] Dos pares de líneas o dos pares de planos, separados armónicamente, también constituyen formas armónicas. Es decir, una cuaterna armónica proyectada a partir de un punto S forma un haz armónico de líneas, mientras que de una sección sobre un haz armónico de líneas se obtiene una cuaterna armónica. Y del mismo modo puede definirse un haz de planos.

utilizando el teorema de Desargues, de donde se sigue que dicho teorema es esencial para el procedimiento puramente proyectivo de von Staudt.[5]

Luego, utilizando este concepto puramente proyectivo de cuaterna armónica, von Staudt proporciona una nueva definición de la noción de *proyectividad* entre formas fundamentales[6]:

> Dos formas fundamentales uniformes se llaman proyectivas entre sí, cuando están relacionadas de tal manera que a toda forma armónica de una le corresponde una forma armónica de la otra. (von Staudt 1847, p. 49)

Esta formulación del teorema fundamental de la geometría proyectiva estaba adaptada entonces a su nueva definición de correspondencia proyectiva, con lo cual von Staudt tenía ya a su disposición todo lo necesario para construir esta teoría geométrica de un modo autónomo, es decir, con independencia de cualquier concepto métrico. Ahora bien, además de presentar por primera vez a la geometría proyectiva como una teoría autónoma, el trabajo de von Staudt proporcionó las herramientas necesarias para construir un sistema de coordenadas de un modo *estrictamente proyectivo*. Nuevamente, la propiedad del cuadrilátero completo resultaba fundamental en este procedimiento. A continuación describimos esquemáticamente cómo puede ser llevada a cabo la introducción de un sistema de coordenadas sobre la recta proyectiva, utilizando las técnicas desarrolladas por von Staudt.[7]

Sean dadas una recta proyectiva cualquiera a y, sobre ella, tres puntos arbitrarios marcados con los números 0 y 1 y con el símbolo ∞, respectivamente. El punto ∞ se denomina impropio, y los demás puntos de la recta a se llaman propios. Si asumimos que la recta a está cortada en el punto ∞, entonces es posible introducir en esta recta un orden lineal, de manera que el punto 0 precede al punto 1.[8] Luego, marcamos con

[5] Nos ocuparemos de este teorema en la siguiente sección. Su demostración puede encontrase en (Efímov 1984, pp. 217–218).

[6] Von Staudt llama *formas fundamentales de la primera clase o uniformes* a aquellas formas elementales que contienen una sola categoría de elementos – puntos, líneas y planos –, a saber: puntuales [*Gerades Gebilde*], haces de líneas y haces de planos. Aquellas formas que contienen dos categorías de elementos se denominan *formas fundamentales de la segunda clase*. Finalmente, la forma fundamental de la *tercera* clase es el sistema espacial, que contiene puntos, líneas y planos.

[7] Seguimos a (Efímov 1984, pp. 236–249) en la descripción del procedimiento para definir coordenadas (racionales) sobre la recta proyectiva. Es oportuno aclarar que esta construcción de un sistema de coordenadas no se debe al propio von Staudt, sino que fue desarrollada posteriormente por Klein (1873). Sobre esta cuestión puede verse (Torretti 1984, pp. 143–146). Un análisis de la noción de coordenadas proyectivas introducida por el propio von Staudt puede encontrarse en (Nabonnand 2008b).

[8] Sobre la introducción de un orden lineal en la recta proyectiva, véase (Efímov 1984, pp. 223–230).

el número 2 al punto que forma, junto con el punto 0, un par armónico conjugado del par 1, ∞. Puesto que el par 0, 2 separa al par 1, ∞, en el orden lineal de la recta a el punto 1 está entre 0 y 2; o dicho de otro modo, el punto 2 sigue a 0 y 1. De un modo similar es posible determinar los demás puntos correspondientes a los números enteros siguientes. Es decir, con el número 3 se designa al punto que, conjuntamente con el punto 1, forma el conjugado armónico del par 2, ∞; con el número 4, el punto que, junto con el número 2, forma el armónico conjugado del par 3, ∞, y así sucesivamente. Asimismo, siguiendo el mismo procedimiento es posible asignar un número entero negativo a cada punto sobre la recta proyectiva a. Más precisamente, con el número -1 se designa al punto que, junto con el punto 1, forma un par armónico conjugado del par 0, ∞; con el número 2, al punto que, junto con el punto 0, forma el par armónico conjugado del par -1, ∞, etc.

La construcción efectiva de estos puntos enteros de la escala proyectiva descansa en la determinación unívoca del cuarto elemento armónico, la cual está garantizada a su vez por la propiedad del cuadrilátero completo, como queda claro a continuación. Por el punto ∞ de la recta a se trazan dos rectas arbitrarias, una de las cuales es designada con el número 1, y la otra con la letra u (figura 5.2). Sobre la recta u se elige un punto cualquiera A, y se trazan las rectas $A0$ y $A1$, que unen a A con los puntos 0 y 1. Al cortarse con la recta 1, estas rectas determinan dos puntos, designados respectivamente por $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Luego, si por los puntos 0 y $(1, 1)$ se traza una recta, es posible hallar un punto B en donde ésta corta a la recta u. Por los puntos B y 1 trazamos entonces una recta que determina el punto $(1, 2)$ sobre la recta 1. Proyectando este último punto desde el punto A, se obtiene el punto sobre la recta a anteriormente designado con el número 2. En efecto, este punto, junto con el punto 0, forma un par armónico conjugado con el par 1, ∞. Para comprobarlo, sólo basta considerar el *cuadrilátero completo* cuyos vértices son $A, B, (1, 1)$ y $(1, 2)$. Una vez construido el punto 2, proyectándolo desde el punto B sobre la recta 1 se obtiene el punto $(1, 3)$, y proyectando este último desde A sobre la recta a, obtenemos el punto 3. Del mismo modo, una vez determinado el punto 3, se lo proyecta desde el punto B sobre la recta 1 para obtener el punto $(1, 4)$, y proyectando a este último punto desde el punto A sobre la recta a, se determina el punto 4. Es posible repetir este procedimiento sucesivamente de manera tal que a cada punto sobre la recta proyectiva a le corresponda un número racional. En cambio, para obtener una correspondencia uno–a–uno con el conjunto de los números reales, es necesario asumir un axioma que asegure la continuidad de la línea proyectiva, por ejemplo, el axioma de continuidad de Dedekind.[9]

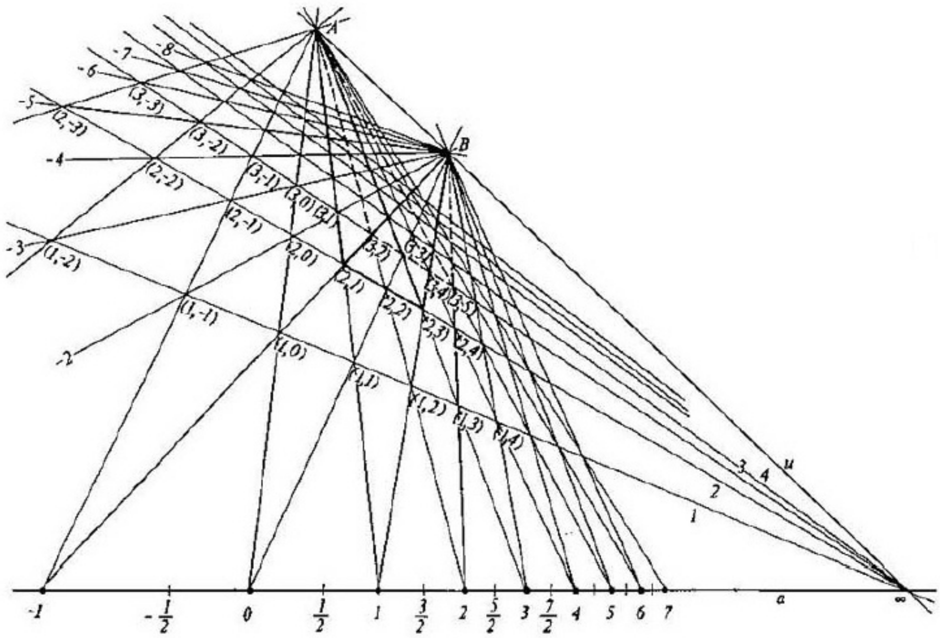


Figura 5.2.: Introducción de coordenadas (racionales) en la recta proyectiva (tomado de Efímov 1984, p. 238).

Dos observaciones resultan así oportunas. En primer lugar, este procedimiento para asignar coordenadas a la recta es "puramente proyectivo", en el sentido en que no apela a la noción de longitud, sino que utiliza una construcción similar a la del cuadrilátero completo anteriormente mencionada. En segundo lugar, la condición fundamental que presupone este procedimiento consiste en la posibilidad de determinar de manera unívoca el cuarto elemento armónico. Precisamente en torno a esta cuestión fundamental se sucedieron una serie de críticas importantes, según consignaremos a continuación.

5.3. El teorema fundamental de la geometría proyectiva y los teoremas de incidencia

Según hemos señalado en la sección anterior, la principal innovación de von Staudt consistió en definir la noción de proyectividad entre las formas fundamentales a través de la conservación de las *cuaternas armónicas*, mientras que este último concepto era definido en función de la propiedad del cuadrilátero completo. Asimismo, la propiedad del cuadrilátero completo, o más precisamente, la unicidad del cuarto armónico, estaba

[9] Una versión proyectiva del axioma de continuidad de Dedekind puede verse en (Efímov 1984, p. 236).

garantizada por el teorema de Desargues, que von Staudt demuestra fácilmente dado que se sitúa en el espacio.[10] Más precisamente, von Staudt demuestra la unicidad del cuarto armónico utilizado el teorema de Desargues y su recíproco. Dada la importancia de estos teoremas, los recordamos a continuación:

Primer teorema de Desargues. Si los lados correspondientes de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ se intersecan en los puntos A'', B'' y C'' pertenecientes a una misma recta, las rectas que unen los vértices correspondientes se cortarán en un mismo punto. (Figura 5.3)

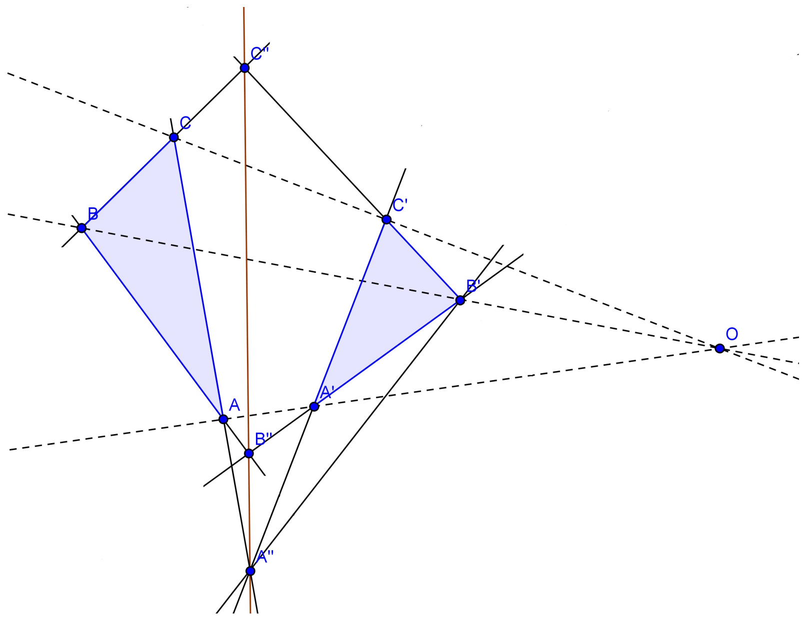


Figura 5.3.: Teorema de Desargues (Teorema directo en el plano).

Segundo teorema de Desargues. Si las rectas que unen los vértices de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ se cortan en un mismo punto, los lados correspondientes de estos triángulos se intersecarán en puntos pertenecientes a una misma recta.

Es claro que estos teoremas hablan de la *incidencia* de puntos y líneas (en el plano), de donde se sigue que von Staudt construyó su teoría geométrica estrictamente sobre la base de las propiedades de incidencia, que son invariantes bajo las transformaciones

[10] Esta aclaración es pertinente, dado que sobre la demostración del teorema de Desargues se centran muchas discusiones metodológicas. Puntualmente, la cuestión central es la siguiente: mientras que el teorema de Desargues se refiere a propiedades de incidencia entre líneas en el plano, para su demostración sin embargo hay que recurrir a una construcción *en el espacio*. Respecto de las discusiones metodológicas en torno al teorema de Desargues, véase (Hallett 2008) y (Arana y Mancosu 2012).

proyectivas. La generalización de la noción de cuaterna armónica a los elementos de un haz de rectas y un haz de planos le permitió además a von Staudt definir, de un modo general, la correspondencia proyectiva entre dos formas fundamentales del primer nivel[11] como una correspondencia (biunívoca) que conserva las cuaternas armónicas. A este resultado le siguió entonces un teorema que, en virtud del papel esencial que desempeña en el desarrollo de su teoría, recibió el nombre de "teorema fundamental de la geometría proyectiva":

> Si dos formas fundamentales uniformes proyectivas tienen tres elementos correspondientes en común, entonces todos sus elementos correspondientes son comunes. (von Staudt 1847, p. 50)

La importancia del teorema fundamental de la geometría proyectiva consiste en que permite establecer la correspondencia proyectiva entre formas fundamentales sólo a partir de tres pares de elementos correspondientes. Por otro lado, de particular importancia para la presentación de la geometría proyectiva de von Staudt era un caso particular del teorema fundamental, a saber: el *teorema fundamental para la recta proyectiva*:

Teorema fundamental de la recta proyectiva. Dadas dos rectas cualquiera, existe una y sólo una aplicación proyectiva que correlaciona a tres puntos cualesquiera de la primera la línea, con tres puntos cualesquiera de la segunda, en un orden dado.

Von Staudt señaló que para demostrar el teorema fundamental de la geometría proyectiva bastaba sólo con probar el caso particular para la recta proyectiva. Sin embargo, la demostración proporcionada en su libro *Geometría de la posición* (von Staudt 1847) fue percibida rápidamente como defectuosa. En particular, al recurrir a la construcción de los puntos por medio de la cuaterna armónica, la demostración original de von Staudt aseguraba la existencia de una correspondencia proyectiva *sólo en el caso de que las rectas fueran racionales*. En cambio, para probar que, dados tres pares de elementos correspondientes, *siempre* es posible establecer una correspondencia proyectiva, se necesitaba que la construcción del cuarto armónico arroje como resultado una sucesión de puntos que penetre a cada segmento de la recta. Pero ello sólo era posible si se contaba con un principio o axioma que garantice la continuidad lineal, una condición que von Staudt asumía en su demostración simplemente de un modo tácito. Esta 'laguna' en la prueba original del teorema fundamental de la geometría proyectiva dio lugar a una

[11] Véase *supra*, nota 6.

importante serie de críticas en torno a la totalidad del procedimiento de von Staudt, iniciadas por Klein en su célebre artículo de 1873.[12]

Las críticas de Klein y otros geómetras pusieron de manifiesto la existencia de supuestos implícitos importantes no sólo en la demostración del teorema fundamental, sino incluso de los *teoremas clásicos de Pappus (Pascal) y Desargues*. Más precisamente, el papel que jugaban los postulados de continuidad, implícitamente asumidos por Staudt en las demostraciones de estos teoremas, era una cuestión que todavía no parecía completamente elucidada. Y éste fue un problema que, como hemos anticipado, motivó en gran medida las investigaciones axiomáticas de Hilbert; en especial, gracias a las contribuciones de Wiener y Schur al respecto.

En cuanto al primero de estos autores, hemos mencionado ya que en su conferencia de 1891, Wiener afirmó, en primer lugar, que el teorema fundamental de la geometría proyectiva podía ser demostrado utilizando sólo los teoremas de Desargues y Pascal. En segundo lugar, sugirió también que incluso sería posible demostrar estos teoremas sin apelar a los axiomas de continuidad, especialmente, sin utilizar el axioma de Arquímedes. Sin embargo, Wiener no proporcionó demostraciones para ninguna de estas dos afirmaciones. Por el contrario, esta tarea fue cumplida, aunque parcialmente, por Schur. Más precisamente, en un artículo de 1898, este autor logró demostrar el teorema de Pascal en el plano exclusivamente sobre la base de los teoremas de congruencia en el espacio y sin apelar al axioma de Arquímedes.[13]

Conocemos la relevancia que tuvieron para Hilbert estos resultados gracias a sus propias declaraciones. Como lo ha mostrado Toepell (1985; 1986), en una carta dirigida a su amigo Hurwitz, Hilbert reconoce estar al tanto del descubrimiento de Schur:

> Recientemente Schur ha probado en una carta a Klein, que con ayuda de los teoremas del congruencia en el espacio, el teorema de Pascal en el plano para un par de líneas puede ser demostrado, es decir, sin ayuda del axioma de Arquímedes. Esta carta, sobre la cual Schönfiels ha hecho una presentación en la sociedad de matemáticos [de Göttingen], me ha motivado para que retome mis anteriores reflexiones acerca de los fundamentos de la geometría. (Hilbert a Hurwitz, 16 de marzo de 1898)[14]

[12] Cf. (Klein 1873). Sobre las discusiones en torno a la demostración de von Staudt del teorema fundamental de la geometría proyectiva, y las discusiones subsiguientes en relación a este problema, véase Voelke (2008).

[13] Cf. (Schur 1898).

[14] Esta carta es reproducida íntegramente en (Toepell 1985).

En suma, el hecho de que el teorema de Desargues cumplía un papel central en el procedimiento de von Staudt para introducir coordenadas en la geometría, era una cuestión que en la última década del siglo XIX era completamente conocida. Sin embargo, lo que nadie antes de Hilbert fue capaz de percibir, fue la posibilidad de *utilizar estos teoremas para introducir coordenadas en la geometría elemental desde dentro*. Ello significaba construir nuevos puentes, con la ayuda del método axiomático, entre las geometrías sintéticas y las geometrías analíticas construidas sobre diversos cuerpos de números. Como puede observarse en la carta recién citada, Hilbert emprendió esta tarea de inmediato. Veamos entonces en qué consistió su notable innovación técnica.

5.4. Geometría y número: el programa de Hilbert

En el primer capítulo (sección 1.3) de esta tesis hemos señalado que, para Hilbert, el problema central que suscitaban las discusiones en torno a la utilización de métodos sintéticos y métodos analíticos en geometría, consistía en determinar en qué medida era necesaria la introducción de consideraciones numéricas. Dicho de otro modo, la cuestión de fondo que planteaban estos debates era, para el matemático de Königsberg, una adecuada explicación de *cuál es el papel del número en la geometría*. Esta pregunta estaba a su vez unida a otra preocupación de Hilbert a la hora de abordar el problema de los fundamentos de la geometría. Con el objetivo fundamental de mostrar que la geometría podía ser considerada justificadamente como una teoría matemática *auto–suficiente*, Hilbert consideraba esencial que su construcción axiomática proceda de manera autónoma o independiente, es decir, que en ella no se utilicen conceptos y supuestos provenientes de otras teorías matemáticas, como la aritmética, el análisis, o incluso la mecánica. Este requerimiento puede ser percibido en diversos aspectos de su abordaje axiomático a la geometría, aunque en este capítulo me centraré en uno en particular.[15]

Un rasgo que aparece tácitamente en el *Festschrift*, pero que es reconocido explícitamente en sus cursos sobre geometría, es la imposición de ciertas condiciones o cuidados en la introducción de un sistema de coordenadas numéricas para su teoría geométrica. Más precisamente, el procedimiento seguido por Hilbert en la construcción de un sistema de coordenadas para su geometría denota una preocupación muy especial respecto de la relación entre la geometría euclídea elemental y la estructura (algebraica) de la

[15] Este requerimiento metodológico establecido por Hilbert también puede ser percibido, por ejemplo, en su análisis sobre los medios o herramientas utilizadas en las demostraciones geométricas. Sobre esta cuestión, que Hilbert llama el requisito de la 'pureza del método', véase Hallett (2008) y Arana y Mancosu (2012).

geometría analítica. Sobre esta cuestión en particular, sus notas de clases resultan muy esclarecedoras. Por ejemplo, una cuestión interesante que se puede percibir en estos cursos es que, si bien Hilbert formuló muy tempranamente el requerimiento de construir la geometría como una teoría auto–suficiente, su actitud en relación a la introducción de coordenadas en la geometría fue cambiando en la medida en que su abordaje axiomático fue evolucionando.

5.4.1. La introducción del número en 1893/4

Hemos mencionado en reiteradas oportunidades que el primer análisis axiomático formal de la geometría realizado por Hilbert se encuentra en las notas de clases para el curso "Los axiomas de la geometría" (Hilbert 1894), dictado en 1893/4.[16] La estructura de esta primera presentación axiomática revela que, *en aquel momento*, Hilbert adopta la estrategia de introducir el número en la geometría – i.e., el sistema de coordenadas numéricas – *lo más rápido posible*. Su exposición se organiza así de la siguiente manera: en primer lugar presenta el grupo de axiomas de incidencia o "existencia", como se los designa allí. A estos axiomas se los llama a menudo "axiomas proyectivos", en tanto que imponen condiciones sobre las relaciones de incidencia entre puntos, líneas y planos que se cumplen también en la geometría proyectiva.[17] En segundo lugar, Hilbert presenta el grupo de axiomas de "posición", que resultan adecuados para describir las relaciones de orden en la geometría elemental. A diferencia de los anteriores axiomas de incidencia, estos axiomas de orden no pueden ser utilizados en la geometría proyectiva. Hilbert hace entonces un breve un paréntesis en su exposición para definir una serie de conceptos proyectivos básicos, entre ellos el concepto de "separación", el equivalente a la relación de orden en la geometría elemental. Por otra parte, otro concepto fundamental allí introducido es la noción de "posición armónica" que, como vimos recién, von Staudt utiliza para definir a la noción misma de proyectividad. Hilbert analiza la construcción del cuarto elemento armónico, siguiendo el procedimiento basado en las técnicas desarro-

[16] En el capítulo 2, sección 2.2.2.1, hemos presentado y analizado brevemente el sistema de axiomas de Hilbert (1894).

[17] En sólo dos aspectos difiere el grupo de axiomas de incidencia de (Hilbert 1894) para la geometría elemental de un conjunto de axiomas de incidencia que resulte adecuado para la geometría proyectiva. En primer lugar, mientras que el axioma 8 de Hilbert sostiene que "existen al menos dos puntos en una recta", el axioma proyectivo equivalente afirma que "en cada recta hay no menos de tres puntos". En segundo lugar, es necesario asimismo agregar un axioma más, que descarta la posibilidad del paralelismo: "Dos rectas cualesquiera, ubicadas en un mismo plano, tienen algún punto en común". Sin embargo, todas las condiciones de los ochos axiomas de incidencia de Hilbert están contenidas en los axiomas proyectivos – i.e, en los axiomas originales de Hilbert más las modificaciones recién señaladas. Véase (Efímov 1984).

lladas por von Staudt, i.e., la construcción del cuadrilátero completo. Ahora bien, esta construcción armónica no sólo permite definir varios conceptos centrales de la geometría proyectiva, sino que además hace posible la correlación entre los puntos de una línea y los números reales. Hilbert emprende entonces inmediatamente esta tarea, con el objetivo de exhibir cómo se pueden introducir coordenadas sobre esta base mínima de axiomas de incidencia y orden y, por lo tanto, antes de introducir los axiomas de congruencia. Este procedimiento es estudiado en una sección titulada "La introducción del número" (Hilbert 1894, pp. 85–93).

Hilbert resalta entonces, en el comienzo de esta sección, la importancia epistemológica que recae sobre la introducción del número en geometría:

> En todas las ciencias exactas recién se alcanzan resultados precisos cuando el número es introducido. Observar cómo ello ocurre tiene un gran significado epistemológico [*erkenntnisstheoretisch*]. (Hilbert 1894, p. 85)

A continuación Hilbert describe cómo se puede, sobre la base de la construcción armónica de cuatro puntos sobre una línea, encontrar para cada número racional (positivo) un *único* punto sobre la recta.[18] Más aún, Hilbert muestra cómo es posible, utilizando esta misma construcción, asignarle a cada punto sobre la recta un (único) número real (positivo).[19] Sin embargo, reconoce inmediatamente que para que la afirmación recíproca se cumpla, es decir, para que a cada número real (positivo) le corresponda un punto sobre la línea, es necesario agregar un nuevo axioma que garantice la continuidad lineal. Hilbert formula entonces un axioma de continuidad que establece la existencia de un punto límite para una sucesión monótona creciente de puntos sobre la línea[20], lo cual garantiza la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de una línea y los números reales. Ahora bien, la introducción de este axioma de continuidad es realizada muy rápidamente y de ningún modo es analizada en detalle. En particular, en este primer estudio axiomático, Hilbert no se interesa en ningún momento por la cuestión de *hasta dónde puede ser desarrollada la geometría (euclídea) elemental, antes de utilizar algún postulado de continuidad*. Este problema será uno de los elementos claves del *Festschrift*.

Del mismo modo, Hilbert limita su análisis de la introducción del número a establecer esta correspondencia uno–a–uno con los números reales, mientras que en cambio no se preocupa por investigar las propiedades algebraicas de los "análogos geométricos" a los números introducidos, es decir, las *propiedades de un cuerpo*. En efecto, estas propiedades

[18] Cf. (Hilbert 1894, pp. 85–88).
[19] Si además se define un sentido sobre la línea, entonces también se pueden cubrir los números negativos.
[20] Este axioma, y otros axiomas de continuidad utilizados por Hilbert, son analizados en el capítulo 6.

son las que permiten aplicar los números para medir y describir las propiedades de los objetos geométricos (la línea, el rectángulo, el círculo, etc.). Estos dos últimos puntos revelan luego un importante cambio de actitud en su siguiente curso de 1898/99, respecto de cómo debía ser manejada la introducción del número en geometría.

5.4.2. La introducción del número en 1898/9

En su próximo curso de 1898/99 Hilbert se propone desde el inicio, como uno de los objetivos centrales de su análisis axiomático, investigar *cómo pueden y deben ser introducidos los números en la geometría*. Más aún, Hilbert destaca que el método axiomático puede ser de gran ayuda en este respecto, es decir, puede contribuir a profundizar nuestra comprensión de las conexiones conceptuales entre la geometría sintética y la geometría analítica. Esta cuestión aparece sugerentemente indicada en la versión de este curso elaborada por el propio Hilbert (1898b), en donde en cierta medida critica el modo en que en su curso anterior había sido tratada la introducción del número:

> Con estas premisas la geometría se ha vuelto inmediatamente un cálculo [*Rechenkunst*]. Es claro que utilizando ángulos rectos, paralelas, longitudes y distancias estamos suponiendo todo lo que es fundamental en la geometría elemental. Así, hemos tomado la vía en la que la introducción del número en la geometría es alcanzada tan rápido como sea posible y a cualquier precio. Ahora, en todas las ciencias la introducción de números es de hecho el objetivo más noble. Es posible medir el progreso de las ciencias naturales, o de una rama de la ciencia natural, en función del grado en el que el número ha sido introducido. Sin embargo, si la ciencia no quiere caer presa de un formalismo estéril [*unfruchtbaren Formalismus*], entonces tendrá que reflexionar sobre sí misma en una fase posterior de su desarrollo y, por lo menos, examinar cómo se ha logrado la introducción del número. (Hilbert 1898b, p. 222)

Hilbert reconoce de esta manera la importancia, no sólo para la matemática sino también para todas las ciencias en general, de investigar cómo es llevada a cabo la introducción del número. Ahora bien, en el caso particular de la geometría, el camino elegido es el siguiente:

> Por lo tanto, en nuestro curso la introducción del número en la geometría aparecerá directamente en la última etapa como un *objetivo final*, que viene a *coronar* el edificio de la geometría hasta allí construido. (Hilbert 1898b, p. 222)

Al afirmar que la introducción del número será realizada en una última etapa como un "objetivo final", Hilbert expresa su interés en que esta introducción no sea realizada como una imposición desde fuera, como ocurre en la geometría analítica, sino desarrollando (axiomáticamente) una estructura equivalente a la de los números (reales) *desde dentro*, o sea, de manera *puramente geométrica*. Asimismo, esta dilación en la introducción del número le permitirá al mismo tiempo investigar cuáles son los recursos algebraicos disponibles dentro de la estructura de la geometría sintética, *independientes* de la introducción de presupuestos específicamente numéricos o de continuidad. Por ejemplo, una tarea que Hilbert emprenderá en este curso y en el *Festschrift* (Hilbert 1899), será analizar qué axiomas son responsables de la presencia de la estructura de un cuerpo ordenado sobre la línea. Ahora bien, Hilbert reconoce al mismo tiempo que un importante beneficio que conlleva este tipo de abordaje, es que permite *descubrir nuevas e importantes conexiones entre la geometría y la aritmética*:

> Pero investigar nuevamente los elementos de la geometría euclídea no es sólo de una necesidad práctica y epistemológica, sino que espero también que los resultados que obtendremos valdrán el considerable esfuerzo. Seremos conducidos a una serie de problemas en apariencia simples, pero en verdad bien profundos y difíciles. Llegaremos a reconocer preguntas completamente nuevas y, en mi opinión muy fructíferas, acerca de los elementos de la aritmética y los elementos de la geometría, y de esa manera *llegaremos a proporcionar nuevamente un fundamento para la unidad de la matemática*. (Hilbert 1898b, p. 223)

Vemos aquí que una parte esencial de la empresa hilbertiana de construir axiomáticamente la geometría consistía en mostrar que esta disciplina podía ser desarrollada de manera independiente a la aritmética y el análisis. Esta tarea procedía en dos direcciones, ambas conectadas con su "aritmética de segmentos" [*Streckenrechnung*]. En primer lugar, Hilbert demuestra que muchos resultados importantes de la geometría elemental pueden ser alcanzados sin apelar a postulados de continuidad y, además, que estos principios de continuidad pueden ser formulados de un modo puramente geométrico, es decir, independientemente de suposiciones tomadas de la aritmética y el análisis.[21] En parte, Hilbert desarrolla por esta razón su aritmética de segmentos, que imita el comportamiento de los números racionales de un modo puramente geométrico. Más precisamente, este cálculo podía ser entonces utilizado para elaborar una nueva teoría de las proporciones,

[21] Este tema será analizado en el capítulo 6.

a la cual se podía acudir para formular el axioma de Arquímedes, el único axioma de continuidad utilizado en el *Festschrift*. En segundo lugar, con su aritmética de segmentos Hilbert revela cómo es posible construir, de manera puramente geométrica, una estructura algebraica equivalente a un cuerpo ordenado, y a partir de allí cómo introducir coordenadas en la geometría "desde dentro". Es decir, Hilbert consigue mostrar que los segmentos lineales, junto con las operaciones definidas para ellos, pueden ser utilizados como la base de cuerpos adecuados para llevar a cabo una coordenatización interna de la geometría, y de ese manera, exhibir que, en cierto modo, la geometría analítica es posible sin tener que recurrir a la imposición de cuerpos numéricos "desde fuera". Estas innovaciones técnicas le permitieron mostrar que en ningún momento, en la construcción de la geometría, estamos forzados a suponer que la geometría debe ser construida sobre una variedad de números, una suposición muy común en el siglo XIX. Por medio de su construcción axiomática, Hilbert logra así conferirle a la geometría el carácter de una disciplina auto–suficiente.

Dado que la contribución técnica a través de la cual esta idea es desarrollada consiste en la construcción de distintos cálculos de segmentos, me ocuparé de presentarlos a continuación. Sin embargo, es oportuno realizar antes una aclaración. Es importante notar que el requerimiento de Hilbert según el cual la geometría debe ser construida independientemente del análisis y la aritmética, convive con la utilización de interpretaciones aritméticas y analíticas para mostrar que los diversos axiomas empleados son independientes entre sí. En otras palabras, la utilización de conceptos y técnicas analíticas y algebraicas no es rechazada en absoluto por Hilbert, sino que más bien está *reservada para el nivel metageométrico*, en donde constituye una herramienta imprescindible. Hilbert expresa esta idea del siguiente modo:

> La geometría no debe llevar a los ricos métodos del análisis *como una cadena*, sino que los métodos del análisis deben ser *investigados por sí mismos y utilizados conscientemente como una fuente de nuevos conocimientos*. (Hilbert 1898b, p. 222)

5.5. Aritmetizando la geometría desde dentro

Hilbert pretende lograr una presentación axiomática de la geometría en la que los números no son introducidos "desde fuera", como elementos externos o exógenos, sino que en cambio son introducidos "desde dentro", es decir, de un modo puramente geométrico. Para alcanzar este objetivo, elabora de manera puramente geométrica una *aritmética* *para segmentos lineales*, cuyas operaciones coinciden con las reglas usuales de los números racionales (positivos). Más precisamente, exclusivamente por medio de construcciones geométricas, Hilbert define las operaciones de suma y multiplicación de segmentos y muestra cómo se puede construir de ese modo un conjunto con la estructura de un *cuerpo ordenado*, cuando se toman como los elementos positivos de este conjunto a las clases de equivalencia de segmentos lineales (módulo congruencia). La novedad de este procedimiento consiste en que, en lugar de utilizar una noción "pre–existente" de número, como los números racionales o los números reales, Hilbert genera de manera puramente geométrica un conjunto cuya estructura se corresponde a la de un cuerpo numérico (abstracto), al cual se podía ser acudir luego para definir un sistema de coordenadas. En otras palabras, Hilbert logra mostrar cómo es posible llevar a cabo una *aritmetización interna de la geometría o "desde dentro"*.

Ahora bien, para poder apreciar plenamente el alcance el proyecto de Hilbert, resultará útil comparar la presentación axiomática de la geometría de Hilbert en *Fundamentos de la geometría* (1899), con la estructura de los *Elementos* de Euclides. Me ocuparé de ello a continuación.

5.5.1. Los *Elementos* de Euclides y los *Grundlagen* de Hilbert

El historiador de la matemática David Rowe ha advertido que, "desde el punto de vista de la estructura, en 1898 la geometría euclídea era más parecida a los *Elementos* de Euclides que a los *Grundlagen* de Hilbert" (Rowe 2000, p. 68). Estas diferencias "estructurales" están íntimamente ligadas a la aritmética de segmentos elaborada por Hilbert. Veamos entonces brevemente en qué consisten estas diferencias.[22]

Es común afirmar que, en los libros I–IV de los *Elementos*, Euclides desarrolla una "teoría pura de la geometría" *sin números*. Por ejemplo, no encontramos en estos libros una noción de *longitud* de un segmento lineal, sino que Euclides trabaja con una noción no definida de congruencia de segmentos, que sugiere que dos segmentos son congruentes cuando tienen "el mismo tamaño". De un modo similar, en el caso de los ángulos, tampoco se proporciona una noción de medida en *grados* asociadas a los ángulos, a través de la cual es posible medir ángulos; por el contrario, éstos son estudiados utilizando el concepto de congruencia de ángulos. Lo mismo ocurre con el estudio de las áreas, en donde Euclides no asigna números a las figuras planas, sino que su estrategia consiste en añadir y substraer figuras congruentes. En los primeros cuatro libros de los *Elementos*,

[22] Para una comparación de la estructura de los *Elementos* de Euclides y los *Grundlagen* de Hilbert, pueden verse (Hartshorne 2000, caps. 1–4) y (Greenberg 1994, caps. 1–4).

todas las figuras geométricas son así estudiadas apelando a la congruencia, una noción que no es definida explícitamente y que intenta expresar que dos figuras (segmentos, ángulos, áreas) tienen "el mismo tamaño".

En los libros I–IV, el objetivo de Euclides consiste entonces en probar lo mayor cantidad de teoremas posibles apelando a los teoremas de congruencia. El libro I trata de las figuras rectilíneas congruentes y culmina con el teorema de Pitágoras. El libro II introduce una especie de aritmética de segmentos y rectángulos (el álgebra geométrica), cuyas propiedades están basadas en los teoremas de congruencia. Y en los libros III–IV se aplican los resultados de los libros previos a la teoría de los círculos y los polígonos regulares.

Ahora bien, aunque Euclides es capaz de desarrollar en los libros I–IV una teoría geométrica pura sin utilizar números, esta situación cambia radicalmente cuando pasa a presentar la *teoría de los triángulos semejantes*. De acuerdo con la definición habitual, se dice que dos triángulos son semejantes, cuando la longitud de sus lados correspondientes es distinta, pero la *razón* entre ellos es la misma. Luego, no es difícil desarrollar una teoría de los triángulos semejantes si las razones entre sus lados correspondientes son números enteros o racionales. Sin embargo, si las razones no son números racionales (por ejemplo, cuando se compara un triángulo isósceles rectángulo con su mitad, obtenida al trazar una altura), es bastante problemático expresar la noción de que los ángulos son proporcionales entre sí, si no se trabaja con números. En otras palabras, es realmente difícil mostrar que la razón de la longitud de los lados de los triángulos es igual, si dichas longitudes no pueden ser expresadas numéricamente. Para superar esta dificultad Euclides presenta, en el libro V de los *Elementos*, la célebre "teoría de las proporciones", atribuida usualmente a Eudoxio de Cnidos.

Los conceptos centrales de la teoría de las proporciones del libro V aparecen en las definiciones IV, V, VI. La definición IV afirma que "dos magnitudes están en razón entre sí, si es posible, al tomar un múltiplo de una, sobrepasar a la otra". La definición V, quizás la más importante, establece en cambio cuando dos razones son *idénticas* o iguales entre sí:

> Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas.

La formulación misma de Euclides es un poco engorrosa y es habitual expresar el contenido de esta definición, utilizando una notación algebraica moderna, de la siguiente manera: dos *magnitudes* (segmentos lineales, áreas, volúmenes, etc.) tienen la misma razón respecto de otras dos (en símbolos $a : b = c : d$) si tomando n múltiplos (enteros positivos) de a y c y m múltiplos (enteros positivos) de b y d, se tiene que $na > mb$ o $na = mb$ o $na < mb$ sí y sólo si $nc > md$ o $nc = md$ o $nc < md$, respectivamente. Asimismo, también se ha observado a menudo que, *si consideramos* a las magnitudes a, b, c, d como números, entonces la definición V dice que un número racional m/n es menor, igual o mayor a a/b sí y sólo si el mismo número racional es menor, igual o mayor a c/d. Más aún, *si tomamos* estas magnitudes a, b, c, d como números reales, ello es lo mismo que decir que a/b y c/d representan el mismo número real, puesto que los números racionales son *densos* en el conjunto de los números reales. Luego, éste es el mismo argumento utilizado por algunos matemáticos del siglo XIX, en particular por Dedekind, para construir el conjunto de los números reales partiendo del conjunto de los racionales, i.e, su definición de los números irracionales como "cortaduras" de los números racionales.[23]

La cuestión respecto de en qué medida es legítimo considerar la teoría eudoxia de las proporciones del libro V como una anticipación de las definiciones de los números reales en el siglo XIX, o sea, como una proto–teoría de los números reales, ha sido extensamente debatida en la literatura.[24] Sin embargo, independientemente de si esta pregunta es respondida afirmativa o negativamente, es claro que la teoría de las proporciones del libro V no posee el mismo *carácter puramente geométrico* que los cuatro libros anteriores. En otras palabras, se trata de una teoría de una naturaleza aritmética, más que geométrica.

Habiendo desarrollado íntegramente la teoría de las proporciones de un modo "abstracto", en el libro siguiente Euclides la aplica a la geometría, elaborando su conocida teoría de los triángulos semejantes. El resultado más importante de esta teoría, y que además es la base para las demostraciones subsiguientes, es la proposición VI.2, que establece que si una línea paralela a la base de un triángulo corta sus lados, entonces los corta proporcionalmente; e inversamente, si una línea corta los lados de un triángulo proporcionalmente, entonces ella es paralela a la base del triángulo. La demostración que propone Euclides es una de las más ingeniosas de todo los *Elementos* y utiliza *la teoría del área*, desarrollada previamente en el libro I. Luego, un problema visible de la teoría de los triángulos semejantes, desarrollada por Euclides en el libro VI, era que estaba basada en dos teorías diferentes, con dos fundamentos bien distintos: uno geométrico y

[23] Véase Dedekind (1872). Un estudio histórico se encuentra en (Boniface 2002).

[24] Para una exposición detallada de la teoría de las proporciones de Eudoxio puede verse (Mueller 1981, cap. 3) y (Moise 1973, cap. 20). Sobre las discusiones historiográficas, véase Corry (1994).

otro aritmético. Desde el punto de vista de los fundamentos, ésta era una consecuencia más bien indeseable. En segundo lugar, y quizás más importante aún, otra dificultad importante con la teoría de las proporciones de Eudoxio era que suponía tácitamente al axioma de Arquímedes, sin el cual no podía siquiera ser formulada. Este axioma aparece explícitamente en la definición V.

Dado que un objetivo central de Hilbert era prescindir lo más posible de los axiomas de continuidad, en este respecto la teoría de las proporciones del libro V resultaba muy inadecuada.[25] Remediar estas dificultades fue entonces una de las grandes contribuciones de Hilbert a los fundamentos de la geometría euclídea elemental. Es decir, en primer lugar, Hilbert elabora una nueva teoría de las proporciones exclusivamente sobre la base de su aritmética de segmentos, construida de manera puramente geométrica e independientemente del axioma de Arquímedes. En segundo lugar, aplica esta nueva teoría de las proporciones para desarrollar la teoría de los triángulos semejantes y del área. Dicho de otro modo, Hilbert llevó a cabo una unificación de dos teorías que, anteriormente, estaban basadas en fundamentos distintos. Finalmente, utiliza estos descubrimientos para dar una nueva respuesta al problema de la introducción del número en geometría. Más precisamente, logra mostrar cómo es posible introducir coordenadas en la geometría elemental de un modo "puramente geométrico", en donde los teoremas clásicos de Pascal y Desargues desempeñan un papel fundamental.

El elemento central de la contribución de Hilbert descansa así en su aritmética de segmentos. Me ocuparé entonces de presentarla a continuación.

5.5.2. La aritmética de segmentos [*Streckenrechnung*]

Los resultados geométricos alcanzados por Hilbert, mencionados en la sección anterior, se encuentran en los capítulos III–V de *Fundamentos de la geometría*. En el capítulo III Hilbert desarrolla una aritmética de segmentos basada en el teorema de Pascal, presenta su nueva teoría de las proporciones y los triángulos semejantes, e indica cómo es posible definir, utilizando esta aritmética de segmentos, un sistema de coordenadas (cartesianas). El capítulo IV está dedicado a la teoría del área. Finalmente, el capítulo V se ocupa del teorema del Desargues y de la aritmética de segmentos que se puede construir basándose en éste. Más precisamente, en estos capítulos se demuestra que, mientras que la aritmética de segmentos asociada al teorema de Pascal satisface todas

[25] Hartshorne señala que otro problema con la teoría de los triángulos semejantes de Euclides es que recurre a la teoría del área, la cual no fue sin embargo satisfactoriamente tratada en los libros previos. Cf. (Hartshorne 2000, p. 167).

las propiedades de un cuerpo ordenado, la aritmética de segmentos asociada al teorema de Desargues carece de la propiedad conmutativa bajo la multiplicación. En lo que sigue me concentraré en el capítulo III, que contiene los resultados más relevantes para el problema que estamos analizando.

Antes de proseguir, quizás sea oportuno recordar algunos conceptos que serán mencionados a menudo a continuación:

Definición. *Un* ***cuerpo*** *es un conjunto* $\mathbb{K}$*, junto con dos operaciones binarias* $+$, $\cdot$, *i.e., para cada* $a, b \in \mathbb{K}$ *existen* $a + b \in \mathbb{K}$ *y* $a \cdot b \in \mathbb{K}$*, tales que se cumplen las siguientes condiciones:*

1) El conjunto $\mathbb{K}$, junto con la operación $+$, forma un grupo abeliano, es decir:

(I) $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$,

(II) $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{K}$,

(III) existe un elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $a + 0 = a$, para todo $a, b \in \mathbb{K}$,

(IV) para cada $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento $-a \in \mathbb{K}$ tal que $a + (-a) = 0$.

2) El conjunto $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$, junto con la operación $\cdot$, forma un grupo abeliano, es decir:

(I) $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{K}^*$,

(II) $ab = ba$, para todo $a, b \in \mathbb{K}^*$,

(III) existe un elemento $1 \in \mathbb{K}^*$ tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a, b \in \mathbb{K}^*$,

(IV) para cada $a \in \mathbb{K}^*$ existe un elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

3) Las operaciones $+$ y $\cdot$ se relacionan por medio de la ley distributiva

$$a(b + c) = ab + ac \qquad (a + b)c = ac + bc$$

Definición. *Un* ***cuerpo ordenado*** *es un cuerpo* $\mathbb{K}$*, junto con un subconjunto* $\mathbb{P}$*, cuyos elementos se denominan positivos, que satisface las siguientes condiciones:*

(I) Si $a, b \in \mathbb{P}$, entonces $a + b \in \mathbb{P}$ y $ab \in \mathbb{P}$.

(II) Para todo $a \in \mathbb{P}$, vale uno y sólo uno de los siguientes: $a \in \mathbb{P}$; $a = 0$; $-a \in \mathbb{P}$.

Un cuerpo ordenado que satisface el axioma de Arquímedes se denomina *cuerpo ordenado arquimediano*, y un cuerpo que satisface el axioma de completitud, se llama *cuerpo ordenado completo*. Por último, en la actualidad es usual afirmar que un modelo de los axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia) de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1999) constituye un *plano de Hilbert*.

Hilbert comienza entonces su exposición en el capítulo III presentando una lista de axiomas para lo que denomina un "sistema de números complejos". A pesar de lo que parece estar indicado en su nombre, estos axiomas constituyen el primer sistema axiomático para un cuerpo ordenado arquimediano.[26] Éste mismo sistema de axiomas será reproducido poco después en su artículo "Sobre el concepto de número" (Hilbert 1900c), en donde además se incorpora el axioma de completitud.[27]

A continuación, Hilbert demuestra un caso especial del teorema de Pascal para las secciones cónicas, que como vimos tiene una gran importancia en la geometría proyectiva. Esta versión del teorema de Pascal afirma lo siguiente:

Teorema de Pascal. Dados dos conjuntos de puntos A, B, C y A', B', C', situados respectivamente sobre dos rectas que se intersecan, de tal manera que ninguno de ellos se encuentra en la intersección de estas líneas. Si CB' es paralelo a BC' y CA' es también paralelo a AC', entonces BA es paralelo a AB'. (Figura 5.4)

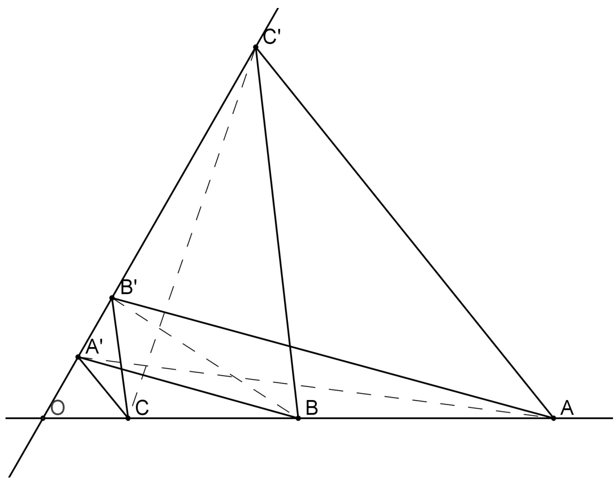


Figura 5.4.: Versión del teorema de Pascal para las sección cónicas. (Hilbert 1899, p. 28)

[26] En sus notas de clases, Hilbert aclara que por un sistema de números complejos entiende a todo sistema de números que, al igual que los números complejos, no satisface *todos* los axiomas para los números reales. De acuerdo con esta definición, $\mathbb{Q}$ o el cuerpo Ω de números algebraicos son ejemplos de sistemas de números complejos. Cf. (Hilbert 1902c, p. 564).

[27] Véase capítulo 6.

Lo relevante de la demostración del teorema de Pascal proporcionada Hilbert es que utiliza sólo los axiomas de congruencia y los axiomas de incidencia y orden en el plano, lo cual era un argumento técnicamente difícil de llevar a cabo. En consecuencia, la demostración de Hilbert *no hace uso de ningún postulado de continuidad*, o más precisamente, del axioma de Arquímedes. El teorema de Pascal proporciona luego lo necesario para construir una aritmética para los segmentos lineales, que cumple con todas las operaciones aritméticas "de los números reales". En palabras del propio Hilbert:

> El teorema de Pascal probado en el parágrafo precedente nos coloca en posición de introducir una aritmética para los segmentos lineales, en la que todas las leyes de las operaciones de los números reales se cumplen sin excepción. (Hilbert 1899, p. 32)

En primer lugar, Hilbert aclara que, en el cálculo de segmentos que se presentará a continuación, la palabra "igual" y el signo = serán utilizados en lugar de la palabra "congruentes" y el signo ≡.[28] Apelando a un lenguaje más moderno, Hilbert advierte que las operaciones de suma y multiplicación serán definidas para clases de equivalencia de segmentos lineales (módulo congruencia). La primera operación en ser definida es la suma o adición de segmentos lineales. Para ello se utiliza una simple construcción geométrica, de acuerdo a cómo ocurre habitualmente cuando se quiere caracterizar esta operación de un modo puramente geométrico:

> Si A, B, C son tres puntos sobre una línea y B se encuentra entre A y C, entonces decimos que $c = AC$ es la suma de los segmentos $a = AB$ y $b = BC$, y establecemos que
>
> $$c = a + b$$

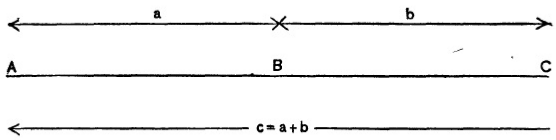


Figura 5.5.: Suma de segmentos lineales. (Hilbert 1899, p. 33)

Hilbert señala que, una vez definida de esta manera la adición de segmentos lineales, es muy fácil probar que las leyes asociativa y conmutativa se cumplen, utilizando los

[28] Cf. (Hilbert 1899, p. 33).

axiomas de congruencia para segmentos (III 1–3).[29] La tarea siguiente será entonces definir la multiplicación de segmentos lineales. Para ello Hilbert procede también del modo habitual, recurriendo a una construcción geométrica muy simple: elegimos un segmento arbitrario cualquiera que permanecerá fijo y que nos servirá como unidad lineal. Este segmento lo denotamos 1. Luego, trazamos desde el vértice O los segmentos 1 y b sobre uno de los lados de un triángulo rectángulo. Sobre el otro lado trazamos el segmento a. Ahora unimos con una línea el punto final del segmento 1 y el punto final del segmento a y desde el punto final del segmento b trazamos la paralela a esta línea (figura 5.6). Esta línea determina así un segmento c sobre el otro lado, y este segmento es el producto del segmento a por el segmento b, al cual designamos

$$c = ab.$$

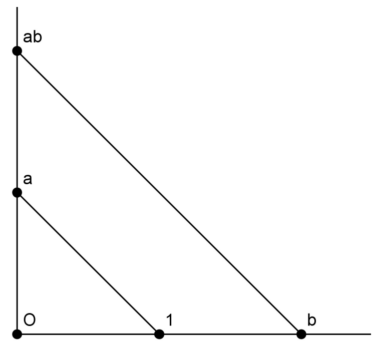


Figura 5.6.: Producto de segmentos lineales. (Hilbert 1899, p. 33)

Una vez definido de este manera el producto de segmentos lineales, se debe probar que satisface las propiedades identificadas previamente para esta operación. En particular, Hilbert muestra que el teorema de Pascal, anteriormente demostrado sin recurrir al axioma de Arquímedes, es esencial probar la propiedad conmutativa del producto: $ab = ba$. La demostración procede como sigue: en primer término, construimos el segmento ab tal como se indicó recién. Luego trazamos el segmento a sobre el primer lado del triángulo rectángulo y el segmento b sobre el segundo lado. Ahora unimos el punto final de este segmento b con el segmento del segmento 1, y trazamos la paralela a esta línea que pasa por el punto a. Esta línea paralela determina así el segmento ba sobre el otro lado del triángulo, el cual coincide con el segmento ab construido inicialmente (figura 5.7).

[29] Dada su simplicidad, Hilbert no proporciona una demostración de estas propiedades. Estas pruebas pueden encontrarse, por ejemplo, en (Hartshorne 2000, pp. 168–169).

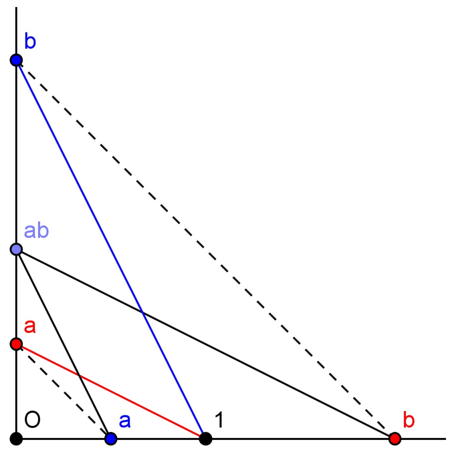


Figura 5.7.: Conmutatividad del producto de segmentos lineales. (Hilbert 1899, p. 34)

El aspecto central de la prueba reside en que el segmento ab coincide con el segmento ba gracias al teorema de Pascal, tal como puede observarse en la figura. Es decir, si unimos los puntos a y b sobre cada uno de los lados del triángulo recto respectivamente entre sí, obtenemos una configuración de tres pares de puntos y líneas cuyas relaciones de intersección coinciden con la descriptas en el teorema de Pascal, de acuerdo con la versión antes indicada. De este modo, el mencionado teorema le permite a Hilbert demostrar la propiedad conmutativa para el producto de segmentos lineales. A continuación, utiliza una estretegia similar para probar la ley asociativa para el producto y la ley distributiva para el producto y la suma.[30]

Hasta aquí se ha definido una aritmética para segmentos lineales, en donde se cumplen las leyes asociativa y conmutativa para la adición, las leyes asociativa y conmutativa para el producto, y la ley distributiva para la adición y el producto. Con la ayuda de esta aritmética de segmentos, ya es posible reconstruir la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes de Euclides, *sin hacer uso del axioma de Arquímedes*. Hilbert no se detiene a desarrollar estas teorías en detalle, sino que se limita a presentar una nueva definición de proporcionalidad y a demostrar, utilizando su aritmética de segmentos, el teorema fundamental de la teoría de las proporciones, i.e, la proposición VI.2 de los *Elementos*.[31] La definición de proporcionalidad, basada en su definición previa de producto de segmentos lineales, es la siguiente[32]:

Definición. *Si a, b, a', b' son cuatro segmentos lineales, entonces la proporción*

[30] Cf. (Hilbert 1899, pp. 34–35).
[31] Véase (Hilbert 1899, §16).
[32] (Hilbert 1899, p. 36).

$$a : b = a' : b'$$

no denota sino la igualdad de segmentos lineales

$$ab' = a'b.$$

En segundo lugar, para definir la noción de *semejanza* entre dos triángulos, Hilbert no recurre a la igualdad de la "razón" entre los lados correspondientes, sino en cambio a la congruencia de los ángulos de los triángulos.

Definición. *Dos triángulos se llaman semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.*[33]

Finalmente, tras demostrar que si los segmentos a, b, a', b' son los lados correspondientes de dos triángulos, entonces la definición anterior de proporcionalidad es válida (Teorema 22)[34], Hilbert enuncia el teorema fundamental de la proporcionalidad, en una versión adaptada a su propia teoría:

Teorema 23. Si dos rectas determinan respectivamente, en los lados de un ángulo cualquiera, los segmentos a, b y a', b', entonces se verifica la proporción

$$a : b = a' : b'$$

Recíprocamente, si cuatro segmentos a, b, a', b' satisfacen esta proporción, y a, a' y b, b' son construidos de a pares en los lados de un ángulo cualquiera, entonces las líneas que unen a los puntos finales de a, a' y b, b' son paralelas. (Hilbert 1899, p. 37)[35]

Una vez enunciados estos conceptos básicos de su nueva teoría de las proporciones, el paso siguiente consiste en *extender* la aritmética para segmentos, de modo que incluya también *relaciones de orden*. Hilbert procede de la siguiente manera: en primer lugar, a la aritmética de segmentos antes definida le añadimos otro conjunto de tales segmentos. Por medio de los axiomas de orden, es entonces fácil distinguir sobre una línea una dirección "positiva" y una "negativa". Un segmento AB, denotado antes como a, continuará llamándose a si B se encuentra en dirección positiva respecto de a; en caso contrario, se lo designará como $-a$. Asimismo, un punto A cualquiera se designará ahora como 0. El segmento AB es entonces positivo o mayor que 0 (en símbolos, $a > 0$); el segmento $-a$ se designa "negativo" o menor que 0 (en símbolos, $-a < 0$).[36] Introducidas

[33] (Hilbert 1899, p. 35)
[34] Teorema 41 en (Hilbert 1999).
[35] Teorema 42 en (Hilbert 1999).
[36] Cf. (Hilbert 1899, pp. 37–38).

de este modo las relaciones de orden en la aritmética para segmentos, es posible probar, utilizando los axiomas I–III, la existencia de un elemento neutro y de un elemento inverso para la suma y para la multiplicación. Es claro además que en esta aritmética extendida para segmentos lineales se cumplen todas las propiedades definidas en un *cuerpo ordenado*. Hilbert no proporciona una demostración de esta última afirmación, sino que concluye directamente:

> En esta aritmética de segmentos todas las reglas de operaciones 1–16, enumeradas en la sección 13, son válidas.

Las operaciones definidas en los axiomas 1–16 para un sistema de números complejo se corresponden, como hemos dicho, con las operaciones válidas en un *cuerpo ordenado*. Dos observaciones resultan entonces pertinentes. La primera se refiere a los axiomas que son necesarios para construir este cálculo de segmentos. Mientras que la suma de segmentos lineales es válida en cualquier *plano de Hilbert*, para la definición de la multiplicación de segmentos lineales se necesita un plano de Hilbert en donde sea válido además el axioma (IV) de las paralelas. Ello significa que en la construcción de esta aritmética de segmentos *Hilbert no recurre a ningún axioma de continuidad*, en particular, *al axioma de Arquímedes*. En segundo lugar, la aritmética para los segmentos lineales de Hilbert es un ejemplo concreto de cómo se puede construir, de manera *puramente geométrica*, un conjunto que satisface la estructura de un cuerpo ordenado. Más precisamente, dado un plano de Hilbert que satisface además el axioma (IV) de las paralelas, y habiendo elegido un segmento unidad 1, existe un único (salvo isomorfismo) cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ cuyo conjunto $\mathbb{P}$ de elementos positivos son clases de equivalencia de segmentos lineales (módulo congruencia), junto con las operaciones de suma y multiplicación, según fueron antes definidas.[37] Si bien Hilbert no enuncia esta conclusión exactamente en estos términos, es claro que reconoce esta consecuencia de su aritmética para segmentos lineales, cuando afirma que ésta "satisface todas las leyes de las operaciones de los números reales sin excepción" (Hilbert 1899, p. 32).[38]

El último paso para culminar con la "introducción del número" en la geometría será mostrar cómo que es posible introducir coordenadas en la geometría, utilizando la aritmética de segmentos antes desarrollada. Más precisamente, Hilbert deberá exhibir cómo se puede construir un sistema de coordenadas, semejante a la geometría analítica (cartesiana) habitual, en donde los coeficientes de las coordenadas numéricas son pre-

[37] Hartshorne (2000, pp. 173–174) proporciona una demostración de esta proposición.

[38] Sobre el conocimiento de Hilbert de nociones tales como "isomorfismo", véase el capítulo 6, sección 6.4.5.

cisamente elementos – i. e., segmentos – tomados del cuerpo ordenado asociado a su aritmética de segmentos. Para ello procede de la siguiente manera: partimos de un plano de Hilbert α que satisface el axioma de las paralelas, es decir, un plano en donde se cumplen los axiomas I–IV. Trazamos entonces dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto 0, las cuales nos servirán como los ejes fijos de coordenadas X, Y. Sobre cada una de estas rectas trazamos respectivamente, desde 0, los segmentos x, y. Seguidamente trazamos dos rectas perpendiculares a estas dos líneas, desde los puntos finales de los segmentos x, y; la intersección de ambas rectas determinan el punto P. *Los segmentos* x, y se llaman entonces *las coordenadas* de P. Y todo punto en el plano α está unívocamente determinado por sus coordenadas x, y, que pueden ser segmentos positivos, negativos o 0.

Por otra parte, si se utilizan los resultados de la teoría de las proporciones, anteriormente desarrollada, se puede deducir fácilmente la ecuación de la recta. Sea l una línea cualquiera sobre el plano α que pasa por 0 y por un punto C, cuyas coordenadas son el par ordenado (a, b). Si x, y son las coordenadas de un punto cualquiera de l, entonces por el teorema 23 se cumple que $a : b = x : y$. Dada la definición de proporcionalidad enunciada por Hilbert, ello es lo mismo que decir que $bx - ay = 0$, o sea, la ecuación de la recta (figura 5.8).

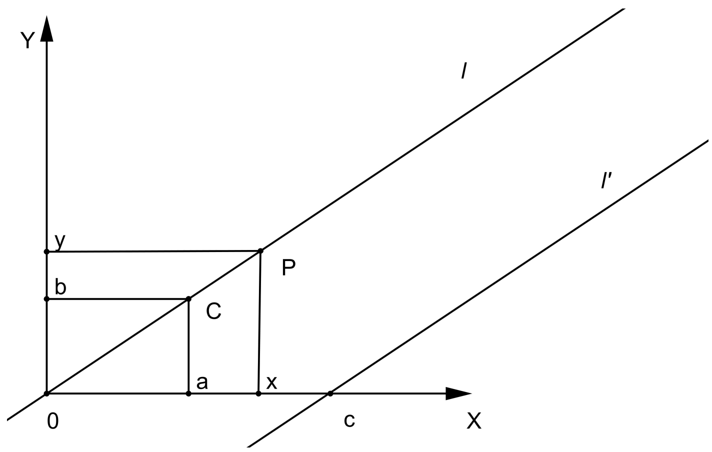


Figura 5.8.: (Hilbert 1899, p. 38)

Obtenida de este modo la ecuación (general) de la recta, Hilbert da por culminada su exposición en torno a cómo es posible introducir un sistema de coordenadas en la geometría "desde dentro", es decir, de un modo *puramente geométrico*, que no recurre a un cuerpo numérico en particular como una *imposición desde fuera*. La conclusión que extrae del procedimiento que hemos analizados es la siguiente:

> A partir de estos desarrollos concluimos, de un modo independiente al axioma de Arquímedes, que toda línea en el plano puede ser representada por medio de ecuaciones lineales a través de las coordenadas x, y, e inversamente, que todas las ecuaciones lineales de tal clase, *en la que los coeficientes son segmentos en la geometría dada*, representan una línea. (...) La construcción subsiguiente de la geometría puede ser realizada por medio de los métodos habituales que son utilizados en la geometría analítica. (Hilbert 1899, p. 38)

La técnica desarrollada por Hilbert permite entonces probar que, dados un plano de Hilbert α que satisface el axioma de las paralelas y un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ asociado a la aritmética de segmentos en α, el plano α es isomórfico a un plano cartesiano $\mathbb{K}^2$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Asimismo, Hilbert reconoce que si, junto con los axiomas I–IV, se asume además la validez del axioma de Arquímedes – hasta el momento no utilizado en ningún momento –, entonces recién es posible asignar un número real a cada punto sobre la línea.[39] Por último, esta construcción de una aritmética para segmentos lineales exhibe la conexión fundamental entre dos teoremas clásicos de la geometría proyectiva, como los teoremas de Desargues y Pappus (Pascal), y las propiedades (algebraicas) de las operaciones definidas geométricamente para los segmentos lineales. Más precisamente, Hilbert muestra que mientras que el teorema Pascal es el responsable de la propiedad conmutativa para la multiplicación[40], en el teorema de Desargues se funda la propiedad asociativa para esta misma operación.

5.6. Observaciones finales: Método axiomático y unidad de la matemática

Quisiera concluir este capítulo con algunas observaciones respecto del significado general de la aritmética para segmentos lineales, elaborada por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*.

En primer lugar, la investigación de Hilbert en torno a la introducción del número en geometría constituyó una nueva respuesta a un problema de notable importancia para los fundamentos de la geometría, a saber: el papel de los principios o postulados de

[39] Cf. (Hilbert 1899, pp. 38–39). En la segunda edición de *Fundamentos de la geometría* (1903), Hilbert añade el axioma de completitud, que permite garantizar una correspondencia uno–a–uno con los números reales. Este tema será tratado en el próximo capítulo.

[40] Hilbert confirma este resultado en el capítulo V de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1999). Allí demuestra, entre otras cosas, que en una geometría plana donde los axiomas I, 1–3, II, IV y el teorema de Desargues son válidos, es posible construir una aritmética de segmentos en donde se cumplen todas las propiedades de un cuerpo ordenado, *menos la propiedad conmutativa de la multiplicación*.

continuidad en la coordenatización de la geometría. Este problema fue planteado en un primer momento en el campo de la geometría proyectiva, y tuvo en la década de 1870 su momento de mayor discusión. Como hemos señalado, von Staudt (1847; 1856; 1857) realizó una contribución muy importante en este sentido, al desarrollar una técnica que permitía introducir un sistema coordenadas en la geometría proyectiva, utilizando métodos estrictamente proyectivos. Sin embargo, poco más de una década después, Klein lanzó una serie de duras críticas al proyecto de von Staudt, advirtiendo que para que efectivamente sea posible introducir coordenadas en el plano y en el espacio proyectivo, era imprescindible añadir un axioma de continuidad, una condición que aquél asumía implícitamente. Luego, el procedimiento utilizado por Hilbert para introducir coordenadas en la geometría euclídea elemental, basado en su novedoso cálculo de segmentos, reveló que realmente era posible introducir un sistema de coordenadas de un modo puramente geométrico y *sin utilizar ningún axioma de continuidad*. Más aún, los resultados alcanzados por Hilbert exhibieron, por primera vez, la potencialidad de los teoremas de Desargues y Pascal para realizar esta coordenatización *interna* de la geometría.

En segundo lugar, otra consecuencia de este cálculo para segmentos lineales fue que permitió finalmente "sortear el hiato" o "trazar un puente", por así decirlo, entre la geometría sintética y la geometría analítica. Según lo advierte Hilbert en sus propias notas de clases para el curso de 1898/99, sus investigaciones revelaron cómo "es posible construir un cálculo con segmentos o una geometría analítica, en donde las letras representan de hecho segmentos, y no números" (Hilbert 1898b, p. 261). Hilbert reconoce entonces que los segmentos lineales pueden conformar, una vez que las operaciones de adición y producto han sido definidas adecuadamente, la base de un *cuerpo* (*ordenado*) que puede ser a su vez utilizado para construir un sistema de coordenadas. Mas ello equivale a afirmar que, en gran medida, la geometría analítica es posible sin la imposición de cuerpos numéricos "desde afuera". Es decir, los resultados de Hilbert constituyen una explicación de cómo y por qué existe una completa correspondencia entre la geometría sintética y la geometría analítica. O más precisamente, al probar que la teoría de las magnitudes surge intrínsecamente en la geometría sintética, y por lo tanto no debe ser impuesta desde fuera por medio de supuestos (numéricos) adicionales, Hilbert consigue mostrar al mismo tiempo que la *suposición general que guía a la geometría analítica*, i.e., la coordenatización de los puntos de una línea con los números reales, *está realmente justificada*. En suma, por medio de su cálculo para segmentos lineales, construido de un modo puramente geométrico y sin apelar a ningún postulado de continuidad, Hilbert brinda un fundamento axiomático para las conexiones (estructurales) entre la geometría euclídea y la geometría analítica, una preocupación que como vimos está presente ya en sus primeros trabajos consagrados a los fundamentos de la geometría.[41]

Finalmente, en virtud de nuestro examen, podemos comprender ahora la afirmación de Hilbert según la cual, gracias a su análisis axiomático, llegamos a "proporcionar un nuevo fundamento para la unidad de la matemática" (Hilbert 1898b, p. 223). Para repetir una vez más, uno de los resultados más importante a los que arribó Hilbert, en sus investigaciones axiomáticas en torno a la introducción del número en geometría, es que los segmentos lineales comparten con los números reales la estructura (algebraica) de un cuerpo ordenado. En este sentido, su nuevo método axiomático formal le permitió mostrar cómo distintas teorías matemáticas como la geometría y la aritmética (y el análisis), en principio para él muy distantes tanto epistemológica como metodológicamente, están *conectadas estructuralmente*. La contribución del método axiomático (formal) en la consecución de esta tarea se manifiestó así en dos puntos principales. En primer lugar, para mostrar que los segmentos lineales comparten con los números reales la estructura de un cuerpo ordenado, era necesario contar con una *axiomatización precisa de esta estructura algebraica*, a partir de la cual es posible mostrar qué propiedades son compartidas por el cuerpo formado por segmentos y por el cuerpo formado por números, y cuáles no. En el *Festschrift* Hilbert presenta entonces el primer sistema de axiomas para un cuerpo ordenado (arquimediano), que sin embargo llama allí los axiomas para "un sistema de números complejos".[42] En segundo lugar, la presentación de cada una de estas estructuras como un *sistema de axiomas formales* es lo que hace posible, por un lado, identificar y descubrir las semejanzas estructurales; por otro lado, es lo que permite determinar qué axiomas o teoremas son responsable de cada una de las propiedades.

En suma, además del interés y la relevancia que recaen en estos resultados desde un punto de vista estrictamente matemático, la aritmética para segmentos lineales constituye un claro ejemplo de una *creencia general* de Hilbert respecto de la naturaleza de la matemática y del valor del método axiomático para el conocimiento matemático. Me refiero a su conocida tesis de la "unidad de la matemática", expresada en su conferencia de París "Problemas matemáticos" (Hilbert 1900b):

> En mi opinión, la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vita-

[41] Cf. *supra*, capítulo 1, sección 1.3.1.

[42] Cf. (Hilbert 1899, § 13). Los primeros dieciséis axiomas de Hilbert caracterizan un cuerpo ordenado, mientras que si se añade el axioma diecisiete (axioma de Arquímedes), obtenemos una axiomatización de un cuerpo ordenado arquimediano. En "Sobre el concepto de número" (Hilbert 1900c) y en la segunda edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1903), Hilbert añade a estos diecisiete axiomas el "Axioma de completitud" [*Vollständigkeitsaxiom*], con lo cual se llega a un sistema de axiomas para un cuerpo ordenado completo. Este tema será analizado en el próximo capítulo (6).

> lidad está condicionada por la conexión entre sus partes. Puesto que a pesar de la variedad del conocimiento matemático, todavía somos muy conscientes de las ideas de la matemática como un todo y de las numerosas analogías en sus distintos campos de conocimiento [*Wissensgebieten*]. También llegamos a percibir que, cuanto más avanzada o desarrollada se encuentra una teoría, más armoniosa y uniformemente procede su construcción, y relaciones insospechadas entre ramas hasta el momento separadas de las ciencias son reveladas. De este modo ocurre que a través de su extensión, el carácter orgánico de la matemática no se pierde sino que se manifiesta a sí mismo más claramente (. . .) La unidad orgánica de la matemática es inherente a la naturaleza de esta ciencia, porque la matemática es el fundamento de todo conocimiento exacto de los fenómenos naturales. (Hilbert 1900b, p. 329)

La aritmética de segmentos que hemos analizado en este capítulo es así, para Hilbert, un caso concreto en donde puede percibirse este tipo de "unidad orgánica" de la matemática. Es decir, es un claro ejemplo de cómo dos disciplinas como la geometría y la aritmética, en apariencia muy distintas o separadas, están conectadas estructuralmente. Y según hemos podido observar en sus notas de clases para geometría, Hilbert reconoce que ésta es precisamente una de las *características más atractivas y fructíferas de su nuevo método axiomático*, a saber: la capacidad de descubrir y exhibir conexiones hasta el momento desconocidas entre distintas teorías matemáticas, y de esa manera contribuir a la unidad del conocimiento matemático.

CAPÍTULO 6

Consistencia, independencia y completitud

6.1. Introducción

En la medida en que para Hilbert los axiomas no deben ser más considerados como verdades autoevidentes, ciertos criterios o condiciones de adecuación deben ser impuestos a los sistemas axiomáticos, para evitar que la libertad con la que los axiomas pueden ser postulados colapse en arbitrariedad. Como hemos visto, Hilbert exige por este motivo desde un inicio que todo sistema axiomático sea 1) *consistente*, 2) *completo*, 3) que el número de axiomas sea *finito*[1], 4) que los axiomas sean *independientes* uno de otros. Empero estas condiciones de adecuación no eran de ningún modo nuevas. Toepell ha observado, por ejemplo, que la exigencia por la independencia de los axiomas había sido postulada claramente en muchos trabajos geométricos, al menos veinte años antes que Hilbert comenzara sus investigaciones.[2] Del mismo modo, en los trabajos de Dedekind y Cantor es posible encontrar explícitamente formulado el requerimiento de consistencia en el establecimiento de toda nueva teoría.[3] Finalmente, en su nueva presentación de la mecánica, Hertz insistió en la independencia y en un tipo de completitud de los principios elegidos. Sin embargo, es preciso reconocer que Hilbert fue sin dudas el primero en fijar estas condiciones conjuntamente y en relacionarlas directamente al método axiomático.

Ahora bien, la caracterización de las mencionadas propiedades 'metalógicas' ofrecida por Hilbert en esta etapa inicial, sólo pudo haber tenido un carácter impreciso o informal. En efecto, para definir con precisión estos requerimientos era necesario contar al menos con las nociones de deducción formal, deducibilidad y consecuencia lógica; y por supuesto

[1] Por lo general, Hilbert se refiere a esta condición, aunque de un modo más laxo, como "simplicidad".
[2] Cf. (Toepell 1986, p. 59).
[3] Cf. (Hallett 1994).

ello era algo con lo que Hilbert no contaba todavía en 1900. Más aún, a pesar de que sus investigaciones metageométricas sobre la independencia de los axiomas son de una naturaleza próxima a lo que se llama hoy "teoría de modelos", existen claros indicios que nos llevan a pensar que, en esta etapa temprana, Hilbert no contaba con un clara distinción conceptual entre sintaxis y semántica.[4]

Es lógico entonces que, dadas estas limitaciones conceptuales, Hilbert tampoco ofrezca en sus manuscritos una caracterización rigurosa de las propiedades 'metalógicas' de un sistema axiomático. Sin embargo, en este capítulo intentaré mostrar que estas fuentes aportan, en cambio, consideraciones y observaciones muy valiosas para evaluar cuál fue efectivamente el lugar que estas propiedades ocuparon en sus investigaciones geométricas correspondientes a este período inicial. El objetivo de este sexto y último capítulo será entonces utilizar este valioso material para reexaminar el tratamiento que las nociones 'metalógicas' de completitud, independencia y consistencia recibieron en los primeros estudios axiomáticos de Hilbert en el campo de la geometría. Más precisamente, argumentaré que esta cuestión puede ser fructíferamente abordada cuando se analizan, sobre la base de estas nuevas fuentes, las vicisitudes que rodearon a la inclusión del axioma de completitud [*Vollständigkeitsaxiom*] en el sistema de axiomas hilbertiano para la geometría euclídea.

El capítulo sigue el siguiente orden. En la sección 6.2 analizo la noción de consistencia. Por un lado, señalo que Hilbert fluctúa, en este etapa, entre una especie de definición semántica de consistencia, esto es, como *satisfacibilidad*, y una especie de noción sintáctica, que concibe la consistencia como la imposibilidad de deducir una contradicción por medio de un número finito de inferencias lógicas. Esta definición, sin embargo, es presentada sin hacer ninguna referencia a un sistema lógico específico. Por otro lado, afirmo que la consistencia de la geometría euclídea, o más precisamente, la cuestión de probar la consistencia de la geometría mostrando que su sistema de axiomas podía ser reducido a los axiomas para los números reales, no era en este momento una preocupación central para Hilbert. Seguidamente, en la sección 6.3, me ocupo de la noción de independencia. En particular, en esta sección argumento que la independencia fue, *en la práctica*, la noción metalógica en la que Hilbert depositó un mayor interés, en el contexto de sus investigaciones geométricas.

La sección 6.4 está dedicada a la noción de completitud y, en especial, al axioma de completitud. En primer lugar, menciono una noción 'pre–formal' de completitud aludida

[4] Zach (1999) ha señalado que la primera distinción explícita de Hilbert entre sintaxis y semántica, se encuentra en un curso de 1917. Cf. (Hilbert 1917).

por Hilbert, que consiste en exigir que todos los hechos conocidos del dominio científico que debe ser axiomatizado, puedan ser deducidos (lógicamente) a partir de los axiomas. En segundo lugar, analizo en detalle la incorporación del axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental, utilizando en gran medida la información que aportan las notas de clase de Hilbert. En particular, primero intento mostrar que la 'completitud' de la que habla el axioma de completitud, de ningún modo se refiere a la propiedad de completitud del *sistema axiomático*, en un sentido estricto. Segundo, señalo que este hecho es advertido explícitamente por Hilbert en un período posterior. Tercero, argumento que las consideraciones y discusiones evidenciadas en sus notas de clases, no sólo permiten ganar mayor claridad respecto de cómo Hilbert juzgó la naturaleza y la función del axioma de completitud en su sistema axiomático para la geometría elemental, sino que además hacen posible distinguir ciertas diferencias importantes entre el papel que este axioma cumple en el sistema de axiomas para los números reales y en el sistema para la geometría. Cuarto, sostengo que la indagación sobre las fuentes mencionas aporta evidencia muy convincente respecto de la notable importancia que Hilbert depositó en sus investigaciones sobre la independencia de los axiomas geométricos. Finalmente, concluyo que esta elucidación permite alcanzar una perspectiva mejor contextualizada del abordaje axiomático a la geometría, desarrollado por Hilbert hacia fines del siglo XIX y principios del siglo XX.

6.2. Consistencia

Hemos señalado anteriormente que, para Hilbert, una de las consecuencias de su nueva concepción formal del método axiomático es que la propiedad de *consistencia* se convierte en el requerimiento más importante que debe garantizarse de un sistema de axiomas. Más precisamente, el hecho de que los axiomas dejan de ser considerados como enunciados verdaderos autoevidentes, conlleva que la pregunta por la consistencia del sistema de axiomas se vuelva central. Para la concepción clásica del método axiomático, la consistencia era una consecuencia de la verdad de los axiomas, puesto que su carácter de proposiciones verdaderas aseguraba que eran compatibles entre sí.[5] En la concepción abstracta, en cambio, no es posible recurrir a la verdad de los axiomas para garantizar la consistencia del sistema axiomático. La consistencia de un sistema formal de axiomas debe ser *demostrada*, para clausurar la posibilidad de que se trate de un sistema trivial, desprovisto de todo interés. Es decir, una consecuencia de la inconsistencia, resaltada

[5] Esta idea es expresada explícitamente, por ejemplo, por Frege: "De la verdad de los axiomas se sigue que no se contradicen entre sí" (Frege a Hilbert, 27 de diciembre de 1899, en Frege 1976, p. 63).

a menudo por Hilbert, es que *en un sistema inconsistente toda proposición es deducible de, o está conectada con, cualquier otra*:

> Sea a una proposición cualquiera, por ejemplo, un teorema sumamente complejo y profundo de la matemática. Luego, si de algún modo emerge una contradicción, de modo que a es verdadera y falsa al mismo tiempo – i.e., ambos pueden ser demostrados lógicamente –, entonces podemos decir:
>
> $$\text{De } 2 = 2 \text{ se sigue } a$$
>
> $$\text{De } 2 = 2 \text{ se sigue No–}a$$
>
> Ahora bien, de acuerdo con una ley lógica conocida, de las dos proposiciones anteriores se sigue que la premisa $2 = 2$ es falsa; e incluso, de cualquier contradicción, sin importan cuán dentro [de la teoría] se encuentre, se puede probar rigurosamente la falsedad de toda proposición correcta. Podemos decir entonces que, en la totalidad de nuestro conocimiento, *una* contradicción actúa como una chispa en un barril de pólvora [*Pulverfass*] y destruye todo. Por lo tanto, todas las ciencias deben preocuparse por evitar una contradicción, incluso si ésta se halla muy dentro en la teoría. (Hilbert 1905b, p. 217)

La importancia fundamental de la consistencia fue reconocida y enfatizada públicamente por Hilbert, principalmente en relación al sistema de axiomas para la aritmética. En primer lugar, esta cuestión es aludida en su conferencia “Sobre el concepto de número” (Hilbert 1900c), en donde la consistencia es señalada como la primera propiedad que se debe exigir de un sistema axiomático. Sin embargo, poco después, en sus “Problemas matemáticos” de París (Hilbert 1900b) Hilbert hace de la *demostración* de la consistencia el problema central de su nueva concepción axiomática:

> Pero por sobre todo quisiera designar lo siguiente como lo más importante, entre las numerosas preguntas que pueden preguntarse en relación a los axiomas: *demostrar que ellos mismos no se contradicen entre sí, esto es, que un número finito de inferencias basadas en ellos no puede conducir a resultados contradictorios.* (Hilbert 1900b, p. 300)

La relevancia de la consistencia de los axiomas para la aritmética queda reflejada en el hecho de que Hilbert la propone como el segundo problema de su lista de problemas matemáticos: “Hallar una prueba directa de la consistencia de los axiomas para la aritmética" (Hilbert 1900b, pp. 299–301). Luego, esta importancia atribuida al problema de la consistencia de la aritmética, ha fomentado la imagen, usualmente repetida, de que el objetivo fundamental de Hilbert en *Fundamentos de la geometría* era probar la consistencia de la geometría euclídea, mostrando que su sistema de axiomas podía ser reducido a los axiomas para los números reales. Como veremos a continuación, esta interpretación no resulta del todo acertada. Sin embargo, es importante realizar previamente algunas observaciones respecto de la noción de consistencia que Hilbert maneja en este período inicial.

En mi opinión, en esta etapa temprana Hilbert se hallaba imposibilitado de ofrecer una caracterización rigurosa de nociones metalógicas como la consistencia, principalmente en función de dos limitaciones conceptuales fundamentales. En primer lugar, en esta período inicial no contaba con una noción suficientemente precisa de *deducción formal*; en parte, ello se explicaba debido a que la "lógica subyacente" de sus primeros sistemas de axiomas para la geometría y la aritmética consistía en una teoría informal de conjuntos y funciones, y no en un sistema deductivo formal explícitamente formulado. En segundo lugar, y más importante aún, Hilbert tampoco parecía disponer de una distinción conceptual clara entre sintaxis y semántica, a pesar de que esta distinción estaba implícitamente supuesta en sus demostraciones de la independencia de algunos axiomas geométricos, basadas en la construcción de modelos aritméticos o analíticos.[6]

En cuanto a la primera de estas limitaciones, Hilbert emprende la tarea de elaborar un sistema lógico, que pudiera servir como la lógica subyacente para sus sistemas axiomáticos, en 1904/1905. Como es bien sabido, la urgencia de esta empresa fue advertida por nuestro autor, principalmente a partir del reconocimiento de que las paradojas que afectaban a la teoría de conjuntos no eran de una naturaleza puramente matemática, pues extendían su alcance también a la lógica. Esta opinión es expresada, por ejemplo, en una carta a Frege fechada el 7 de noviembre de 1903. En esta carta Hilbert se refiere a la descripción de la paradoja de Russell, presentada por Frege en el epílogo del segundo volumen de *Grundgesetze der Arithmetik* (1903), y al consecuente reconocimiento de que el sistema lógico allí empleado para dar una fundamentación a la aritmética era inconsistente:

> Su ejemplo en el final del libro (p. 253) es conocido aquí por nosotros; yo mismo he encontrado, hace ya 4 o 5 años, otras contradicciones incluso más convincentes. Ellas me han llevado al convencimiento de que la lógica tradicional es inadecuada y que la teoría de la formación de conceptos debe ser

[6] Esta limitación ha sido advertida, entre otros, por Zach (1999), Awodey y Reck (2002) y Sieg (2009).

agudizada y refinada.[7] (Frege 1976, pp. 79–80)

Poco después, en la conferencia de Heidelberg de 1904 "Sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética" (Hilbert 1905a), Hilbert formuló la conocida exigencia de un "desarrollo parcialmente simultáneo de las leyes de la lógica y la aritmética" (Hilbert 1905a, p. 176). Hilbert presentó en este trabajo una descripción muy rudimentaria, y en diversos aspectos ciertamente incomprensible, de cómo debería proceder una prueba absoluta o sintáctica de la consistencia de los axiomas para la aritmética, como así también un esbozo muy general de un sistema lógico.[8] Sin embargo, este esbozo fue ampliado en la segunda sección de su curso de 1905, al que ya hemos aludido en capítulos anteriores. Hilbert presenta allí un cálculo para una lógica proposicional axiomatizada basada en la noción de identidad. Este cálculo proposicional fue elaborado por Hilbert de manera *algebraica*, y en este sentido era muy similar a un álgebra de Boole.[9] Ahora bien, aunque Hilbert sostuvo que este sistema para la lógica proposicional podía ser utilizado como

---

[7] La afirmación de Hilbert del descubrimiento, en 1898–1899, de otras paradojas incluso "más convincentes" que la de Russell, ha sido analizada por Peckhaus y Kahle (2002).

[8] Un análisis del intento de Hilbert en este artículo por describir como debería ser llevada a cabo una prueba puramente sintáctica de la consistencia de la aritmética, puede verse en (Sieg 2009).

[9] El sistema de axiomas para la lógica proposicional, elaborado por Hilbert en 1905, es el siguiente:

i. Si $X \equiv Y$ entonces es posible reemplazar X por Y e Y por X.

ii. De dos proposiciones X,Y resulta (por adición) una nueva proposición

$$Z \equiv X + Y$$

iii. De dos proposiciones X, Y resulta de un modo diferente (por multiplicación) otra proposición

$$Z \equiv X \cdot Y$$

iv–viii. Reglas de cálculo para estas operaciones

$$\begin{gathered} iv.\ X + Y \equiv Y + X \\ v.\ X + (Y + Z) \equiv (X + Y) + Z \\ vi.\ X \cdot Y \equiv Y \cdot X \\ vii.\ X \cdot (Y \cdot Z) \equiv (X \cdot Y) \cdot Z \\ viii.\ X \cdot (Y + Z) \equiv X \cdot Y + X \cdot Z \end{gathered}$$

ix–xii. Existen dos proposiciones distintas $0, 1$, y para cada proposición X, otra proposición $\overline{X}$ puede ser definida, tal que:

$$\begin{array}{ll} ix.\ X + \overline{X} \equiv 1 & x.\ X \cdot \overline{X} \equiv 0 \\ xi.\ 1 + 1 \equiv 1 & xii.\ 1 + X \equiv X. \end{array}$$

En una nota marginal, Hilbert aclara: "escribir más simplemente = 'igual" (Hilbert 1905b, pp. 224). Los símbolos X, Y, Z mentan proposiciones, + la conjunción, · la disyunción, 0 la verdad y 1 la falsedad (Cf. Hilbert 1905b, pp. 225–228). Un análisis detallado del sistema lógico elaborado por Hilbert en estas notas manuscritas se encuentra en Peckhaus (1990; 1994a; 1995) y Zach (1999).

la lógica subyacente de sus sistemas axiomáticos, sin dudas se trataba de un cálculo lógico construido sobre una base muy rudimentaria, lo que lo volvía claramente inadecuado para cumplir tal fin.[10] Es por ello que cuando más tarde, en un curso de 1917, Hilbert retomó esta misma tarea, lo hizo sobre una base sustancialmente diferente. En efecto, Hilbert recibió con gran entusiasmo a los *Principia Mathematica* (1910–1913) de Whitehead y Russell, y elaboró un nuevo cálculo proposicional basado en el sistema de los *Principia*, que constituye además el antecedente inmediato para el sistema lógico de (Hilbert y Ackermann 1928).[11]

En cuanto a la segunda de las limitaciones advertidas, un ejemplo de la ausencia de una clara distinción conceptual entre sintaxis y semántica, se observa en el hecho de que en este período inicial Hilbert parece confundir, e incluso identificar, lo que actualmente entendemos por las nociones de consecuencia sintáctica o *deducibilidad* y *consecuencia lógica* o semántica.

La presencia de una suerte de noción de consecuencia lógica en los trabajos de Hilbert, correspondientes al período que estamos analizando, ha sido sugerida por algunos autores.[12] Más precisamente, la idea de consecuencia lógica es utilizada implícitamente en las pruebas de independencia de diversos axiomas de la geometría. Ello se observa en el procedimiento empleado por Hilbert para demostrar la independencia de un axioma A cualquiera, que consiste precisamente en mostrar que *hay una interpretación que hace a todos los axiomas verdaderos, y a A falso*. Por otro lado, es posible también indicar una serie de referencias textuales en donde esta noción "informal" de consecuencia lógica estaría presente. En primer lugar, y tan tempranamente como en 1894, Hilbert parece aludir a ella en sus notas de clases para el curso "Fundamentos de la geometría" (Hilbert 1894). Se trata de un pasaje que ya hemos citado en un capítulo anterior:

> Nuestra teoría proporciona sólo un esquema [*Schema*] de conceptos, conectados entre sí por las invariables leyes de la lógica. Se deja al entendimiento humano [*menschlicher Verstand*] cómo aplicar este esquema a los fenómenos, cómo llenarlo de material [*Stoff*]. Ello puede ocurrir de diversas maneras: *pero siempre que los axiomas sean satisfechos, entonces los teoremas son válidos.* (Hilbert 1894, p. 104. El énfasis es mío)

[10] Por ejemplo, Hilbert no logra extender en 1905 este sistema de axiomas para la lógica proposicional, de manera que incluya cuantificadores.

[11] El sistema lógico elaborado por Hilbert en su curso de 1917, "Principios de la matemática" (Hilbert 1917), ha sido examinado por Moore (1997), Sieg (1999) y Zach (1999). Sobre la recepción de *Principia Mathematica* por parte de Hilbert – y su escuela –, puede verse Mancosu (2003).

[12] En especial, véase (Hallett 1995a, p. 149) y (Shapiro 1997, p. 164).

La noción informal de consecuencia lógica, en apariencia aludida por Hilbert en el pasaje anterior, afirma lo siguiente: una proposición es una "consecuencia lógica" del sistema de axiomas, en el caso de que sea una proposición válida bajo cualquier interpretación que haga a los axiomas verdaderos. Luego, Hilbert menciona nuevamente esta noción en la primera de sus respuestas a Frege, en el contexto de la conocida controversia epistolar:

> Si cuando me refiero a mis 'puntos' pienso en un sistema de objetos cualesquiera, por ejemplo, el sistema: amor, ley, deshollinador (...), y luego aceptamos a todos mis axiomas como [estableciendo] las relaciones entre estos objetos, entonces mis teoremas, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, también son válidos para estos objetos.[13]

Por último, Hallett (1995, p. 137) ha advertido que esta misma noción está operando en una descripción del abordaje axiomático a la geometría de Hilbert, realizada por Bernays en uno de sus importantes artículos. Con el objetivo de distinguir la concepción clásica del método axiomático de la nueva concepción abstracta de Hilbert, Bernays señala:

> De acuerdo con esta concepción, los axiomas no son en general proposiciones de las cuales pueda decirse que son verdaderas o falsas; sólo en conexión con todo el sistema axiomático tienen ellas algún sentido. Y tampoco el sistema axiomático constituye la expresión de una verdad, sino que la estructura lógica de la geometría axiomática, en el sentido de Hilbert, es puramente hipotética – al igual que, por ejemplo, la teoría abstracta de grupos. *Si en cualquier lugar en la realidad existen tres sistemas de objetos y ciertas relaciones determinadas entre estos objetos, de manera tal que para éstos los axiomas se cumplen (esto es, que a partir de una correspondencia apropiada entre nombres y objetos y relaciones, los axiomas se convierten en proposiciones verdaderas), entonces todos los teoremas de la geometría son válidos también para estos objetos y relaciones.* (Bernays 1922a, pp. 95–96. El énfasis es mío)

Ahora bien, en otros lugares y sin mayores aclaraciones, Hilbert parece estar pensando al mismo tiempo en una noción de consecuencia en un sentido diferente al recién mencionado, o sea, en un sentido sintáctico:

[13] Hilbert a Frege, 19 de diciembre de 1899; en (Frege 1976, p. 67).

> (...) Luego, en mi opinión, es posible mostrar que una respuesta [a un problema] es correcta a través de un número finito de inferencias lógicas [*endliche Anzahl von Schlüssen*] basada a su vez en un número finito de premisas (...). Este requerimiento de la deducción lógica por medio de un número finito de inferencias no es otro sino el requerimiento del rigor en las demostraciones. (Hilbert 1900b, p. 293)

Vemos aquí que Hilbert parece pensar también en la noción de consecuencia en un sentido sintáctico como *deducibilidad*, o en palabras del propio autor, como "ser deducible a través de una derivación finita". Más aún, esta idea aparece más visiblemente en (Hilbert 1905b;c). Hilbert habla allí de la consistencia como la incapacidad de deducir al mismo tiempo a partir de los axiomas las fórmulas ϕ y $\neg\phi$ por medio de "operaciones lógicas", y señala también que una deducción lógica es efectuada por medio de "combinaciones lógicas de proposiciones". Luego, ello revela que en 1905 Hilbert entendía también la consistencia de manera sintáctica, en el sentido de *deducibilidad*. Es decir, un sistema es consistente si es imposible deducir a partir de los axiomas una contradicción, por medio de un número finito de inferencias:

> Sin embargo, lo más importante aquí es la prueba de que los 12 axiomas no se contradicen entre sí, i.e., utilizando los métodos arriba descriptos no es posible obtener una proposición que contradice a los axiomas, por ejemplo, $X + \overline{X} = 0$. (Hilbert 1905b, p. 230)

Sieg (2009, p. 333) llama consistencia "quasi–sintática" a esta definición, dado que Hilbert no especifica un conjunto de principios deductivos o reglas de inferencias. Luego, es claro que la noción de consistencia de un sistema de axiomas que surge de entender la idea de consecuencia como deducibilidad, es sin dudas una noción *sintáctica*. Sin embargo, en la medida en que todas las pruebas de consistencia de *Fundamentos de la geometría* son pruebas relativas o indirectas, o sea, pruebas en las que la consistencia es demostrada por medio de la construcción de un "modelo", Hilbert parece estar pensando también en la consistencia en el sentido de *satisfacibilidad*, esto es, en un sentido semántico que equipara la consistencia a la existencia de un modelo.

En suma, aunque en la práctica Hilbert distinguía entre los axiomas formales de su sistema y sus posibles interpretaciones, no disponía en cambio en este período inicial de una clara *distinción conceptual* entre sintaxis y semántica. Como lo advierte Hallett, "[En esta etapa inicial], Hilbert pasaba rápidamente de la noción sintáctica de deducción lógica a la noción semántica de consecuencia lógica, pensando presumiblimente que eran lo mismo" (Hallett 1995a, p. 150).[14] Y ello tiene como resultado que Hilbert se refiera en estos trabajos iniciales, sin mayores distinciones y aclaraciones, a la noción metalógica de *consistencia tanto en un sentido sintáctico como en un sentido semántico*, o sea, como satisfacibilidad.

Por otra parte, y en relación al papel que desempeñó efectivamente la exigencia de la consistencia del sistema de axiomas en las investigaciones geométricas de Hilbert, la siguiente observación resulta oportuna. Según hemos visto recién, la importancia de la consistencia como el requerimiento más fundamental que deben satisfacer los sistemas axiomáticos es algo que Hilbert enfatiza continuamente. Más precisamente, en relación al sistema de axiomas para la aritmética de los reales, Hilbert admite que la búsqueda de una prueba de consistencia es una tarea absolutamente central. Ello se explica en virtud de diversos factores. En primer lugar, en el caso de la aritmética, la prueba de consistencia sólo puede ser *absoluta o directa*; es decir, la consistencia de la aritmética no puede ser demostrada por medio de la construcción de modelos, tal como ocurre en geometría.[15] La importancia de llevar a cabo efectivamente una demostración de la consistencia de la aritmética se debía entonces a que requería de la elaboración de nuevas herramientas conceptuales, o como lo señala Hilbert, suponía "la modificación apropiada de los métodos de deducción usuales" (Hilbert 1900c, p. 184). Poco después, en su conferencia de Heidelberg "Sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética" de 1904, Hilbert presentará un esbozo muy rudimentario de cómo esta prueba directa de la consistencia de la aritmética puede ser llevada a cabo. Sin embargo, éste será posteriormente el problema central del llamado "programa de Hilbert".

En segundo lugar, la relevancia crucial de esta tarea residía también en que, a través de la demostración de la consistencia de su sistema de axiomas para la aritmética, según Hilbert era posible despejar todas las dudas que rodeaban a las distintas teorías de los números reales, sobre todo aquellas que se basaban en nociones y construcciones conjuntistas:

> Todas las dudas y objeciones que se han planteado en relación a la existencia del conjunto de los números reales y, en general, en relación a la existencia de conjuntos infinitos aparecen como algo injustificado una vez que hemos

[14] Zach (1999) ha mostrado que una distinción rigurosa entre sintaxis y semántica se encuentra, por primera vez, en el curso de Hilbert de 1917 "Principios de la matemática" (Hilbert 1917). Entre otros resultados, en este curso Hilbert presenta: *a)* una semántica explícitamente definida para el cálculo proposicional usando valores de verdad; *b)* la noción de decidibilidad de un conjunto de fórmulas proposicionales válidas; *c)* la completitud de un sistema de axiomas en relación a una semántica dada y la noción de completitud sintáctica o de Post.

[15] Cf. (Hilbert 1900b, p. 300).

> adoptado el enfoque que acabo de describir. De acuerdo con lo dicho, por conjunto de los números reales no tenemos que entender la totalidad de las leyes posibles según las cuales pueden avanzar los elementos de una sucesión fundamental[16], sino más bien, como acabamos de decir, un sistema de objetos cuyas relaciones se encuentran determinadas por el sistema finito y cerrado de los axiomas I–IV, y en relación al cual ninguna afirmación será válida si no puede deducirse a partir de estos axiomas por medio de un número finito de inferencia lógicas. (Hilbert 1900c, p. 184)[17]

Ahora bien, aunque la importancia que Hilbert le confirió en 1900 a la demostración de la consistencia del sistema axiomático para la aritmética es bien conocida y a menudo resaltada, es importante advertir que en el caso de la geometría no resultaba, en la práctica, inmediatamente equiparable. Más precisamente, si se observa el tratamiento que recibe este problema en *Fundamentos de la geometría*, es claro que para Hilbert la consistencia de la geometría no era algo que resultaba problemático, en el sentido de que debía ofrecerse con urgencia una prueba de la consistencia de su sistema de axiomas para la geometría. En efecto, Hilbert no ofrece allí *una demostración sistemática y exhaustiva de la consistencia de su sistema axiomático para la geometría*, sino que se limita tratar la cuestión muy brevemente a lo largo de dos páginas, señalando meramente que la geometría analítica construida sobre los números reales podía ser utilizada para demostrar la consistencia de sus axiomas para la geometría sintética. En otras palabras, una rápida mirada sobre su libro muestra que el problema de la consistencia de la geometría euclídea, o más precisamente, la cuestión de probar la consistencia de la geometría mostrando que su sistema de axiomas podía ser reducido a los axiomas de los

[16] Se dice que a_n es una *sucesión fundamental o de Cauchy* si para cualquier $\epsilon > 0$, es posible hallar $k(\epsilon)$ para el que se cumple

$$|a_n - a_m| \leq \epsilon \ \forall n \wedge m \geq k(\epsilon)$$

Hilbert se refiere aquí a la construcción de Cantor (1872) de los números reales como límites de sucesiones fundamentales de números racionales.

[17] La misma opinión es expresada en "Problemas matemáticos":

> En el caso presente, en donde nos ocupamos de los axiomas de los números reales en la aritmética, la prueba de consistencia de los axiomas es al mismo tiempo la demostración de la existencia matemática del sistema completo de los números reales o del *continuum*. En efecto, cuando la prueba de la consistencia de los axiomas sea lograda completamente, las dudas que han sido expresadas ocasionalmente respecto de la existencia del sistema completo de los números reales, se volverán totalmente infundadas. (Hilbert 1900b, p. 301)

números reales, no era en este momento de ningún modo una preocupación central.[18] Antes bien, y como veremos a continuación, otras nociones metalógicas jugaron *en la práctica* un papel más relevante en los estudios geométricos de Hilbert.

6.3. Independencia

Las limitaciones de Hilbert al momento de distinguir con claridad entre sintaxis y semántica, o mejor, entre deducibilidad y consecuencia lógica, impiden de la misma manera que podamos encontrar, en las fuentes que venimos analizando, una noción rigurosa de *independencia*. Es decir, en la medida en que la noción de *deducibilidad* o *derivabilidad* es fundamental para caracterizar la noción de independencia de un axioma respecto de un conjunto de axiomas dados, es evidente que las confusiones recién aludidas no le permitieron proporcionar una definición rigurosa de la mentada propiedad metalógica. En mi opinión, ello es evidente en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899). Allí Hilbert parece utilizar en muchas ocasiones su noción informal de 'consecuencia lógica o semántica', para referirse a la independencia de varios axiomas de la geometría, i.e., al afirmar que un axioma o un teorema en particular no es *deducible o derivable* de un grupo de axiomas dados. Sin embargo, la definición de independencia presentada, sugiere más bien que se trata de una relación puramente "sintáctica" entre fórmulas:

> Tras haber reconocido la consistencia de los axiomas, resulta de interés ahora investigar si son en su conjunto independientes entre sí. En efecto, es posible mostrar que ninguno de estos axiomas puede ser deducido de los restantes a través de inferencias lógicas [*logische Schlüsse*]. (Hilbert 1899, p. 21)

Una descripción similar encontramos también en relación a los axiomas de congruencia:

> Vamos a reconocer ahora la independencia de los axiomas de congruencia, por medio de la demostración de que el axioma IV 6, o la proposición que de él se sigue, el primer teorema de congruencia de los triángulos – i.e, el teorema 10 – no puede ser deducido a través de inferencias lógicas de los axiomas restantes I, II, IV 1-5, V. (Hilbert 1899, p. 23)

En suma, al igual que en el caso de la consistencia, la ausencia de una clara distinción conceptual entre sintaxis y semántica, entre deducibilidad y consecuencia lógica, impiden

[18] Este hecho, a menudo pasado por alto, ha sido advertido por (Rowe 2000, p. 69) y (Corry 2006, pp. 142–143).

encontrar una definición rigurosa o precisa de la noción de independencia, en los trabajos de Hilbert correspondientes a este período temprano. Sin embargo, resultará relevante para lo que sigue realizar un par de observaciones y aclaraciones respecto del papel que esta propiedad desempeñó en sus investigaciones geométricas.

Es preciso reconocer que, a diferencia de la consistencia, la independencia desempeñó *en la práctica* un papel central en las investigaciones axiomáticas de Hilbert. Un claro indicio de esta afirmación es que, a lo largo de *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se concentra mucho más en los problemas de la *imposibilidad* de demostrar tal o cual teorema – o un axioma – a partir de un conjunto particular de axiomas, que en las cuestiones de la demostrabilidad. Dicho de otro modo, los resultados más novedosos y significativos alcanzados por Hilbert en su monografía consistieron mayormente en mostrar la independencia de diversos teoremas importantes de la geometría elemental respecto de ciertos axiomas o grupos de axiomas, o más precisamente, en las pruebas de la imposibilidad de demostrar algunos teoremas de la geometría elemental, sin asumir la validez de ciertos axiomas. Empero la importancia y la novedad de estos resultados no descansaba solamente en la exhibición de la independencia de diversos teoremas respecto de ciertos axiomas de la geometría, sino sobre todo en el hecho de que para probar la independencia de diversas proposiciones, Hilbert construyó modelos para nuevos tipos de geometrías – no–arquimedianas, no–desarguesianas, no–pitagorianas –, en muchos casos completamente originales e interesantes por sí mismos. Podemos ilustrar esta afirmación tomando como ejemplo sus investigaciones en torno al teorema de Desargues.

En el capítulo anterior he mencionado al teorema de Desargues, que desempeña un papel central en la construcción del cuadrilátero completo de von Staudt, y por lo tanto, en su procedimiento para definir coordenadas en la geometría proyectiva sin apelar a consideraciones métricas. Ahora bien, la formulación allí presentada se corresponde con una versión *restringida* del teorema, en la medida en que exige que los triángulos homólogos se encuentren en un mismo plano[19]; es por ello que se la conoce también como "teorema de Desargues en el plano". Por otra parte, si en la formulación del teorema se admite la posibilidad de que los triángulos estén en planos diferentes, entonces se obtiene una versión *más general*, referida usualmente como "teorema de Desargues en el espacio". Esta aclaración es pertinente en función de lo siguiente: si partimos del sistemas de axiomas de Hilbert (1899) para la geometría elemental, la versión general o espacial del teorema de Desargues puede ser demostrada *muy fácilmente* si se utilizan *todos* los axiomas de incidencia (grupo I 1-7) y los axiomas de orden (grupo II 1–5), esto

[19] Cf. sección 5.3.

es, si se usan los axiomas de incidencia tanto en el plano y como en el espacio.[20] Por el contrario, la prueba de la versión restringida es mucho más trabajosa, y ofrece una dificultad particular: para demostrar la versión del teorema de Desargues en el plano es necesario recurrir a la versión general en el espacio; más precisamente, la estrategia básica de la prueba consiste en tomar un punto exterior al plano en el que se encuentran los triángulos homólogos, para reconstruir la configuración tridimencional de Desargues y aplicar entonces la versión espacial del teorema. El siguiente diagrama ilustra cómo procede la prueba[21]:

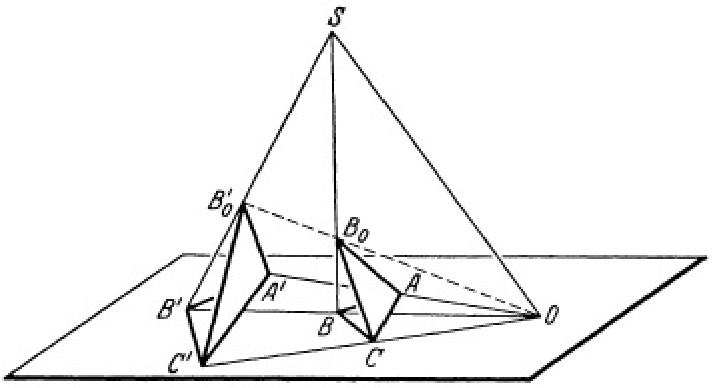


Figura 6.1.: Diagrama de la prueba estándar del teorema de Desargues en el plano; (Hilbert y Cohn-Vossen 1996, p. 108)

Dicho brevemente, aunque en su versión restringida el teorema de Desargues se refiere a primera vista únicamente a conceptos planos, i.e., conceptos que sólo hablan de la intersección de líneas *en un mismo plano*, para su demostración es necesario situarse en el espacio y utilizar todos axiomas de incidencia y los axiomas orden. Luego, Hilbert se pregunta si es posible llevar a cabo una prueba del teorema de Desargues en el plano, *en la que no se utilicen construcciones en el espacio.* En sus notas de clases, plantea la cuestión de la siguiente manera:

> He afirmado que el *contenido* del teorema de Desargues es importante. Pero

[20] En la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), el grupo de axiomas de incidencia estaba conformado por siete axiomas; los I 1–2 eran planos, mientras que los restantes I 3–7 eran espaciales. A partir de la segunda edición (Hilbert 1903), el grupo de incidencia pasa a estar conformado por 8 axiomas, mientras que el axioma de orden II 4, es presentado como un teorema. Esta diferencia no afecta sin embargo a la cuestión que estamos discutiendo aquí.

[21] Cf. (Hilbert y Cohn-Vossen 1996, pp. 106–108). Una demostración completamente elaborada puede encontrarse, por ejemplo, en (Efímov 1984, p. 213–215).

> por ahora lo más importante será su *prueba*, puesto que queremos vincularla a una *consideración* muy importante, o más bien, a *una línea de investigación*. El teorema corresponde a la geometría plana; la prueba sin embargo hace uso del espacio. Se plantea entonces la pregunta en cuanto a si *existe una prueba que sólo utilice los axiomas lineales y planos I 1-2, II 1-5*. Luego, por primera vez sometemos aquí a un análisis crítico a los medios para llevar a cabo una demostración.[22] (Hilbert 1898b, p. 236)

Hilbert se plantea entonces una pregunta de *independencia*, y emprende de ese modo la tarea de mostrar que es *imposible* demostrar el teorema de Desargues en el plano sin recurrir a los axiomas espaciales de incidencia:

> Vamos a mostrar más bien que el teorema de Desargues en el plano no puede ser *demostrado* por medio de los axiomas I 1–2 y II 1–5. De este manera nos *ahorraremos el problema* de buscar una prueba en el plano. Para nosotros, éste es el primer y simple ejemplo de una prueba de *indemostrabilidad*. Para safisfacernos, es necesario o *encontrar* una prueba que sólo opera en el plano, o *mostrar que no existe tal demostración*. Probar entonces que [es posible] especificar un sistemas de cosas = puntos y cosas = planos para el que los axiomas I 1–2 y II 1–5 se cumplen, pero el teorema de Desargues no, i.e., que una geometría plana con los axiomas I, II es posible sin el teorema de Desargues. (Hilbert 1898b, pp. 236–237)

En la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, Hilbert logra proporcionar una respuesta definitiva a este problema de la *independencia* del teorema de Desargues en el plano respecto de los axiomas de incidencia (I 3–7) en el espacio y de orden. Más precisamente, Hilbert consiguió mostrar que esta versión del teorema de Desargues sólo podía ser demostrada en su sistema *usando los axiomas espaciales de incidencia y orden, o alternativamente recurriendo a los teoremas de congruencia*. Ahora bien, como se observa en la cita anterior, para probar que este teorema no podía ser demostrado en la geometría plana (i.e., sobre la base de los axiomas I 1-2, II, III, IV 1-5, y V), Hilbert construyó un modelo en el que todos estos axiomas se cumplían pero el teo-

[22] Hilbert se está refiriendo aquí a la cuestión de la "pureza de los métodos de demostración", a la que se alude muy superficialmente en los párrafos finales de *Fundamentos de la geometría* (Cf. Hilbert 1999, pp. 195–196). Esta cuestión ha sido recientemente discutida por Hallett (2008) y Arana y Mancosu (2012).

rema de Desargues no.[23] Luego, este modelo constituyó el primer ejemplo explícito[24] de una geometría no–desarguiana y, además de ser un resultado original, motivó nuevas y prolíferas investigaciones.[25] En consecuencia, las investigaciones de independencia no sólo permitían esclarecer las relaciones lógicas entre teoremas particulares y algunos axioma del sistema, sino que además el método utilizado para probar la independencia – la construcción de modelos – arrojaba resultados originales y conducía a nuevos descubrimientos matemáticos. Este último aspecto "creativo", es reconocido por el propio Hilbert hacia el final de su libro:

> En efecto, cuando en nuestras investigaciones matemáticas nos enfrentamos a un problema o sospechamos un teorema, nuestro anhelo de conocimiento es recién satisfecho, o cuando alcanzamos una completa solución de aquel problema y una demostración rigurosa de este teorema, o cuando hemos reconocido con claridad la razón de la imposibilidad de lo buscado, y con ello al mismo tiempo la necesidad del fracaso.
>
> De este modo, en la matemática moderna la cuestión de la imposibilidad de ciertas soluciones o problemas juegan pues un papel preponderante, y el esfuerzo por responder preguntas de este tipo, a menudo ha motivado nuevos descubrimientos y fructíferos campos de investigación. (Hilbert 1899, p. 89)

Para resumir, la notable importancia que tuvo para Hilbert la cuestión de la independencia puede ser reconocida en virtud de lo siguiente. En primer lugar, es claro que las investigaciones de independencia constituyen el ámbito en donde se manifiesta más radicalmente las virtudes, desde un punto de vista matemático, que Hilbert veía en su nueva concepción formal de método axiomático. En efecto, como señala el matemático alemán en diversos lugares, la independencia de un axioma o un teorema – i.e, la imposibilidad de obtener una proposición a partir de ciertos principios dados – podía ser *demostrada por primera vez de un modo sistemático y matemáticamente preciso*, gracias a las herramientas conceptuales que aportaba el método axiomático formal.[26] En segun-

[23] El modelo utilizado por Hilbert para probar este resultado es un plano analítico de números reales, en el que el intervalo cerrado $[0, +\infty]$ es removido. Una descripción y un estudio técnico de este modelo de geometría no–desarguiana se encuentra en Stroppel (1998; 2011).

[24] Se trata del "ejemplo explícito" ya que, aunque en 1894 Peano había presentado un modelo de un plano en el que el teorema de Desargues no se cumplía, la descripción de Hilbert constituye la primera exposición sistemática de tal construcción. Sobre este tema puede verse (Arana y Mancosu 2012, pp. 317–321).

[25] Sobre los investigaciones posteriores, motivadas por los nuevos tipos de geometrías presentados por Hilbert en *Fundamentos*, véase Cerroni (2004; 2007; 2010).

[26] Por ejemplo, Hilbert reconoce esta virtud del método axiomático en (Hilbert 1905b, pp. 86–87).

do lugar, las investigaciones en torno a la independencia ponen además de manifiesto un rasgo central que Hilbert asocia al método axiomático, a saber: este método no sólo debe ser entendido como una instrumento eficaz para presentar una teoría matemática de un modo más perspicuo y lógicamente preciso, sino además – y no menos importante – como una herramienta sumamente fecunda para el descubrimiento de nuevos resultados matemáticos. Esta última afirmación se volverá incluso más evidente a continuación, cuando analicemos el tratamiento particular que reciben los postulados de continuidad en el abordaje axiomático a la geometría de Hilbert.

6.4. Completitud

6.4.1. Una noción 'pre–formal' de completitud

Las limitaciones conceptuales de Hilbert, señaladas en la sección anterior, para definir la noción de consistencia – i.e. la ausencia de un aparato deductivo formal y las "confusiones" entre sintaxis y semántica – desde luego afectan a la noción de completitud. En otras palabras, tal como ocurre con la consistencia y la independencia, la caracterización de esta propiedad de los sistemas axiomáticos, presentada por Hilbert en este período inicial, sólo puede tener un carácter informal o, si se quiere, pre–formal.

Una primera alusión a esta noción informal de completitud se encuentra en la introducción de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), en donde Hilbert describe sus objetivos como sigue:

> La presente investigación es un nuevo intento de establecer para la geometría un *conjunto de axiomas completo*, y lo más simple posible, y de deducir de allí los teoremas más importantes de la geometría. (Hilbert 1899, p. 3. El énfasis es mío.)

Asimismo, unas páginas más tarde y al introducir los elementos y las relaciones primitivas de su sistema, Hilbert afirma que "la descripción precisa y matemáticamente completa de estas relaciones se sigue de los axiomas de la geometría" (Hilbert 1898a, p. 4). Y de un modo similar, señala lo siguiente respecto del criterio de completitud, en relación al sistema de axiomas para la aritmética de los reales:

> En la construcción de la geometría se comienza suponiendo la existencia de una totalidad de elementos (. . .) y luego (. . .) se los relaciona unos con otros por medio de ciertos axiomas (. . .). Así surge necesariamente la tarea de

> mostrar la consistencia y la *completitud* de estos axiomas, i.e., debe probarse que la aplicación de los axiomas dados nunca puede conducir a contradicciones, y que *el sistema de axiomas es adecuado para probar todos los teoremas de la geometría.* (Hilbert 1900a, p. 181. El énfasis es mío.)

Éstas son prácticamente todas las referencias explícitas acerca de la completitud de un sistema axiomático, que pueden encontrarse en los trabajos *publicados* de Hilbert correspondientes a este período. El carácter informal de la noción de completitud se observa, por ejemplo, en el hecho de que Hilbert habla indistintamente de la capacidad de su sistema axiomático para probar "todos los teoremas de la geometría" o de sólo "los más importantes". Por otro lado, en sus notas de clases encontramos más referencias en este respecto. En primer lugar, como hemos analizado en el capítulo 3, en sus manuscritos Hilbert señala en numerosas oportunidades que su objetivo es presentar una "imagen completa de la realidad geométrica", en el sentido de que la construcción del sistema axiomático debe proceder de tal manera que todos los hechos (conocidos) o teoremas de la geometría deben poder ser representados en la teoría, ya sea como axiomas o como consecuencias "deductivas" de los axiomas.[27] Del mismo modo, Hilbert repite esta idea en su curso de 1905, aunque sin referirse esta vez a Hertz:

> Asimismo nos interesa la completitud del sistema axiomático. Exigiremos que todos los hechos restantes del domino de conocimiento [*Wissensbereich*] examinado sean consecuencias de los axiomas.

En suma, la noción pre–formal de completitud de un sistema axiomático que propone Hilbert en esta etapa inicial, podría expresarse de la siguiente manera: un sistema axiomático Ω es *completo*, si todos de los teoremas o "hechos" [*Tatsachen*] que componen a la teoría que es objeto de la axiomatización, pueden ser deducidos lógicamente a partir de los axiomas.

Ahora bien, es oportuno realizar todavía un par de observaciones respecto de esta noción pre–formal de completitud. En primer lugar, como lo han señalado Awodey y Reck (2002), se trata de una noción (informal) de completitud *relativa*. Es decir, como se observa fácilmente en la definición recién dada, la completitud de un sistema de axiomas se establece *en relación o respecto* de la teoría que se pretende axiomatizar.[28]

[27] Cf. Sección 3.4.

[28] Awodey y Reck (2002) han resaltado la importancia histórica de esta noción informal de completitud relativa, en las primeras axiomatizaciones formales de teorías matemática, hacia fines del siglo XIX y principio del siglo XX.

Este carácter relativo es, a su vez, una consecuencia de la manera en que Hilbert concibe al método axiomático. Es decir, Hilbert reconoce usualmente que el método axiomático no está primordialmente pensado como una herramienta para crear o inventar *ex nihilo* nuevas teorías matemáticas. Más bien, Hilbert establece como una condición previa, que el método axiomático debe aplicarse a teorías matemáticas *pre–existentes y en un avanzado estado de desarrollo*. Según lo advierte en un trabajo correspondiente a un período posterior:

> Si consideramos el conjunto de los hechos que conforman una cierta esfera del conocimiento más o menos comprensiva, nos percatamos de inmediato de que la totalidad de los mismos es susceptible de un orden. La ordenación se lleva a cabo recurriendo a una cierta trama de conceptos relacionados entre sí, de tal manera que a cada objeto y a cada hecho del campo de conocimiento del que se trate le corresponda, respectivamente, un concepto de esa trama y una relación lógica entre conceptos del mismo. La trama de conceptos no es otra cosa que la *teoría* de esa esfera del saber.
>
> Ésta es precisamente la manera en la que se ordenan en la geometría los hechos geométricos (. . .)
>
> Si observamos de cerca una teoría determinada, reconoceremos en ella un reducido número de proposiciones del entramado de conceptos que hemos mencionado. A partir de esas proposiciones y sobre la base de principios lógicos, podemos obtener en su totalidad el edificio conceptual que subyace a la disciplina en cuestión. (Hilbert 1918, 405–406)

El método axiomático es entendido así por Hilbert como un modo de ofrecer una nueva presentación, o más precisamente, una reconstrucción, de una teoría matemática ya existente, en la que los conceptos básicos, su ordenación y sus relaciones lógicas aparecen caracterizados con completa rigurosidad y exactitud, y son estudiados de un modo sistemático. En consecuencia, un objetivo central de la presentación axiomática es que el sistema de axiomas consiga captar y abarcar completa o íntegramente el dominio de la teoría que se pretende axiomatizar, i.e., que la totalidad de los teoremas que componen a la teoría puedan ser obtenidos, por medio puramente deductivos, a partir de los axiomas.

En segundo lugar, y en relación al punto anterior, otra aclaración resulta pertinente. Es preciso reconocer que aquello que Hilbert llama "un dominio o campo de conocimiento [*Wissensbereich*], también posee un carácter impreciso, en tanto que en este contexto no es delimitado ni clara ni mucho menos formalmente. Es decir, tomemos como ejemplo la geometría euclídea elemental. Uno podría proponer que aquello que debe entenderse por el dominio o el corpus de esta disciplina esté determinado estrictamente por el conjunto de teoremas que son demostrados en los *Elementos* de Euclides, con lo cual este dominio estaría caracterizado con total precisión, aunque arbitrariamente. Sin embargo, ello no parece ser lo que Hilbert entiende aquí por esta expresión. Por el contrario, nuestro autor sugiere más bien que la "totalidad de hechos o teoremas que constituyen el dominio de la geometría elemental" está formada por *todos aquellos teoremas que esperaríamos encontrar entre los teoremas de la geometría elemental* (Hilbert 1899, p. 3). Luego, esta imprecisión ha provocado que Corry (2006) y Sieg (2009) sostengan que Hilbert opera en este período temprano con una noción "pragmática" y "quasi–empírica" de completitud de un sistema axiomático, respectivamente.[29]

Hasta aquí esta la noción pre–formal de completitud de un sistema axiomático. En lo que sigue me ocuparé de analizar la incorporación de Hilbert de su axioma de completitud en el sistema axiomático para la geometría euclídea elemental.

6.4.2. Completitud y continuidad

Como hemos señalado anteriormente, en su clásica conferencia "Über den Zahlbegriff" (Hilbert 1900c), pronunciada el 19 de septiembre de 1899 en Múnich ante la *Deutsche Mathematiker Vereinigung* (DMV), Hilbert presentó la primera caracterización axiomática del sistema de los números reales como un cuerpo ordenado arquimediano completo o maximal – según se lo designa actualmente. Tal caracterización axiomática de los números reales estaba basaba en los axiomas para un "conjunto de números complejos", presentado por Hilbert pocos meses antes, en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*.[30] En efecto, la única diferencia entre ambos sistemas de axiomas residía en que, en su conferencia de Múnich, Hilbert propone por primera vez su original axioma de completitud [*Vollständigkeitsaxiom*]. Como es bien sabido, la función de este axioma era asegurar la propiedad de completitud de los números reales de un modo "indirecto", a saber: estableciendo una condición de maximalidad sobre el conjunto de elementos del sistema, cuya consecuencia inmediata era que el cuerpo ordenado completo de los números reales se convertía en la única realización o 'modelo' capaz de satisfacer la totalidad de los axiomas.

Poco tiempo después, Hilbert emuló la estrategia adoptada para la aritmética de los

[29] Cf. (Corry 2006, p. 142) y (Sieg 2009, 339).
[30] (Cf. Hilbert 1899, §13).

reales, incorporando su novedoso axioma de completitud al sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental, que en la versión original contaba con el axioma de Arquímedes como único axioma de continuidad. En su versión geométrica, el axioma de completitud apareció por primera vez en la traducción al francés del *Festschrift* (Hilbert 1900a), publicada en abril de 1900; más tarde en la edición inglesa de E. J. Townsend (Hilbert 1902b), y posteriormente a partir de la segunda edición alemana (Hilbert 1903).

En cuanto a sus consecuencias, la incorporación del axioma de completitud tiene como resultado que la geometría analítica construida sobre los reales – *i.e.*, la geometría 'cartesiana' – se convierte en el único 'modelo' numérico (salvo isomorfismo) de sus axiomas para la geometría elemental. En este sentido, los efectos de la inclusión del axioma de completitud son notablemente importantes, y quizás sea por ello que, la circunstancia de que este axioma no figura en la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, y es en cambio una modificación introducida en ediciones posteriores, ha sido constantemente mencionada en la literatura. Como ejemplo pueden consultarse los trabajos de Rowe (2000) y Corry (2004a), quienes han ofrecido la reconstrucción quizás más influyente y difundida al respecto.

La explicación que ofrecen estos autores advierte lo siguiente. Es necesario reconocer que, para presentar una caracterización de la geometría analítica "cartesiana" como la realización de sus axiomas para la geometría sintética, Hilbert debía ofrecer una descripción en detalle de la estructura del sistema de los números reales. Sin embargo, esta tarea suponía un esfuerzo considerable, puesto que al momento de la publicación del *Festschrift*, Hilbert no disponía todavía de una caracterización axiomática de los números reales. En este sentido, el célebre matemático alemán percibió con inteligencia que, si su sistema axiomático incluía al axioma de Arquímedes como el único axioma de continuidad, entonces esta dificultad podía ser evitada. Es decir, si el axioma de Arquímedes figuraba como único axioma de continuidad, era posible construir una realización aritmética para el sistema axiomático a partir de un cuerpo numérico más pequeño, como por ejemplo, un cuerpo *numerable* formado por números algebraicos. Luego, de acuerdo con esta interpretación, la negativa de Hilbert de trabajar en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* con la geometría analítica cartesiana como 'modelo' único de sus axiomas, se explica en virtud de las dificultades que conllevaba tener que dar cuenta de las propiedades del sistema de los números reales.

Por otra parte, señalan estos autores, esta estrategia era a su vez totalmente coherente con los intereses que se dejan traslucir en las investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría. Es decir, según hemos indicado en una sección anterior, el problema de la consistencia de la geometría euclídea, o más precisamente, la cuestión de probar la consistencia de la geometría mostrando que su sistema de axiomas podía ser reducido a los axiomas de los números reales, no era en este momento de ningún modo una preocupación central. Luego, la caracterización axiomática de los reales presentada en (Hilbert 1900c), donde el axioma de completitud era el encargado de asegurar la propiedad de completitud del conjunto de los números reales, fue el factor detonante para que Hilbert decidiera casi inmediatamente trabajar con el continuo de los números reales como única realización aritmética de sus axiomas para la geometría.

Ahora bien, aunque en mi opinión esta explicación es en gran medida correcta, existen no obstante otros aspectos que pueden ser ahora tenidos en cuenta. En particular, esta tarea puede ser emprendida gracias al material que aportan las notas de Hilbert para clases sobre geometría y aritmética, correspondientes al período que se extiende entre 1894 y 1905. Mi objetivo en lo que resta de este capítulo será entonces intentar arrojar luz sobre el contexto que rodea a la decisión de Hilbert de adaptar su axioma de completitud para los números reales e incorporarlo en el sistema axiomático para la geometría. En particular, intentaré mostrar en primer lugar que la 'completitud' de la que este axioma habla, de ningún modo se refiere a la completitud del *sistema axiomático*, en un sentido estricto. Este hecho, advertido explícitamente por Hilbert en un período posterior, en ocasiones no es expresado claramente en la literatura. En segundo lugar, argumentaré que estas discusiones no sólo permiten ganar mayor claridad respecto de cómo Hilbert juzgó la naturaleza y la función del axioma de completitud en su sistema axiomático para la geometría elemental, sino que además hacen posible distinguir ciertas diferencias importantes entre el papel que este axioma cumple en el sistema de axiomas para los reales y en el sistema para la geometría. En tercer lugar, defenderé que la indagación que llevaremos a cabo puede entregar resultados interesantes en torno al modo en que Hilbert consideró la importancia de la propiedad 'metalógica' de completitud, en este período temprano de sus investigaciones axiomáticas en el campo de la geometría. Una elucidación de estos tres puntos, sostendré finalmente, aporta elementos valiosos para alcanzar una perspectiva mejor contextualizada del abordaje axiomático a la geometría desarrollado por Hilbert hacia fines del siglo XIX y principios del siglo XX.

6.4.2.1. El sistema original del *Festschrift* (1899)

El sistema de axiomas para la geometría euclídea, presentado por Hilbert en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899), estaba conformado por veinte axiomas divididos en cinco grupos: Grupo I: axiomas de incidencia (siete axiomas);

Grupo II: axiomas de orden (cinco axiomas); Grupo III: axioma de las paralelas; Grupo IV: axiomas de congruencia (seis axiomas); Grupo V: axioma de continuidad.

En función de nuestro interés, se sigue de suyo que el grupo de axiomas de continuidad merece especial atención. Como hemos mencionado, en el *Festschrift* este grupo estaba conformado únicamente por el axioma de Arquímedes, de acuerdo a la siguiente versión:

> **Axioma de Arquímedes**: Sea A_1 un punto cualquiera sobre una recta situado entre dos puntos cualesquiera dados A y B. Tómense luego los puntos A_2, A_3, A_4 ..., de manera que A_1 se encuentra entre A y A_2, A_2 entre A_1 y A_3, A_3 entre A_2 y A_4, etc.; además dispóngase que los segmentos
>
> $$A\ A_1,\ A_1\ A_2,\ A_3\ A_4,\ \ldots$$
>
> son iguales entre sí. Luego, en la serie de puntos A_2, A_3, A_4, ..., siempre hay un punto A_n, tal que B se encuentra entre A y A_n.

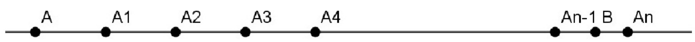


Figura 6.2.: Axioma de Arquímedes (Hilbert 1899, p. 19)

Un papel muy importante que desempeña el axioma de Arquímedes en la geometría elemental es que permite fundamentar el proceso de medición – por ello también es conocido como axioma de la medida –, dando lugar a la introducción de números. Es decir, si bien en base a los axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia), es posible comparar la longitud de segmentos, sólo a partir del axioma de Arquímedes podemos definir para cada segmento de manera única un número (positivo), que se identifica con la longitud de ese segmento. Dicho de otro modo, el axioma de Arquímedes hace posible la introducción de números en la geometría, en tanto permite que, junto con el conjunto de todos los segmentos, quede completamente determinado el conjunto de sus longitudes.

Ahora bien, por sí solo el axioma de Arquímedes no alcanza para que las longitudes de los segmentos cubran todos los números reales; o sea, para garantizar recíprocamente que, cualquiera sea el número real $a > 0$, existe un segmento cuya longitud se corresponde con él. Por el contrario, para ello es necesario agregar un nuevo axioma de continuidad. Como se sabe, algunas de las alternativas usuales son el principio de continuidad de Dedekind[31],

[31] Por cierto, como se verá a continuación, si a los axiomas I–III (incidencia, orden y congruencia) se le agrega el principio de Dedekind – o algún axioma equivalente – entonces el axioma de Arquímedes puede ser demostrado como un teorema.

algún principio equivalente como el axioma del supremo, o el principio conocido como el axioma de Cantor de intervalos encajados. Sólo apelando a alguno de estos principios es posible asegurar que entre el conjunto ordenado de todos los puntos de una recta y el conjunto ordenado de los números reales puede establecerse una correspondencia uno–a–uno, de modo tal que los elementos correspondientes se encuentran en igual relación de orden, *i.e.*, *la continuidad de la recta*.

Por otro lado, el sistema de coordenadas para la recta, el plano y el espacio que puede establecerse exclusivamente utilizando el axioma de Arquímedes sólo puede corresponderse con un cuerpo numérico arquimediano numerable, como por ejemplo el de los números racionales. Para obtener una correspondencia biunívoca con todos los números reales – *i.e.*, con la geometría analítica "cartesiana" – es necesario apelar a algún otro principio de continuidad, como por ejemplo alguno de los recién mencionados. En consecuencia, en la medida en que en el *Festschrift* el grupo de axiomas de continuidad estaba formado únicamente por el axioma de Arquímedes, Hilbert utiliza como la realización aritmética más simple de sus axiomas a un sub-cuerpo pitagórico[32] (numerable) de los reales, a saber: el cuerpo Ω de números algebraicos, definido del siguiente modo:

> Sea Ω el cuerpo de todos los números algebraicos que surgen del número 1 y de aplicar, un número finito de veces, las cuatro operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división, y la quinta operación $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω representa un número que surge de estas cinco operaciones.[33] (Hilbert 1899, p. 454)

En lugar de apelar al sistema de los números reales, Hilbert decidió entonces trabajar en 1899 con una realización aritmética "más pequeña" como el cuerpo Ω, para mostrar la independencia y la consistencia de sus axiomas. Sin embargo, como veremos a continuación, tanto en trabajos publicados como en notas para clases anteriores al *Festschrift*, Hilbert menciona e incluso hace uso de los principios de continuidad de Dedekind y Cantor. En mi opinión, ello sugiere que, independientemente de la explicación antes aludida, existen otras razones detrás de la resolución de Hilbert de esperar hasta que un axioma de las características del axioma de completitud esté disponible, para incorporarlo como segundo axioma de continuidad. Más aún, considero que intentar exhibir estas razones puede contribuir a ganar claridad respecto de cómo Hilbert apreció la naturaleza del

[32] Un cuerpo $\mathbb{K}$ se llama *pitagórico* si es ordenado y si, para cada elemento $a \in \mathbb{K}$, la raíz cuadrada $\sqrt{1+a^2}$ existe en $\mathbb{K}$.

[33] En breve, lo que se exige es que el cuerpo Ω sea cerrado bajo las operaciones de $+$, $-$, $\times$, $\div$ y la quinta operación de $\sqrt{1+\omega^2}$.

axioma de completitud, a menudo leído en una clave demasiado "modelo–teórica", y por ello, anacronista.[34]

6.4.2.2. El axioma (geométrico) de completitud

El axioma de completitud, añadido en la primera edición francesa (Hilbert 1900a) y luego a partir de la segunda edición alemana en adelante (Hilbert 1903), es el siguiente:

> **Axioma de completitud**: Los elementos (puntos, líneas, planos) de la geometría forman un sistema de objetos que, si se mantiene la totalidad de los axiomas antes mencionados, no es capaz de ser extendido; esto es, no es posible añadir al sistema de puntos, líneas y planos otro sistema de objetos, de modo que en el sistema obtenido por esta composición los axiomas I–V.1 sean válidos.

Aquello que ha llamado más la atención respecto de este axioma es que el modo peculiar en el que está formulado le da un carácter más bien diferente respecto del resto de los axiomas. En efecto, mientras los axiomas I–V.1 hablan directamente de los elementos básicos del sistema, y predican relaciones sobre ellos, el axioma de completitud se refiere en cambio a los axiomas anteriores y a las posibles realizaciones de los axiomas. En otras palabras, mientras que los axiomas I–V.1 pueden ser formalizados en un lenguaje de primer orden, el axioma de completitud requiere de un lenguaje de segundo orden, en la medida en que implica la cuantificación sobre 'modelos' de los axiomas.[35] Este rasgo ha provocado que en general se enfatice el carácter "lógicamente complejo" del axioma de completitud, en comparación con el resto de los axiomas. Asimismo, es también común que en la literatura se lo identifique como un axioma "metamatemático", en la medida en que este axioma predica relaciones entre los axiomas y sus 'modelos'. Sin embargo, en mi opinión esta lectura puede desviar la atención de su verdadero contenido y su función dentro del sistema axiomático, al menos como fue pensada por Hilbert inicialmente. Analicemos entonces el contenido del axioma de completitud.

En primer lugar, el axioma establece la completitud *del sistema de los elementos geométricos*; o más precisamente, fija una condición de maximalidad sobre el conjunto de los objetos gobernados por los axiomas I–V.1. La condición de maximalidad se

[34] La perspectiva "modelo-teórica" abierta por los trabajos de Hilbert en geometría, como así también algunas limitaciones de esta interpretación, han sido analizadas en (Demopoulos 1994).

[35] Hablar del axioma de completitud como un axioma de segundo orden es sin dudas anacronista, puesto que en este época no existía una distinción conceptual clara entre lógica de primer y segundo orden.

expresa mediante la afirmación de que no es posible extender el espacio por medio de la introducción de nuevos elementos (puntos, líneas, etc.) y conservar al mismo tiempo la validez de los anteriores axiomas. Hilbert aclara además cómo debe ser entendida la extensión del sistema y la "conservación" de los axiomas: el axioma de completitud exige que una vez que el sistema haya sido extendido por medio de la introducción de nuevos elementos u objetos (puntos, líneas, etc.), las condiciones establecidas por los axiomas deben mantenerse; ello es, las relaciones fijadas antes de la extensión – orden, congruencia, etc. – entre los distintos elementos no deben ser violadas cuando un nuevo elemento es introducido en el sistema de los objetos geométricos. Para ilustrar esta idea por medio de un ejemplo, un punto que antes de la extensión se encontraba entre dos puntos, continúa estando entre ellos después de la extensión. El axioma de completitud afirma que una extensión del sistema de objetos caracterizado por los axiomas, tal como ha sido recién descripta, no es posible.[36]

Ahora bien, la consecuencia que tiene la incorporación de este axioma es que la *única* realización aritmética que podrá satisfacer a los axiomas I–V. 1 y al axioma de completitud es el cuerpo ordenado completo o maximal de los números reales, y por ende, la geometría analítica construida sobre los números reales. Es decir, es claro que una geometría analítica construida sobre $\mathbb{Q}$ u Ω contradice el axioma de completitud: siempre es posible extender estas geometrías añadiendo nuevos puntos sobre la línea (los puntos que representen números irracionales o irracionales trascendentes respectivamente) y respetar al mismo tiempo las relaciones de orden establecidas previamente por los otros axiomas, lo cual contradice lo afirmado por el axioma de completitud. Por ejemplo, si A, B, C, D son cuatro puntos sobre la línea racional, y AB es congruente con CD, entonces ambos segmentos siguen siendo congruentes incluso cuando yo añado nuevos puntos entre A y B.

En resumen, el axioma de completitud postula de un *modo indirecto* la continuidad de los objetos geométricos, o de acuerdo a su versión lineal, la continuidad de la línea.[37] Es

[36] Cf. (Hilbert 1903, p. 17).

[37] En la séptima edición de 1930, Hilbert presenta una nueva versión del axioma de completitud:

> **Axioma de completitud lineal**: una extensión del sistema de puntos sobre una línea con sus relaciones de orden y congruencia, que preservaría las relaciones existentes entre los elementos originales así como también las propiedades fundamentales del orden y congruencia lineal que se siguen de los axiomas I–III, y del axioma V.1, es imposible.

La nueva versión del axioma de completitud sólo exige que no sea posible añadir nuevos puntos sobre la línea y mantener la validez de los axiomas que describen el orden y congruencia lineal. Que tampoco puedan ser añadidos, sin generar contradicciones, nuevas líneas y planos, es una consecuencia de la "completitud lineal". La versión original del axioma de completitud se demuestra entonces como un "teorema de completitud".

decir, la continuidad lineal es postulada de un modo indirecto puesto que, a diferencia de los otros principios de continuidad, no se afirma directamente la existencia de nuevos puntos sobre la línea. Por el contrario, el axioma de completitud sólo afirma que el *único* sistema numérico que puede servir como una realización aritmética es el cuerpo ordenado completo de los reales, y por ende, la geometría analítica basada en los números reales. A su vez, ésta es la función que Hilbert destaca constantemente del axioma de completitud. Por ejemplo, en la traducción al francés señala que "este axioma hace posible la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de una línea y todos los números reales" (Hilbert 1900a, p. 26).[38] Puede decirse entonces que la cuestión de la "completitud" surge originalmente en el contexto de evitar la laguna entre la geometría cartesiana y el sistema de axiomas de Hilbert para la geometría sintética. Es decir, por medio del axioma de completitud Hilbert pretende demostrar que no puede haber puntos en aquella geometría cuya existencia no pueda ser probada a partir de su sistema de axiomas. Empero el hecho de que esta "paridad deductiva" entre el sistema de axiomas de Hilbert y la geometría cartesiana es una consecuencia inmediata del axioma de completitud, no debe hacernos perder de vista que lo que afirma el axioma de completitud es la continuidad del *sistema de los objetos geométricos*, y no la propiedad de completitud del sistema axiomático. Si ese fuera el caso, entonces se trataría de una propiedad metalógica del sistema axiomático que debería ser demostrada, y no simplemente postulada.

6.4.3. Ventajas del axioma de completitud

En virtud de la relación recién señalada entre el axioma de completitud y las condiciones de continuidad, una serie de interrogantes se plantea naturalmente. La ausencia del axioma de completitud en la primera edición de *Fundamentos de la geometría* tiene como consecuencia que el sistema de axiomas para la geometría sintética es incompleto respecto de la geometría analítica basada en los números reales, en tanto no es posible establecer una correspondencia uno–a–uno entre los elementos de ambos sistemas. Pero entonces cabe preguntarse: más allá de la decisión de Hilbert de no trabajar con los números reales como la única realización aritmética de sus axiomas para la geometría: ¿Qué otras razones pudieron llevarlo a dejar "incompleto" su sistema de axiomas en el *Festschrift*, al rechazar otras alternativas disponibles para el axioma de completitud? O puesto de otro modo: ¿Qué características peculiares del axioma de completitud motivaron a Hilbert a incorporarlo casi inmediatamente al grupo de axiomas de continuidad, cuando hubiese sido posible alcanzar *antes* los mismos resultados, apelando a alguno de

[38] Véase además (Hilbert 1903, p. 17).

los otros postulados de continuidad?

En relación a estos interrogantes, Hilbert realiza en la edición francesa (Hilbert 1900a) y en la segunda edición alemana (Hilbert 1903), un par de observaciones muy interesantes, pero que en cierto modo pasan inadvertidas en el contexto de su exposición en *Fundamentos de la geometría.* Afortunadamente, sus cursos sobre geometría aportan reflexiones muy esclarecedoras.

La primera observación apunta a la relación entre el axioma de Arquímedes y el axioma de completitud. En el texto de la segunda edición, Hilbert señala que una característica fundamental del axioma de completitud es que permite presentar las condiciones de continuidad a través de dos principios o axiomas esencialmente distintos:

> A través del abordaje precedente el requerimiento de continuidad ha sido descompuesto en dos componentes esencialmente diferentes, a saber: *en el axioma de Arquímedes, que cumple la función de preparar el requerimiento de continuidad, y en el axioma de completitud, que forma la piedra angular [Schlußstein] de todo el sistema de axiomas.* (Hilbert 1903, p. 17)

Una ventaja crucial del axioma de completitud es, a los ojos de Hilbert, que permite introducir el requerimiento de continuidad – o más precisamente, el principio de continuidad de Dedekind – por medio de dos axiomas esencialmente diferentes, ello es, lógicamente independientes. Que el axioma de completitud no es una consecuencia del axioma de Arquímedes es claro inmediatamente, puesto que existen realizaciones aritméticas ($\mathbb{Q}$, Ω), en las que el axioma de Arquímedes vale pero el axioma de completitud no. Asimismo, la afirmación recíproca es también válida, aunque su demostración ofrece mayores dificultades. De hecho, este resultado no fue probado por Hilbert, sino que las relaciones lógicas entre la propiedad de completitud establecida por su axioma homónimo y el axioma de Arquímedes, fueron esclarecidas un poco más tarde, en el notable trabajo de H. Hahn sobre sistemas de magnitudes no–arquimedianas.[39] En resumen, en la medida en que del axioma de completitud no puede deducirse el axioma de Arquímedes, es necesario concluir que ambos axiomas son lógicamente independientes, tal como lo pretendía Hilbert.

[39] Básicamente, Hahn mostró cómo era posible *generalizar* la condición de completitud impuesta por el axioma de Hilbert, de manera que no se necesite presuponer la validez del axioma de Arquímedes (Cf. Hahn 1907, §3). Para un estudio introductorio del trabajo de Hahn y de sus consecuencias para las investigaciones de Hilbert, véanse Ehrlich (1995; 1997). En (Ehrlich 1997) puede encontrarse un análisis del axioma (aritmético) de completitud y sus relaciones lógicas con otros principios de continuidad, a la luz de desarrollos matemáticos más generales.

Por otro lado, la segunda observación de Hilbert está conectada con un rasgo que caracteriza su abordaje axiomático a la geometría, y que resulta muy visible en sus notas manuscritas para clases. Un objetivo central del proyecto hilbertiano consistió en mostrar cómo su nueva presentación axiomática de la geometría permitía ver con claridad que esta disciplina podía ser construida o fundada de un modo completamente autónomo o independiente, es decir, prescindiendo de cualquier consideración o concepto tomado de la aritmética, el análisis e incluso de la mecánica. Especialmente, Hilbert estaba muy interesado en demostrar que no sólo muchos resultados fundamentales de la geometría elemental podían ser alcanzados sin tener que apelar a principios de continuidad, sino que además las condiciones de continuidad mismas podían ser expresadas de un modo "puramente geométrico", o sea, con independencia de nociones provenientes de la aritmética y el análisis. En este sentido, el siguiente pasaje de la edición francesa resulta muy sugerente:

> Este axioma no nos dice nada acerca de la existencia de puntos límites, o acerca de la noción de convergencia; sin embargo, nos permite demostrar el teorema de Bolzano según el cual, para todo conjunto [infinito] de puntos en una línea situado entre dos puntos definidos sobre la misma línea, existe necesariamente un punto de acumulación, esto es, un punto límite. Desde un punto de vista teórico, el valor de este axioma es que lleva indirectamente a la introducción de puntos límites y, por lo tanto, permite establecer una correspondencia uno–a–uno entre los puntos de un segmento y el sistema de los números reales. Sin embargo, en lo que sigue, no haremos uso en ninguna otra parte de este axioma. (Hilbert 1900a, p. 25–26)[40]

Hilbert le atribuye así un carácter "puramente geométrico" al axioma de completitud, ausente en los otros postulados de continuidad. Este rasgo puede entenderse como sigue: tal como ocurre con todos los axiomas del sistema original del *Festschrift*, el axioma de completitud no utiliza subrepticiamente conceptos del análisis, como las nociones de límite, sucesión, convergencia, punto de acumulación o punto límite, etc. Sin embargo, aunque dicho axioma no emplea conceptos del análisis, a partir de él puede demostrarse la existencia de puntos límite para toda sucesión acotada de puntos sobre una línea. En suma, las virtudes del axioma de completitud residen en que: *i)* permite descomponer las

[40] Hilbert repite esta observación en la segunda edición alemana (Cf. Hilbert 1903, p. 17), agregando además que el axioma de completitud permite también demostrar que para cada cortadura de Dedekind existe un elemento correspondiente en el sistema.

condiciones de continuidad en dos principios independientes; *ii)* no introduce ninguna noción ajena a la geometría.

6.4.4. Alternativas para el axioma de completitud

6.4.4.1. El principio de continuidad de Dedekind y el teorema de Bolzano–Weierstrass

Las dos observaciones anteriores indican palmariamente que una cuestión crucial para comprender las características peculiares que Hilbert vislumbra en el axioma de completitud (en su versión geométrica), consiste en identificar sus diferencias respecto de otros principios alternativos para postular o garantizar la continuidad lineal. De particular interés resultarán el célebre teorema de Bolzano–Weierstrass y el principio de continuidad de Dedekind, mencionados por Hilbert en numerosas oportunidades. Este último fue formulado por Dedekind en 1872, en su trabajo "Continuidad y números irracionales" (Dedekind 1872):

> **Principio de continuidad de Dedekind**: Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (Dedekind 1872, p. 85)

El principio de Dedekind, que postula directamente la continuidad de la recta, se explica en función de su construcción de los números irracionales como corduras o particiones de números racionales. Éste es además un principio de continuidad muy fuerte, puesto que *por sí solo* basta para garantizar la completa coordenatización de los puntos de la línea con los números reales. Por otro lado, dicho principio es equivalente al axioma del supremo, a través del cual es habitual actualmente formular la propiedad de completitud de los números reales.[41] Ahora bien, asumiendo el principio de continuidad de Dedekind – o indistintamente, el axioma del supremo – es posible probar fácilmente el conocido teorema de Bolzano–Weierstrass sobre la existencia de puntos límites. En una formulación actualizada, este teorema reza así:

> **Teorema de Bolzano–Weierstrass**: Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un

[41] Axioma del supremo: Todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales posee un supremo.

> punto de acumulación o punto límite.[42]

Es oportuno mencionar aquí estos dos principios, en tanto que fueron la primera alternativa considerada por Hilbert como axiomas de continuidad. Como hemos visto, en el semestre de invierno de 1893/1894, Hilbert dictó un curso titulado “Die Grundlagen der Geometrie” (Hilbert 1894). Este curso constituyó su primer abordaje axiomático a la geometría. Como un problema central, Hilbert se propone indagar allí la cuestión muy discutida en el último tercio del siglo XIX, de cuál es el papel que juegan las condiciones de continuidad en la geometría elemental. En efecto, Hilbert se plantea en este curso dos objetivos que luego serán centrales para sus trabajos posteriores: por un lado, investigar qué axiomas son responsables de la estructura de un “cuerpo ordenado” sobre la línea; en segundo lugar, y relacionado con lo anterior, determinar qué axiomas son necesarios para conseguir una completa coordenatización de los puntos de una línea con los números reales.[43] En cuanto a este último objetivo, el camino elegido por Hilbert fue utilizar un axioma de continuidad que postule la existencia de un punto límite, o más precisamente del supremo, para un conjunto infinito y acotado de puntos de la línea[44]; en otras palabras, un axioma prácticamente equivalente al teorema de Bolzano–Weierstrass sobre la existencia de puntos límites. Hilbert recurre nuevamente a este axioma de continuidad en una carta a F. Klein[45], fechada el 14 de agosto de 1894 y publicada más tarde en los *Mathematische Annalen* (Hilbert 1895). El axioma es el siguiente:

> **Axioma de continuidad**: Si A_1, A_2, A_3, es una sucesión infinita de puntos de una recta a y B es otro punto de a, de tal clase que en general A_i se encuentra entre A_h y B, siempre que el índice h sea menor que i, entonces existe un punto C con la siguiente propiedad: todos los puntos de la sucesión infinita A_2, A_3, A_4,... se encuentran entre A_1 y C, y si C' es otro punto, para el que ello también vale, entonces C se encuentra entre A_1 y C'.

Este axioma afirma de modo directo la existencia de un punto límite para una sucesión infinita y acotada de puntos sobre una línea. Más precisamente, por medio de la última condición (“Si C' es otro punto, para el que ello también vale, entonces C se encuentra entre A_1 y C'”), se identifica al punto límite C con el supremo. Es por

[42] Para una discusión histórica sobre el teorema de Bolzano–Weierstrass véanse Ferreirós (2007) y Moore (2000).
[43] Cf. (Hilbert 1894).
[44] Cf. (Hilbert 1894, p. 92).
[45] Cf. (Toepell 1986, p. 105).

ello que quizás podamos referirnos a él aquí como "axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind". Asimismo, es importante resaltar que por medio de este axioma, Hilbert impone una condición muy fuerte de continuidad, a saber: el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind no sólo garantiza por sí mismo la continuidad de la recta, sino que además de él se puede obtener el axioma de Arquímedes como una consecuencia.

Ahora bien, Hilbert no se limitó a adoptar esta alternativa en sus primeros abordajes axiomáticos, sino que incluso recurrió a este axioma de continuidad en su curso del semestre de invierno de 1898–99, "Elemente der Euklidischen Geometrie" (Hilbert 1898a), texto en el que se apoya ampliamente la primera edición de *Fundamentos de la geometría*.[46] Hilbert reconoce además allí las coincidencias de su axioma con el principio de continuidad

> En el modo de hablar de la teoría de conjuntos, la proposición afirma la existencia de un punto límite en un conjunto infinito de puntos. Es completamente innecesario señalar aquí la analogía de esta proposición con la teoría de las cortaduras de Dedekind. (Hilbert 1898a, p. 378).

En realidad, el axioma de Hilbert no sólo afirma la existencia de un punto límite sino además la existencia del supremo; por lo tanto, es equivalente al postulado de continuidad de Dedekind. Como consecuencia, si este último axioma de continuidad es incluido en el sistema de axiomas para la geometría elemental, se obtiene un isomorfismo con el cuerpo de los números reales. Por el contrario, si se asume únicamente el axioma de Arquímedes, la correspondencia uno–a–uno sólo será posible con un cuerpo ordenado arquimediano ($\mathbb{Q}$, Ω, etc.).

Luego, como sabemos, en el *Festschrift* el axioma de Arquímedes aparece como único axioma de continuidad. En las notas para clases recién citadas, Hilbert no se explaya respecto de los motivos que lo llevaron a no optar por el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind, previamente utilizado por él. Sin embargo, no es difícil hallar una explicación: el axioma de continuidad empleado por Hilbert en diversas oportunidades – (Hilbert 1894; 1895; 1898a) – impone una condición de continuidad muy fuerte, en tanto que no sólo hace posible la completa coordenatización de los puntos de una línea y los números reales, sino que además de él puede deducirse el axioma de Arquímedes. Es decir, si junto con aquel axioma de continuidad se suponen los axiomas I–III, es posible entonces demostrar el axioma de Arquímedes como un teorema.[47]

[46] Cf. (Hilbert 1898a, p. 377).
[47] Cf. (Enriques 1907, 37)

Esta consecuencia resulta empero sumamente indeseable si se tienen en cuenta algunas de las investigaciones y resultados más importantes alcanzados por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*, algunos de los cuales ya han sido mencionados y analizados anteriormente. Sólo por mencionar algunos de los ejemplos más importantes: *i.*) la prueba de independencia del axioma de Arquímedes, y la construcción para tal propósito, de geometrías no–arquimedianas que por sí mismas resultan interesantes[48]; *ii.*) las nuevas pruebas de los teoremas clásicos de Desargues y Pascal, en las que no se apela a ninguna condición de continuidad, *i.e.,* al axioma de Arquímedes; *iii.*) la elaboración de distintos cálculos de segmentos en base a aquellos teoremas fundamentales, es decir, con independencia de los axiomas de continuidad; *iv.*) la novedosa demostración de los teoremas de Legendre[49]; *v.*) la demostración del teorema clásico que afirma que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, en la que Hilbert utiliza sólo una versión más débil del axioma de congruencia de triángulos.[50] Todos estos resultados, considerados por Hilbert como contribuciones novedosas que exhibían el poder de su método axiomático para alcanzar nuevos y originales conocimientos, requerían que *el axioma de Arquímedes sea presentado como un axioma separado e independiente*. En consecuencia, un axioma de continuidad como el de Bolzano–Dedekind resultaba enteramente inadecuado en el contexto de las investigaciones axiomáticas llevadas a cabo por Hilbert.

En suma, de lo anterior se colige que el objetivo del axioma (geométrico) de completitud era asegurar la completa coordenatización del sistema de axiomas para la geometría elemental con el cuerpo de los reales, *sin apelar a un postulado de continuidad tan fuerte como el axioma de continuidad de Bolzano–Dedekind*. En otras palabras, el axioma de completitud, en tanto *complemento* del axioma de Arquímedes, permitía conseguir los mismos efectos que aquel axioma de continuidad más fuerte, sin interferir en cambio en las investigaciones que Hilbert consideró más fundamentales en su libro. Pero antes de adelantar una conclusión, hagamos una breve referencia a la otra alternativa disponible para el axioma de completitud.

6.4.4.2. El axioma de Cantor de intervalos encajados

Las referencias de Hilbert al principio conocido como el axioma de Cantor de intervalos encajados son mucho menos precisas, en comparación con las alusiones al mencionado postulado de continuidad de Bolzano–Dedekind. Más aún, hasta donde alcanza mi co-

[48] Véase (Hilbert 1899, §12). Sobre la importancia de Hilbert – y sus discípulos – en el desarrollo de sistemas geométricos y aritméticos no–arquimedianos véanse Cerroni (2007) y Ehrlich (2006).

[49] Véase (Hilbert 1898a, pp. 340–343) y (Hilbert 1902c, pp. 566–568).

[50] Véase (Hilbert 1902c, pp. 551–556). Estos últimos dos puntos son examinados en (Hallett 2008).

nocimiento, en este período temprano se restringe a la siguiente observación:

> En virtud del axioma de Arquímedes se puede conseguir ahora la introducción del número en la geometría (...). De este modo a cada punto P de la línea le corresponde un número real completamente determinado. Pero que también en verdad a cada número le corresponderá un punto de la línea, no se sigue de nuestros axiomas. Ello puede conseguirse a través de la introducción de puntos irracionales – ideales – (axioma de Cantor). (Hilbert 1898a, p. 390-91)

Hallett (2004, p. 428) ha señalado que en este pasaje, Hilbert se refiere a un axioma formulado por Cantor en su célebre artículo de 1872 sobre series trigonométricas.[51] Tal principio geométrico, llamado 'axioma' por el mismo Cantor, afirma que a cada magnitud numérica (*i.e.*, a cada número real) le corresponde un punto determinado de la recta.[52] Por el contrario, el principio que actualmente se conoce como el postulado geométrico de Cantor de intervalos encajados, es un axioma diferente.[53] Siguiendo la formulación de Enriques (1907), citada usualmente en los trabajos geométricos de la época, este axioma reza así:

> Si en un segmento lineal OM se dan dos sucesiones infinitas de segmentos OA, OB, OC,..., OA', OB', OC',..., de las cuales la primera crece y la segunda decrece de manera que, los segmentos AA', BB', CC', ... decrecen constantemente y finalmente son menores que cualquier segmento dado [*jede gegebene Strecke unterschreiten*], entonces en el segmento OM *existe un punto* X tal que, OX es mayor que todos los segmentos de la primera sucesión y menor que todos los segmentos de la segunda. (Enriques 1907, p. 36)[54]

[51] Cf. (Cantor 1872).

[52] Cf. (Cantor 1874, p. 128). En realidad, este 'axioma' era conocido en Alemania como *axioma de Cantor–Dedekind*. Por ejemplo, es posible encontrar ya esta designación en un artículo de F. Klein (1874, p. 347), quien como sabemos tuvo una estrecha relación con Hilbert.

[53] Cantor utilizó el principio de intervalos encajados, aunque implícitamente, en un conocido artículo de 1874, donde prueba por primera vez que el conjunto de los números reales es no–numerable, sobre la base de un argumento diferente a la diagonalización (Cf. Cantor 1874). Sin embargo, Cantor reconoce también que este axioma no sólo fue utilizado previamente por Bolzano y Weierstrass, sino que además su 'esencia' puede ser rastreada hasta los trabajos sobre teoría de números de Lagrange, Legendre, Cauchy y Dirichlet (Cf. Cantor 1879/84, p. 212). Es por ello que el axioma de intervalos encajados también es llamado *principio de Bolzano–Weierstrass*. Cf. (Ferreirós 2007, p. 139-141).

[54] En una versión más modernizada, el axioma de Cantor de intervalos encajados puede ser formulado de la siguiente manera:

Axioma de Cantor de intervalos encajados: Supongamos que en una recta arbitraria

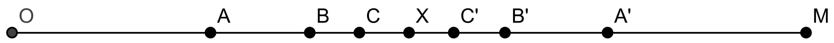


Figura 6.3.: Axioma de Cantor de intervalos encajados

Es preciso reconocer que, en virtud del pasaje arriba citado, es imposible aseverar de manera conclusiva que Hilbert se refiere en sus notas al postulado geométrico de Cantor de intervalos encajados. Sin embargo, dada su importancia en las discusiones posteriores en torno al axioma de completitud en su versión geométrica, considero que es importante hacer aquí una breve mención.

En primer término debe señalarse que, a diferencia del principio de continuidad de Bolzano–Dedekind, del axioma de intervalos encajados no puede deducirse el axioma de Arquímedes como una consecuencia.[55] Es decir, sólo si asumimos conjuntamente el axioma de Cantor y el axioma de Arquímedes puede asegurarse la continuidad de la línea. Este axioma no adolece entonces de la desventaja que Hilbert encuentra en el principio de continuidad de Dedekind. Más aún, el axioma de Cantor y el axioma de completitud son lógicamente equivalentes[56], de modo que el primero cumple con la condición exigida por Hilbert, de que la continuidad sea presentada a través de dos principios independientes. Además, el axioma de intervalos encajados posee la ventaja, como lo señala Bernays, de que su estructura no es "lógicamente compleja" como la de aquél, y de expresar directamente – y no de un modo encubierto – una condición de continuidad.[57] En cambio, a primera vista un inconveniente consistiría en que, a los ojos de Hilbert, este axioma no podría ser considerado como 'puramente geométrico', puesto que allí el concepto de sucesión es esencial.[58]

a se da una sucesión infinita de segmentos A_1B_1, A_2B_2, ..., de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, que cualquiera sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1,A_2B_2, etc.

[55] Véanse Baldus (1928a; 1930).
[56] Cf. (Efímov 1984, pp. 197-201).
[57] Cf. (Bernays 1935, pp. 197-198)
[58] Un interesante análisis del axioma de Cantor, en el contexto de la geometría elemental, se encuentra en (Baldus 1928b; 1930) y (Schmidt 1931). Más precisamente, estos autores analizan distintas formulaciones del axioma. Brevemente, a la versión que hemos citado de Enriques (1907), que impone

Luego, podemos ver claramente cómo el axioma de completitud constituía para Hilbert la opción más adecuada para la formulación de las condiciones de continuidad, puesto que a su entender ninguna de las alternativas disponibles satisfacía los criterios fijados por él para este grupo de axiomas.

6.4.5. Categoricidad y el axioma de completitud

Una última cuestión que quisiera abordar es la relación entre el axioma de completitud – en su versión geométrica – y la noción categoricidad. Como habrá podido notarse, existe una fuerte conexión entre el axioma de completitud y la categoricidad del sistema axiomático. En efecto, en el sistema de axiomas para los números reales, la función del axioma de completitud es garantizar que cualquier posible realización o 'modelo' de los axiomas sea isomorfa con el sistema de los números reales. Más precisamente, mientras que los primeros diecisiete axiomas de (Hilbert 1900c) definen un cuerpo arquimediano ordenado $(\mathbb{Q}, \Omega, \mathbb{R})$, cuando se introduce el axioma de completitud el sistema axiomático caracteriza en cambio un cuerpo arquimediano ordenado maximal o completo, *i.e.*, el sistema de los números reales. Así, Hilbert manifiesta explícitamente que la consecuencia de la introducción del axioma de completitud en el sistema de axiomas para los números reales es la 'categoricidad': "En primer lugar, quisiera ahora hacer plausible que el sistema de cosas definido a través de los 18 axiomas es *idéntico con el sistema de todos los números reales*" (Hilbert 1905b, p. 18).

Del mismo modo, la categoricidad es también un resultado de la introducción del axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría euclídea. Hilbert reconoce esta consecuencia visiblemente, como resulta elocuente en el siguiente pasaje:

> Como puede verse, existe un número infinito de geometrías que satisfacen los axiomas I–IV, V,1. Sin embargo, sólo hay una, a saber la geometría cartesiana, en la que el axioma de completitud también es válido al mismo tiempo.

la condición de que la longitud de los segmentos AA', BB', CC', ... tienda a cero, la denominan axioma de Cantor *métrico*. Por el contrario, si se suprime este requerimiento, entonces se llega a una versión más general del axioma, que afirma que existe un punto en el interior de *todos* los encajes de segmentos, no sólo en aquellos cuya longitud tiende a cero. A esta versión la llaman axioma de Cantor *topológico*. Sin embargo, ambos autores prueban que en toda *geometría arquimediana* es posible evitar la condición presente en el axioma *métrico*, puesto que ambas versiones del axioma de Cantor son *equivalentes* si se asume previamente el axioma de Arquímedes. Hertz (1934) demuestra, además, que del axioma de Cantor *topológico* tampoco se sigue el axioma de Arquímedes como una consecuencia.

Finalmente, cabe argumentar que los supuestos señalados por Hilbert no parecen ser suficientes para considerar el postulado de intervalos encajados como ajeno a la geometría, dado que sería posible incluso formular este axioma evitando la idea de sucesión.

> (Hilbert 1903, p. 20)

Es importante aclarar que, aunque el término “categoricidad” se encuentra por primera vez en (Veblen 1904), en este período temprano Hilbert contaba ya con una concepción relativamente clara de las nociones de categoricidad e isomorfismo. Evidencia al respecto puede encontrarse en el siguiente pasaje de las notas para el curso “Zahlbegriff und Quadratur des Kreises” (Hilbert 1897b):

> Luego de que los axiomas hayan sido encontrados, todavía debe mostrarse:
>
> 1. Los axiomas no se contradicen entre sí.
> 2. ¿Cómo y qué axiomas son dependientes de otros?
> 3. ¿Qué axiomas son mutuamente independientes?
> 4. Los axiomas definen unívocamente [*eindeutig*] un sistema de objetos, *i.e.*, si se tiene otro sistema de objetos que satisface todos los axiomas anteriores, entonces los objetos del primer sistema son correlacionables uno–a–uno [*umkehbar eindeutig abbildbar*] con los objetos del segundo sistema. (Hilbert 1897b, p. 42)

Hilbert presenta además caracterizaciones incluso más precisas en (Hilbert 1905b, p.21) y (Hilbert 1905c, pp. 17-18). Sin embargo, debemos reconocer que una definición formal de las nociones de categoricidad e isomorfismo sólo pudo ser alcanzada por Hilbert en un período bastante posterior, dado que como hemos advertido una clara distinción conceptual entre sintaxis y semántica se encuentra recién en (Hilbert 1917).[59]

Por otro lado, es dable mencionar que previamente la categoricidad del sistema axiomático para los números naturales fue un tema central en (Dedekind 1888). En efecto, Dedekind prueba allí en detalle que dos modelos cualesquiera de sus ‘axiomas’ son isomorfos.[60]

Ahora bien, aunque la categoricidad es una consecuencia de la inclusión del axioma de completitud, tanto en el sistema de axiomas para los reales como para la geometría, existen al respecto diferencias importantes entre ambos sistemas que considero oportuno destacar. En particular, una diferencia significativa fue advertida por Baldus (1928a), en un artículo que influyó en algunas modificaciones introducidas en la séptima edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1930). Básicamente la observación es la

[59] Sobre esta cuestión véase (Zach 1999).

[60] Cf. (Dedekind 1888, Teoremas 132, 133). Sobre Dedekind véase (Ferreirós 2007; 2009). Un análisis histórico de las nociones de completitud y categoricidad puede verse en (Awodey y Reck 2002).

siguiente. Si del sistema de axiomas de Hilbert se elimina el axioma de las paralelas, entonces se obtiene un sistema axiomático para la geometría absoluta, *i.e*, la geometría sin paralelismo, que es la estructura común que comparten las geometrías euclídeas y no–euclídeas. Asimismo, a partir de los axiomas que caracterizan ahora la geometría absoluta, es posible introducir coordenadas sobre la línea del modo habitual. Luego, si por otro lado el axioma de completitud es sustituido por el axioma Cantor[61], se puede lograr una correspondencia uno–a–uno entre los puntos de la línea y los números reales. El sistema axiomático que define a la geometría absoluta es entonces *completo* en el sentido del axioma de completitud, es decir, no puede ser extendido añadiendo nuevos elementos (puntos) al sistema de objetos. Sin embargo, es claro que este sistema de axiomas posee múltiples realizaciones o 'modelos' (la geometría euclídea, la geometría hiperbólica, etc.) no isomorfos entre sí. En conclusión, es posible tener un sistema de axiomas que sea completo en el sentido del axioma de completitud, pero no categórico. En otras palabras, que un sistema axiomático sea 'completo" en el sentido del axioma de completitud, no implica que sus realizaciones deban ser necesariamente todas isomorfas entre sí.

Luego, del resultado anterior se sigue una serie de consecuencias importantes. En primer lugar, contrariamente a lo sugerido por el modo de proceder de Hilbert en lo que respecta al axioma de completitud, la estrategia seguida en el sistema axiomático para los reales no puede ser aplicada sin más al sistema de axiomas para la geometría. En este último caso, el axioma de completitud no necesita ser la "piedra angular" [*Schlußstein*] del sistema. Es decir, en el contexto del sistema de axiomas para los números reales, los primeros diecisiete axiomas definen un cuerpo ordenado arquimediano. La función del axioma de completitud es identificar unívocamente al cuerpo de los números reales, de entre las diversas realizaciones posibles que pueden satisfacer estos primeros diecisiete axiomas. Y ello por medio de una condición de maximalidad que establece que la única realización posible de *todos* los axiomas es un cuerpo ordenado arquimediano completo o maximal.[62] En otras palabras, sólo por medio del axioma de completitud el sistema

[61] Esta sustitución es necesaria dado que, *en su versión original*, el axioma de completitud supone la validez del axioma de las paralelas. Si por el contrario se utiliza el axioma de completitud lineal, entonces dicho requerimiento puede ser obviado. Éste fue precisamente uno de los principales aportes del trabajo de Baldus: mostrar que el axioma de completitud no mantiene esencialmente ninguna relación con el axioma de las paralelas. Cf. Baldus (1928a).

[62] Este modo de entender la función del axioma de completitud permite lograr una simplificación muy importante en su formulación. Véase, por ejemplo, (Bernays 1955). Por otro lado, en esta misma línea y enfatizando la influencia de Dedekind sobre Hilbert en este período temprano, Ferreirós presenta una interesante formalización del axioma de completitud en la que se recurre a un lenguaje lógico que incluye la teoría de conjuntos, y que en ese sentido es más próximo al contexto histórico

de axiomas se vuelve categórico. Por el contrario, en el caso del sistema de axiomas para la geometría elemental, éste es más bien el verdadero significado del axioma de las paralelas. Es decir, mientras que los axiomas de los grupos I-III y V (enlace, orden, congruencia, continuidad) caracterizan la geometría absoluta – que posee como en el caso de los primeros diecisiete axiomas para la aritmética de los reales diversas realizaciones no isomorfas entre sí –, el axioma de las paralelas permite caracterizar categóricamente a la geometría euclídea. En suma, aunque en el sistema de axiomas de Hilbert la función atribuida al axioma de completitud es asegurar la categoricidad del sistema, ella no es sin embargo la función que este axioma debe desempeñar necesariamente.[63] Más bien, colocar al axioma de completitud como el último axioma del sistema axiomático, encubre en cierto modo su verdadera función en el sistema de axiomas.

En segundo lugar, la relación entre el axioma geométrico de completitud y la categoricidad, pone de manifiesto una vez más que la completitud a la que dicho axioma alude, no es de ninguna manera la *completitud del sistema de axiomas*. Hilbert disipa esta posible confusión en un texto naturalmente posterior, en donde presenta una definición explícita de completitud (sintáctica) de un sistema axiomático, en el sentido de saturación o completitud de Post:

> La propiedad de completitud de un sistema axiomático consiste en que no es posible añadir una fórmula independiente de los axiomas como un nuevo axioma, sin introducir una contradicción dentro del sistema.
>
> Se observa aquí la diferencia entre este requerimiento de la completitud de un sistema axiomático y aquel [requerimiento] que es enunciado en el axioma de completitud. El axioma de completitud afirma: no es posible añadir sin contradicción <u>nuevos objetos</u>; el requerimiento de completitud de un sistema axiomático estipula sin embargo: no es posible añadir sin contradicción <u>nuevas fórmulas</u>. (Hilbert 1921, pp. 18–19)

de Dedekind y Hilbert (Cf. Ferreirós 2009, p. 48).

[63] Quizás deba agregarse que, más allá de esta función determinante que desempeña el axioma de las paralelas para conseguir la categoricidad del sistema axiomático de Hilbert para la geometría euclídea, el axioma de completitud cumple también un papel importante. En efecto, el axioma de completitud es el único axioma del sistema que requiere de un lenguaje de segundo orden para ser formalizado. Luego, independientemente de cuál sea el lugar que ocupe dentro del sistema axiomático, el axioma de completitud hace posible la categoricidad, puesto que si el sistema de Hilbert fuera enteramente formalizable en un lenguaje de primer orden, entonces por el teorema de Löwenheim–Skolem (1915/1919) se sigue que no podría ser categórico. Obviamente, Hilbert no podía conocer estos resultados en una etapa inicial, aunque sería interesante indagar cuál fue, si es que existió, su reacción en un período posterior.

Hilbert distingue de ese modo claramente entre el tipo de completitud aludida en su axioma homónimo y la propiedad de 'completitud' (sintáctica) de un sistema axiomático, en el sentido de saturación. Sin embargo, en la medida en que el axioma de completitud expresa una condición de maximalidad, es evidente que existe una conexión entre ambos. Más precisamente, si se considera que los *elementos u objetos* de un sistema axiomático para la lógica proposicional son proposiciones – como lo hace aquí Hilbert – entonces es posible decir que ambos requerimientos expresan esencialmente lo mismo.[64]

6.5. Consideraciones finales

En el comienzo de este capítulo he señalado que un análisis del contexto que rodea la inclusión del axioma de completitud en el sistema de axiomas para la geometría, puede arrojar luz respecto del papel que para Hilbert desempeñó la propiedad metalógica de "completitud", en esta etapa temprana y en el contexto de sus investigaciones geométricas. Quisiera concluir entonces con algunas observaciones al respecto.

Hemos visto que Hilbert asevera en numerosas ocasiones, en las distintas ediciones de *Fundamentos de la geometría*, que el objetivo fundamental del axioma de completitud es hacer posible la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de la línea y los números reales. En este sentido, el axioma de completitud fue específicamente incorporado por Hilbert para garantizar que la geometría analítica "cartesiana" se convierta en la única realización (salvo isomorfismo) de sus axiomas para la geometría sintética. Sin embargo, es preciso reconocer que ésta no es la única función que dicho axioma cumple en el sistema axiomático hilbertiano. Por el contrario, el axioma de completitud es imprescindible para que *el sistema de Hilbert* logre capturar íntegramente el dominio de la geometría euclídea; y éste es, en efecto, uno de los objetivos centrales que Hilbert se plantea manifiestamente en la introducción de *Fundamentos de la geometría*.[65]

Resumidamente, el problema se reduce a lo siguiente: la propiedad de intersección de dos circunferencias[66], de donde puede probarse que circunferencias y líneas se intersecan cuando deben hacerlo, no puede ser garantizada en base al sistema de axiomas original del *Festschrift*. Empero esta propiedad es esencial para llevar a cabo muchas de las construcciones de segmentos, ángulos y figuras usando las técnicas descriptas por Euclides en los *Elementos*. Por ejemplo, el teorema que afirma que un triángulo puede

[64] Cf. (Zach 1999).
[65] Cf. (Hilbert 1899, p. 1).
[66] Dados dos circunferencias Γ, Δ, si Δ contiene al menos un punto dentro de Γ, y Δ contiene al menos un punto fuera de Γ, entonces Δ y Γ se encontrán (exactamente en dos puntos).

ser construido a partir de tres segmentos dados, tales que la suma de cualquiera dos de sus lados es siempre mayor que longitud del tercero. Este teorema es demostrado por Euclides en la proposición *I, 22*; sin embargo, allí se utiliza explícitamente la propiedad de intersección de dos circunferencias, con lo cual este problema no puede ser resuelto en el sistema axiomático original de (Hilbert 1899).[67]

El mismo problema puede ser ilustrado observando los equivalentes algebraicos de las construcciones geométricas realizables en base al sistema de axiomas, un tópico investigado en detalle por Hilbert, y en donde además realizó contribuciones importantes. Actualmente es usual afirmar que para garantizar que la totalidad de las construcciones de Euclides con *regla y compás* puedan ser realizadas, el cuerpo (numérico) abstracto construido directamente a partir de los axiomas de la geometría debe satisfacer la propiedad de un "cuerpo euclídeo"[68]:

Definición. *Un cuerpo* $\mathbb{K}$ *se llama euclídeo si es ordenado y si, para todo elemento* $a \in \mathbb{K}$*, con* $a > 0$*, la raíz cuadrada* $\sqrt{a}$ *existe en* $\mathbb{K}$*.*

Ahora bien, el cuerpo Ω de números algebraicos, que Hilbert construye en 1899 para proporcionar una realización aritmética de sus axiomas, no es un cuerpo euclídeo sino un cuerpo "pitagórico"; más precisamente, un cuerpo pitagórico *minimal*. Luego, el cuerpo abstracto Ω es un *sub–cuerpo propio* del cuerpo euclídeo; y ello significa que la totalidad de las construcciones con regla y compás que caracterizan a la geometría euclídea elemental no puede ser realizada teniendo como base el sistema de axiomas original de Hilbert. En otras palabras, el sistema de axiomas no es *completo* en relación al dominio de la geometría euclídea elemental. El sistema de axiomas original no cumple así con el criterio "pre–formal" de completitud definido por Hilbert en este período temprano, en virtud del cual el sistema axiomático debe ser construido de tal manera que sea posible obtener a partir de sus axiomas, deductivamente como consecuencias, todas aquellas proposiciones que esperamos encontrar en el dominio de la geometría euclídea.

Resulta luego muy significativo observar que Hilbert era plenamente consciente de estas dificultades al momento de la redacción del *Festschrift*, e incluso un poco antes. Prueba de ello es el capítulo VII de la primera edición de *Fundamentos*, en donde analiza qué construcciones geométricas son realizables en su sistema de axiomas. En particular, Hilbert reconoce allí, aunque sólo implícitamente y en una forma más bien abstracta, que

---

[67] Hemos mencionado este teorema previamente. Véase capítulo 2, sección 2.3.2. Por otro lado, una crítica similar es que, si no se presupone la propiedad de intersección de dos circunferencias, y consecuentemente, de intersección de líneas y circunferencias, entonces no es posible probar que "el círculo es una figura cerrada". Hilbert reconoce este problema en (Hilbert 1898a, p. 64).

[68] Cf. (Hartshorne 2000, p. 146).

su sistema de axiomas no puede garantizar la propiedad de intersección de dos circunferencias; es decir, la existencia de los puntos de intersección entre dos circunferencias que, como dijimos, es fundamental para poder realizar muchas de las construcciones más elementales de la geometría euclídea plana.

En este capítulo, y más detalladamente en sus notas (Hilbert 1898b, pp. 64-68) y (Hilbert 1898a, pp. 64-69), Hilbert reconoce en primer lugar que todas las construcciones que pueden ser realizadas sobre la base de los axiomas I–V de la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, son construcciones que utilizan sólo una regla y un "transportador de segmentos" [*Streckenübertrager*]. Este último instrumento es utilizado para medir segmentos, y según Hilbert, corresponde a un "uso restringuido del compás" (Hilbert 1899, p. 80). En segundo lugar, advierte que el equivalente algebraico de las construcciones con regla y "transportador de segmentos" es un cuerpo pitagórico. Es decir, Hilbert aclara que las construcciones permitidas por su sistema de axiomas (original) pueden ser llevadas a cabo en una geometría analítica cuyas coordenadas forman un cuerpo pitagórico (minimal). En tercer lugar, en las notas de clases correspondientes al curso que antecede inmediatamente al *Festschrift*, Hilbert construye un cuerpo numérico que le permite demostrar que no todo cuerpo pitagórico es necesariamente un cuerpo euclídeo – dicho en términos algebraicos modernos –; esto es, que el cuerpo pitagórico es un sub–cuerpo propio del cuerpo euclídeo (Hilbert 1898b, pp. 64-65). Y finalmente, Hilbert reconoce que la condición algebraica que corresponde a las construcciones con compás es que cada número (positivo) en el cuerpo de coordenadas posea una raíz cuadrada, i.e., que el cuerpo sea euclídeo. En función de estos resultados, Hilbert concluye que no todas las construcciones realizables con regla y compás están justificadas sobre la base de su sistema de axiomas. Y esta conclusión es expresada explícitamente en el Teorema 41 del *Festschrift* (Hilbert 1899, p. 81).

Ahora bien, un modo habitual de garantizar la existencia de los puntos de intersección entre dos circunferencias, y por lo tanto, entre una recta y una circunferencia, es a través de un principio de continuidad como el de Dedekind; y ésta fue, de hecho, una de las primeras críticas que recibió el libro de Hilbert.[69] En este sentido, el axioma de continuidad *á la Bolzano–Dedekind*, utilizado por Hilbert hasta muy poco tiempo antes de la publicación del *Festchrift*, le hubiese permitido remediar esta dificultad.

[69] Véase (Sommer 1900, p. 291). Puesto que para garantizar la propiedad de intersección de dos círculos basta con que el cuerpo coordinado sea euclídeo, la continuidad completa del espacio no es indispensable, sino que es suficiente con añadir al sistema axiomático un axioma que postule precisamente dicha propiedad. Esta vía es presentada, por ejemplo, por (Hartshorne 2000). Hallett (2008, p. 247) señala sin embargo que añadir la propiedad de intersección de dos circunferencias como un axioma para asegurar la 'propiedad euclídea' parecería ser más bien una solución *ad hoc*.

Sin embargo, esta estrategia implicaba que el axioma de Arquímedes no pudiera ser presentado como un principio separado e independiente, una consecuencia absolutamente indeseada en el contexto de las investigaciones axiomáticas de *Fundamentos*.

Ante esta disyuntiva, fundamentalmente ocasionada por la carencia de una alternativa funcional como principio de continuidad, la opción elegida por Hilbert fue entonces "sacrificar" la completitud de su sistema de axiomas, antes de ver obstaculizadas aquellas investigaciones que consideró sus contribuciones más importantes a esta disciplina matemática. Y, en mi opinión, esta actitud pone claramente de manifiesto un rasgo central de su concepción del método axiomático, a saber: el método axiomático no debe entenderse sólo como una herramienta eficaz para conseguir una presentación más rigurosa y lógicamente perspicua de una teoría matemática – rasgo que por lo demás Hilbert nunca se cansó de enfatizar –, sino también, y no menos importante, como un podereso instrumento para llegar a nuevos descubrimientos matemáticos.

Finalmente, es necesario señalar que, precisamente en este rasgo fundamental que según Hilbert explicaba la inclusión del axioma de completitud en su sistema de axiomas para la geometría – i.e., la independencia del axioma de Arquímedes –, reside una dificultad notable desde un punto de vista axiomático, a saber: en la medida en que el axioma de completitud se refiere a otros axiomas y *presupone su validez*, no es posible demostrar la independencia de cualquiera de los axiomas explícitamente mencionados. En otras palabras, la peculiar forma "metalingüística" del axioma de completitud impide *demostrar* que el axioma de Arquímedes no se sigue de él como una consecuencia.[70] Esta dificultad intrínseca al axioma de completitud le fue así señalada a Hilbert por Baldus (1928a).[71]

Ante estas críticas, Hilbert optó por no realizar comentario alguno y conservar el axioma de completitud dentro de su sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental. Quizás ello sea un claro indicio de que, al igual que como fuera posteriormente recibido, Hilbert vislumbró en el axioma de completitud una de sus contribuciones más originales a la axiomática moderna.

[70] El primero en observar esta dificultad fue (Hahn 1907, §3).

[71] Poco más tarde, Paul Bernays – activo colaborador de Hilbert a partir de la sexta edición (1923) de *Fundamentos* – llegó a sostener que, dada esta "complejidad lógica" del axioma de completitud, el axioma de Cantor de intervalos encajados era preferible por sobre aquél (Cf. Bernays 1935, p. 198). Presentaciones axiomáticas más contemporáneas de la geometría elemental, que pretenden seguir en espíritu al sistema de Hilbert, utilizan el axioma de Cantor en lugar del axioma de completitud. Véanse (Efímov 1984) y (Guerrerro 2006).

Consideraciones finales

El objetivo central de esta tesis doctoral ha sido reconstruir la *temprana concepción axiomática de la geometría* de Hilbert, principalmente utilizando sus notas manuscritas de clases para una serie de cursos sobre geometría, correspondientes al período 1891–1905. Por *concepción de la geometría* no he entendido aquí una exposición de carácter sistemático, en el sentido de una filosofía de la geometría cuidadosamente elaborada y completamente articulada. Por el contrario, con ello he aludido más bien a una serie de reflexiones y observaciones, de un tenor claramente filosófico, respecto de: *a)* la naturaleza de la geometría y del conocimiento geométrico en general; *b)* el lugar que ocupa la geometría en el contexto de la matemática en general y cómo se relaciona esta disciplina con otras ramas de la matemática; *c)* el papel que desempeña la intuición en las teorías geométricas, particularmente en el proceso de axiomatización; *d)* la naturaleza y función del método axiomático, en particular en su aplicación a la geometría.

En primer lugar, debemos señalar que esta concepción experimenta una suerte de *evolución* desde el primer trabajo que Hilbert dedica a la geometría en 1891, hasta la discusión más detallada y completa sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría que encontramos en este período inicial, correspondiente a un curso dictado en 1905. En efecto, en las notas de clases para el curso "Geometría proyectiva" (Hilbert 1891a), Hilbert todavía caracteriza la geometría de un modo tradicional, al definirla como la ciencia que estudia las propiedades o forma de las cosas en el espacio. Más aún, nuestro autor señala que, a diferencia de teorías matemáticas puras como la aritmética y el análisis, la geometría no se funda exclusivamente en el pensamiento puro, sino que además requiere de la experiencia y la intuición. Los cursos posteriores – entre los que se encuentran (Hilbert 1894; 1898b;a; 1902c; 1905b;c) – exhiben, en cambio, una concepción axiomática abstracta de la geometría completamente desarrollada. Más precisamente, Hilbert adopta por primera vez en 1893/1894 una perspectiva axiomática formal para investigar el problema de los fundamentos de la geometría. En dicho manuscrito afirma explícitamente que los conceptos primitivos y proposiciones básicas de su teoría geométrica no se refieren al espacio físico, sino que conforman un “entrado de conceptos” – o en términos modernos, una estructura relacional – que puede recibir distintas interpretaciones, ya sea dentro de otras teorías matemáticas o físicas, como así también aplicaciones empíricas. Asimismo, a esta concepción formal del método axiomático se le sumó poco después, en el curso siguiente de 1898/1899, el componente quizás más novedoso y matemáticamente fructífero de su análisis axiomático (formal) de la geometría euclídea elemental: las *investigaciones metageométricas*. Hilbert presenta por primera vez en este curso, y perfecciona en los cursos siguientes, su técnica de la construcción de “modelos” analíticos de los axiomas geométricos, para probar propiedades “metalógicas” como por ejemplo la consistencia, y fundamentalmente, la *independencia*. En este contexto temprano, el procedimiento de construcción de modelos consistía en traducir uno o varios grupos de axiomas dentro de otra teoría matemática, en particular, la teoría de los números reales. Este método coincidía esencialmente con el procedimiento estándar de la geometría analítica, en donde se proporcionaban, sobre la base de un sistema adecuado de coordenadas, nuevas definiciones de los términos geométricos primitivos (punto, línea, plano, etc.). Del mismo modo, para el estudio de estos modelos analíticos, por ejemplo, para probar que un axioma en particular no se seguía de un conjunto de axiomas dado, Hilbert hace un uso sistemático de herramientas conceptuales tomadas del álgebra y del análisis (real y complejo). En suma, el estudio de estas fuentes manuscritas no sólo nos han permitido analizar el surgimiento de las investigaciones metageométricas en Hilbert, sino que además hemos podido identificar resultados geométricos interesantes que incluso no fueron incluidos en *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899).

Por otra parte, hemos visto además que esta nueva concepción formal del método axiomático estuvo acompañada por una *posición empirista*, de acuerdo con la cual los hechos básicos que constituyen la base de nuestro conocimiento geométrico provienen de la experiencia y de una suerte de “intuición geométrica”. Hilbert sostiene así que la geometría es “la ciencia natural más completa”, y afirma que su diferencia con otras teorías físicas, en especial con la mecánica, reside en el notable grado de desarrollo que ha alcanzado desde los tiempos de Euclides, y no en una característica esencial asociada a su *naturaleza*. Sin embargo, esta posición empirista no es radicalizada en ningún momento, al exigir por ejemplo que todos los conceptos primitivos y proposiciones básicas de la geometría tengan como correlato un conjunto de conceptos y proposiciones empíricas u observacionales. Más bien, el elemento empirista en la concepción hilbertiana de la geometría se circunscribe a afirmar que esta teoría es, *sólo en cuanto a su origen*, una ciencia natural. Luego, hemos podido justificar esta última afirmación analizando las similitudes, que el propio Hilbert señala en sus cursos, entre su concepción axiomática de la geometría y la "teoría pictórica" [*Bildtheorie*] de Heinrich Hertz. En resumen, la concepción temprana de la geometría de Hilbert se caracteriza por: *i.)* una posición axiomática formal y *ii.)* una posición empirista respecto del origen de la geometría y de su lugar dentro de las distintas teorías matemáticas. A su vez, estos dos componentes se vinculan en virtud de la *función fundamental* que Hilbert le asigna al método axiomático formal, a saber: a través del proceso de *axiomatización formal* la geometría se convierte, con su contenido empírico factual, en una *teoría matemática pura*.

Ahora bien, a diferencia de la impresión que suele provocar su presentación axiomática en *Fundamentos de la geometría*, Hilbert aclara, en numerosas oportunidades a lo largo de sus notas de clases, que la adopción de una posición axiomática formal no implica que una teoría geométrica axiomática no tiene más ningún significado para la realidad y para la "intuición geométrica". Por el contrario, Hilbert advierte que el interés en realizar un análisis axiomático formal de la geometría, y en particular de la geometría euclídea, es ofrecer una descripción matemáticamente exacta y completa de la *estructura lógica* de esta teoría matemática, *i.e.*, de cuáles son los principios fundamentales que deben ser postulados para construir esta teoría y de las relaciones lógicas de los axiomas entre sí, y también con los teoremas fundamentales. Ello significa que, puesto que en gran parte la geometría elemental se funda en nuestra intuición especial, el análisis axiomático proporciona un conocimiento de las propiedades lógicas de los hechos intuitivos fundamentales que están en la base de la geometría, y en ese sentido, *de la intuición*. Es decir, dado que la intuición geométrica y la experiencia son las primeras fuentes del conocimiento geométrico, Hilbert considera en este período inicial que su examen axiomático de la geometría euclídea es, al mismo tiempo, *un análisis de estas fuentes originales de conocimiento*, pues revela, entre otras cosas, qué proposiciones son las responsables de varias de las partes centrales de nuestro conocimiento geométrico intuitivo. En otras palabras, aunque a través del método axiomático formal uno se posiciona en un nivel puramente conceptual, Hilbert sostiene que los resultados geométricos, y especialmente los metageométricos, alcanzados a través de su análisis axiomático, conservan una relación con las fuentes de nuestro conocimiento geométrico, pues nos permiten aprender mucho respecto del contenido del conocimiento geométrico intuitivo.

Luego, es interesante observar que muchas de las tesis centrales de esta concepción axiomática de la geometría fueron mantenidas por Hilbert prácticamente hasta el final de su producción científica. En particular, ello se observa en el último curso que Hilbert dedicó a los fundamentos de la geometría, dictado en el semestre de verano de 1927.

La redacción [*Ausarbeitung*] de este curso – (Hilbert 1927) – fue encargada a Arnold Schmidt, y posteriormente fue completada con anotaciones de Hilbert. Estas notas revisten un gran interés, en tanto que en ellas se basó claramente la séptima edición de *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1930), que no sólo fue la última edición en vida de Hilbert, sino que además fue la que introdujo los cambios más significativos respecto de la edición original. En la introducción de estas notas, Hilbert se refiere al objetivo de un estudio axiomático de la geometría en términos muy similares a los que hemos visto:

> Aplicaremos el método axiomático a la ciencia natural más completa, a la geometría, en donde éste también se construyó en primer lugar de modo clásico. El problema es: cuáles son las condiciones necesarias e independientes entre sí, a las que debemos someter a un sistema de cosas, para que a cada propiedad de estas cosas le corresponda un hecho geométrico e inversamente. ¿De qué modo debemos disponerlas, para que estas cosas sean una imagen completa de la realidad geométrica? (Hilbert 1927, p. 1)

El problema central que se plantea el abordaje axiomático a la geometría es aquí exactamente igual que en 1894 y 1898. Asimismo, en el reverso de la página Hilbert añade en lápiz la siguiente observación:

> Ahora bien, lo que no puede ser obtenido a través del pensamiento sino que sólo proviene de la experiencia (experimento), son los axiomas de la geometría, i.e. los hechos que la intuición constituye, al igual también que en la física. Esta investigación y este conocimiento no sólo tienen un valor primordial, sino que también sirven para asegurar la verdad. (Hilbert 1927, p. 1)

No es fácil determinar qué es lo que Hilbert quiere significar con "asegurar la verdad". Sin embargo, podemos concluir que su idea de que un análisis axiomático de la geometría constituye – aunque quizás deba aclararse, indirectamente – un examen del contenido de un conjunto de axiomas fundados en la intuición, todavía sigue operando:

> La geometría es una ciencia muy expandida y ramificada y también sus fundamentos pueden ser tratados de diversos modos. No quiero dedicarme aquí ni a la geometría analítica ni a la sintética, sino que nuestro objetivo es más bien un análisis lógico de nuestra facultad de la intuición. (...) A partir del mencionado problema la relación de este curso con la geometría

> analítica y la sintética queda determinada. La geometría analítica parte de la introducción del concepto de número en la geometría, cuya justificación habremos de demostrar primero aquí. En la geometría sintética se apela a la intuición, es decir, se aceptan lo más posible las figuras de los fenómenos [*Erscheinungsbilder*], tal como se ofrecen y se busca a partir de allí deducir nuevos fenómenos. Por el contrario nosotros evitaremos a la intuición, porque aquí se trata de un análisis de la intuición. (Hilbert 1927, p. 3)

Estas citas atestiguan la continuidad de varias de las ideas centrales que caracterizan la concepción temprana de la geometría de Hilbert, con lo que podría denominarse su posición madura. Por otra parte, a la luz de la reconstrucción que hemos ofrecido de la mencionada concepción axiomática de la geometría, es posible apreciar la clara oposición de Hilbert respecto de lo que hemos llamado aquí las interpretaciones formalista radical y deductivista del método axiomático formal.[72] Según se ha mencionado, la primera interpretación sostiene que la naturaleza de las teorías matemáticas (axiomatizadas) puede ser comparada con un juego, en donde las piezas son signos o símbolos vacíos, sin significado, y los axiomas constituyen meras reglas para la manipulación de signos. De acuerdo con la segunda, la idea detrás del método axiomático formal de Hilbert es reducir toda la matemática a una mera colección de sistemas abstractos, construidos a partir de un conjunto arbitrariamente dado de postulados, sin un significado intrínseco; más aún, el trabajo propiamente dicho de la matemática no consiste sino en el estudio de todas las consecuencias que se siguen lógicamente de tal sistema de axiomas consistente. Luego, aunque uno podría decir que ambas interpretaciones son lecturas *posibles* de la presentación axiomática formal de la geometría realizada en el libro *Fundamentos de la geometría*, el material que aportan sus notas de clases nos permiten concluir que éstas no fueron de ningún modo las lecturas impulsadas por el propio Hilbert.

Respecto de la *interpretación formalista radical*, los pasajes que hemos citado del curso "Principios lógicos del pensamiento matemático" (Hilbert 1905b;c) muestran que el hecho de que la geometría elemental sea presentada como un sistema axiomático formal no significaba, de ningún modo para Hilbert, que la naturaleza de esta teoría matemática podía ser comparada con un juego de símbolos o signos vacíos, sin significado. Por el contrario, Hilbert señala allí que, aunque el resultado de una axiomatización formal de la geometría es un entramado de conceptos capaz de recibir diversas interpretaciones, un objetivo importante de tal empresa es conservar de alguna manera la relación de aquel "entramado de conceptos" con los hechos geométricos intuitivos, que están en la base

[72] Véase la introducción, secciones 0.2.1 y 0.2.2.

de esta teoría matemática. Es claro así que una preocupación de tal índole se opone a una interpretación formalista radical de su concepción axiomática de la geometría. Dicho de otro modo, si bien la presentación de la geometría euclídea elemental por medio de un sistema axiomático formal era un logro matemático muy importante, que incluso llegó a inaugurar nuevas áreas de investigación matemática, ello no significó de ningún modo que el interés de Hilbert era presentar la geometría como un mero juego con fórmulas, desprovistas de todo significado. Más bien, en esta etapa inicial, Hilbert estaba convencido de que su análisis axiomático formal contribuía en gran medida a proporcionar un fundamento conceptual para el acervo de hechos geométricos intuitivos, que en su opinión conformaba la base de esta disciplina.

Por otra parte, la conexión que hemos podido establecer, en el capítulo 3, entre la concepción axiomática de la geometría de Hilbert y la “teoría pictórica” de Hertz, aporta elementos sustanciales para oponerse a la *interpretación deductivista*. En efecto, al describir el objetivo de realizar un análisis axiomático formal de la geometría como la tarea de proporcionar una “imagen [*Bild*] de la realidad geométrica”, Hilbert se separa indudablemente de este tipo de interpretación. Como hemos visto, con esta expresión el matemático alemán alude al hecho de que la razón fundamental para realizar un análisis axiomático es profundizar nuestro conocimiento, y perfeccionar la claridad epistemológica, de una disciplina matemática – la geometría – en un estado muy avanzado y elaborado de su desarrollo. No se trata de jugar con un conjunto cualquiera de postulados o axiomas arbitrarios, para ver qué proposiciones es posible obtener de allí por medio de deducciones lógicas. Antes bien, lo que se busca es alcanzar una (re)presentación consistente y más perspicua, que también conduzca a nuevos resultados, de una disciplina en sus orígenes enraizada en la experiencia y en la intuición. En otras palabras, su concepción de la naturaleza del método axiomático se ajusta a la creencia fundamental, tantas veces repetidas por Hilbert, que indica que toda la matemática es un resultado de la íntima interacción entre el pensamiento y la intuición.

Del mismo modo, la clara oposición de Hilbert respecto de la interpretación deductivista se evidencia en su expreso reconocimiento de que la aplicación del método axiomático presupone *siempre* la existencia de un conjunto de hechos y proposiciones básicas. En otras palabras, Hilbert entiende que el método axiomático es esencialmente, en virtud de su *naturaleza* y *función*, una herramienta que debe ser aplicada a una teoría matemática, o científica en general, *preexistente*. Esta idea aparece explícitamente formulada en el curso de 1905 recién mencionado, por medio de un metáfora muy interesante:

> El edificio de la ciencia no se erige como una vivienda, en donde primero

> se procura establecer firmemente los cimientos y luego se procede a la construcción y ampliación de las habitaciones. La ciencia pretende asegurarse, lo más rápido posible, espacios para poder moverse, y sólo después, una vez que aparecen aquí y allí signos de que los cimientos son demasiado débiles como para soportar la expansión de las habitaciones, se dispone a apuntarlos y fortificarlos. Ello no es una debilidad, sino más bien el camino correcto y saludable de su desarrollo. (Hilbert 1905b, p. 102)[73]

Hilbert aclara así que el análisis axiomático no debe ser concebido como el punto de partida de la investigación en cualquier campo de la matemáticas, y ciertamente no en la geometría; o sea, el análisis axiomático formal no puede ser ejecutado en las primeras etapas de una teoría matemática. Más bien, es de una enorme ayuda en una etapa posterior, cuando la teoría ha alcanzado ya un grado de madurez considerable.

Es oportuno señalar entonces que Hilbert no sólo anticipó y rechazó ambas interpretaciones formalista radical y deductivista de su nueva concepción del método axiomático en la etapa temprana que hemos analizado, sino que además volvió a explicitar su oposición a este tipo de lecturas, en un período posterior. El testimonio más contundente de este rechazo se encuentra en la primera sección de *Naturaleza y conocimiento matemático* [Natur und mathematisches Erkennen] (Hilbert 1992), un curso dictado por Hilbert en Göttingen en el semestre de invierno de 1919–1920. En primer lugar, el matemático alemán realiza la siguiente observación respecto de aquellas interpretaciones que extraen de su nueva idea de la axiomática, una concepción deductivista de la matemática:

> Si esta opinión fuera correcta, entonces la matemática no sería sino un mero conglomerado [*Anhäufung*] de inferencias lógicas amontonadas unas sobre otras. Tendríamos así una sucesión arbitraria de consecuencias, obtenidas gracias al poder de la deducción lógica. Pero de ningún modo se trata aquí de una *arbitrariedad* de tal clase; más bien, la formación de conceptos en matemática es guiada constantemente por la intuición y la experiencia, de modo que en su totalidad la matemática representa una estructura cerrada [*geschlossenes Gebilde*], libre de toda arbitrariedad. (Hilbert 1992, p. 5)

En particular, Hilbert menciona allí a Poincaré como uno de los principales promotores de esta la interpretación deductivista de su método axiomático. Sin embargo, también se refiere en este texto a la interpretación formalista radical, que sostiene que la idea

[73] Citado también en (Corry 1997, p. 130).

fundamental detrás de su abordaje axiomático es que la matemática puede ser entendida o reducida a un juego, donde ciertas reglas formales – los axiomas – regulan la manipulación de una colección de signos sin significado:

> Las distintas disciplinas matemáticas mencionadas constituyen así elementos necesarios en la construcción de un desarrollo conceptual sistemático; a partir de preguntas simples, planteadas naturalmente, ellas avanzan por medio de la cadena de razones internas [*innere Gründe*] hacia un camino trazado ya en lo esencial. De ningún modo se trata entonces aquí de arbitrariedad. La matemática no tiene nada de parecido a un juego, cuyas tareas se determinan por medio de reglas arbitrariamente estipuladas. Se trata más bien de un sistema conceptual dotado de una necesidad interna, que sólo puede ser así y no de alguna otra manera. (Hilbert 1992, p. 14)

Estas citas permiten apreciar cuán lejos se hallaban las interpretaciones formalista radical y deductivista, del modo en que Hilbert concebía la naturaleza y función de su método axiomático. Asimismo, esta importancia atribuida a la intuición revela que la posición de Hilbert no es tan modernista o formalista como la de otros partidarios de una concepción axiomática abstracta de la matemática, como por ejemplo sus contemporáneos Peano y Hausdorff. Más aún, en base a estas afirmaciones es posible ver cómo, en el caso de la interpretación de su concepción de la geometría, a menudo se ha incurrido en un error similar al de la interpretación de su concepción de la matemática en general. Es decir, tal como es ahora ampliamente reconocido, resulta claramente erróneo identificar al 'programa formalista' desarrollado por Hilbert durante la década de 1920, y principalmente en respuesta a las amenazas planteadas por el intuicionismo de Brouwer, con su filosofía o su concepción general de la matemática. Del mismo modo, parece igualmente injustificado reducir la 'concepción filosófica' temprana de la geometría de Hilbert a su presentación axiomática formal de 1899, o más precisamente, a la aparente motivación formalista que de allí parece seguirse. Hasta cierto punto, dichas interpretaciones resultan comprensibles, en tanto la totalidad de las ideas que hemos analizado fueron presentadas por Hilbert en escritos no publicados. Sin embargo, a la luz de estas fuentes, se vuelve evidente que su concepción axiomática de la geometría es más compleja que lo que las persistentes imágenes formalista y deductivista de su posición nos han enseñado.

Por último, para culminar con los resultados alcanzados en la primera parte de la investigación, el análisis de los manuscritos de Hilbert nos ha permitido apreciar un aspecto o faceta de su concepción del método axiomático, que por lo general no ha sido debidamente reconocida. Hilbert formula claramente, a partir de 1894, la idea central de la concepción abstracta o formal del método axiomático, a saber: las teorías matemáticas axiomatizadas no conforman un conjunto de proposiciones verdaderas acerca de un determinado dominio (intuitivo) fijo de objetos, sino que constituyen un "entramado de conceptos" o estructura relacional. Más aún, esta estructura relacional, capaz de recibir diversas interpretaciones, es ahora el objeto propiamente dicho de la investigación matemática. De este modo, es preciso reconocer que la denominada interpretación *formalista estructural* explica correctamente el *cambio conceptual* que Hilbert introduce en la idea de axiomática. Ahora bien, al mismo tiempo hemos podido ver que, para Hilbert, la *función* y *utilidad* del método axiomático no se circunscribían a reducir las distintas teorías matemáticas a estructuras relacionales o entramados de conceptos [*Fachwerk von Begriffen*]. Por el contrario, Hilbert sostiene reiteradamente, particularmente en relación a la geometría, que el método axiomático es una herramienta o instrumento eficaz para arrojar luz sobre las fuentes originales del conocimiento geométrico. Es decir, en los textos que hemos examinado, Hilbert señala muy a menudo que el origen de la geometría elemental se encuentra en la intuición y la experiencia, y que por lo tanto, una función importante del método axiomático formal es *instruir a esta intuición*, que está en la base de nuestro conocimiento geométrico. Debemos advertir que esta convicción *excede*, por decirlo de algún modo, la concepción formal del método axiomático. Sin embargo, Hilbert admite expresamente que la proyección de la esfera empírico–intuitiva a la esfera conceptual, conseguida gracias al análisis axiomático formal, no significaba un total abandono de la primera. De allí su énfasis, que hemos podido atestiguar por ejemplo en el capítulo 4, en el *paralelismo* existente entre su sistema axiomático para la geometría elemental y el conjunto de hechos geométricos intuitivos que, en su opinión, conforman la base de esta teoría; o sea, de allí el énfasis de Hilbert en que un objetivo importante de su axiomatización de la geometría elemental era conservar un cierto paralelismo entre el sistema de axiomas formales y el contenido intuitivo–empírico de esta teoría matemática. En suma, podemos concluir que si esta característica no es debidamente reconocida, la imagen de la concepción axiomática de la geometría defendida por Hilbert, entre 1891 y 1905, no está de ningún modo completa.

Por otra parte, uno de los objetivo centrales de la *segunda parte de la investigación* ha sido utilizar la concepción axiomática de la geometría de Hilbert, presentada en la primera parte de este trabajo, para examinar, contextualizar y destacar algunas *contribuciones técnicas y resultados* alcanzados en *Fundamentos de la geometría* (Hilbert 1899). En particular, en el capítulo 5, hemos utilizado sus notas de clases para subrayar la importancia metodológica y epistemológica que Hilbert depositó en una de las contribuciones técnicas más importantes de su libro, a saber: la aritmética o cálculo de segmentos. Luego, podemos ahora concluir que la elaboración de Hilbert de una aritmética para segmentos lineales estuvo íntimamente conectada a *i)* una serie de problemas metodológicos que identificó a lo largo de sus notas de clases, y que en parte motivaron algunas características específicas de su abordaje axiomático a la geometría; *ii)* un objetivo importante, que Hilbert enuncia también en sus cursos, de la aplicación del método axiomático formal a la geometría euclídea elemental.

Respecto de la primera cuestión *i.)*, i.e., los problemas metodológicos, hemos visto en el capítulo 1 que, para Hilbert, el problema de fondo que suscitaban los debates en torno a la legítima aplicación de técnicas analíticas en geometría, consistía en hallar una explicación y justificación para la introducción de elementos numéricos en geometría. Más precisamente, Hilbert señala explícitamente que, hasta que esta cuestión no sea debidamente explicada, existe desde el punto de vista de los fundamentos una suerte de hiato entre la geometría analítica y la geometría sintética o pura. Luego, su elaboración de un cálculo para segmentos lineales le permitió dar una respuesta a este problema, i.e., construir un puente (axiomático) entre ambas geometrías. Según se ha visto en el capítulo 5, uno de los resultados que Hilbert consiguió por medio de su aritmética de segmentos fue mostrar que los segmentos lineales pueden conformar, una vez que las operaciones de adición y multiplicación han sido definidas adecuadamente, la base de un cuerpo ordenado, que a su vez puede ser utilizado para introducir un sistema de coordenadas en la geometría. A este hecho aludimos precisamente cuando decíamos que llevó a delante una aritmetización de la geometría "desde dentro". Ahora bien, otro modo de interpretar este resultado, consiste en señalar que esta aritmetización interna de la geometría prueba que la geometría analítica es posible sin la imposición de cuerpos numéricos desde fuera. En otras palabras, la aritmética de segmentos de Hilbert constituye al mismo tiempo una explicación de *cómo y por qué* existe una completa correspondencia entre la geometría sintética (pura) y la geometría analítica. O dicho de otro modo, al probar que la teoría de las magnitudes surge intrínsecamente en la geometría sintética, y por lo tanto no debe ser impuesta desde fuera por medio de supuestos numéricos adicionales, Hilbert muestra al mismo tiempo que la suposición general que guía a la geometría analítica, i.e., la posibilidad de establecer una correspondencia entre los puntos de una línea y los números (reales), está realmente justificada. En suma, por medio de su cálculo para segmentos lineales, construido de un modo puramente geométrico, y sin apelar a ningún postulado de continuidad, Hilbert proporciona un fundamento axiomático que exhibe la existencia de conexiones estructurales entre la geometría euclídea y la geometría analítica, esto es, *construye un puente axiomático entre ambas geometrías.*

En segundo lugar, y en relación al punto *ii)*, la aritmética de segmentos responde a un objetivo central, que Hilbert enuncia claramente en sus notas de clases, en la aplicación del método axiomático formal a la geometría euclídea elemental, a saber: a la hora de ofrecer una fundamentación axiomática de la geometría, Hilbert considera esencial que se proceda de un modo autónomo o independiente, i.e., que en la presentación axiomática de la geometría no se utilicen conceptos y técnicas provenientes de otras teorías matemáticas, como por ejemplo, el análisis, el álgebra e incluso la mecánica. Más aún, la consecución de tal requisito permitía mostrar que la geometría, presentada por medio de un sistema de axiomas formales, podía ser considerada una *teoría auto–suficiente*. Este objetivo puede ser reconocido en diversos aspectos del abordaje de Hilbert a la geometría. Por ejemplo, el objetivo de presentar a la geometría como una teoría auto-suficiente se manifiesta en el tratamiento de la noción de congruencia por medio de un *conjunto de axiomas "abstractos"*, y por lo tanto, sin recurrir a la noción de movimiento. Sin embargo, en virtud de nuestro análisis en el capítulo 5, es claro que la aritmética de segmentos de Hilbert contribuía en gran medida a hacer de la geometría una teoría auto-suficiente, en el sentido anteriormente mencionado. Es decir, en primer lugar, Hilbert demuestra que muchos resultados importantes de la geometría podían ser alcanzados sin apelar a postulados de continuidad – o mejor, al axioma de Arquímedes –, y además, que estos principios de continuidad podían ser formulados de un modo puramente geométrico. La aritmética de segmentos es una contribución en este sentido, en tanto que imita el comportamiento de los números racionales de un modo puramente geométrico. Más aún, Hilbert utiliza este cálculo para elaborar una nueva teoría de las proporciones, que no necesita del axioma de Arquímedes, y que posee ahora un carácter puramente geométrico, a diferencia de la teoría de las proporciones del libro V de los *Elementos* de Euclides. Más aún, y para repetir, al mostrar que los segmentos lineales pueden conformar la base de cuerpo ordenado adecuado para llevar a cabo una coordenatización interna de la geometría, Hilbert muestra que la introducción de consideraciones numéricas no debe ser necesariamente realizada como una imposición desde fuera, sino que puede proceder de un modo interno. Ello equivale a afirmar que la geometría no necesita ser construida en ningún momento sobre una *variedad numérica*, una suposición muy común en el siglo XIX. En resumen, la construcción axiomática de una aritmética de segmentos lineales, además de ser un resultado matemático por sí mismo interesante, contribuyó a mostrar que la geometría podía ser considerada una teoría matemática auto–suficiente, un objetivo que Hilbert se traza claramente, como hemos podido mostrar, desde sus primeros trabajos consagrados a los fundamentos de la geometría.

Finalmente, un segundo objetivo de la segunda parte de la investigación fue utilizar las notas clases de Hilbert para precisar, por un lado, cómo concebía en este período las nociones metalógicas de consistencia, independencia y completitud de un sistema axiomático, y por otro lado, para determinar el lugar que estas propiedades ocuparon efectivamente en sus investigaciones geométricas. En el capítulo 6 hemos mostrado que, en esta etapa temprana, Hilbert se hallaba imposibilitado de ofrecer una caracterización rigurosa de estas propiedades metalógicas debido a importantes limitaciones conceptuales. En primer lugar, en este período Hilbert no tenía a su disposición una definición precisa de nociones centrales como deducción formal, deducibilidad y consecuencia lógica; en parte, ello se explicaba debido a que la lógica de subyacente de sus primeros sistemas axiomáticos para la geometría y la aritmética consistía en una teoría informal de conjuntos y funciones, y no en un sistema deductivo formal explícitamente formulado. En segundo lugar, y más importante aún, Hilbert tampoco contaba en esta etapa inicial con una distinción conceptual clara entre sintaxis y semántica, a pesar de que esta distinción estaba tácitamente presente en sus demostraciones de la independencia de algunos axiomas geométricos, basadas en la construcción de "modelos" aritméticos o analíticos. Estas limitaciones llevaron entonces a que las caracterizaciones de las propiedades lógicas de Hilbert no sólo no hayan sido rigurosas, sino que además haya caído en confusiones importantes. Por ejemplo, hemos visto que en estos trabajos axiomáticos iniciales, Hilbert se refiere, sin mayores distinciones y aclaraciones, a la noción metalógica de consistencia tanto en un sentido sintáctico como en un sentido semántico, o sea, como satisfacibilidad. Las mismas imprecisiones aparecen también en las caracterizaciones de las demás propiedades, i.e., independencia y completitud.

Ahora bien, en cuanto a la determinación del papel que estas propiedades desempeñaron en las investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría, sus notas de clases resultaron sumamente útiles. En primer lugar, hemos mostrado que, a diferencia de lo que se suele señalar, la consistencia del sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental no era algo que Hilbert consideraba *problemático*, en el sentido de que juzgaba que era imprescindible ofrecer con urgencia una *prueba de la consistencia* de dicho sistema. Por el contrario, y en oposición a su actitud para con el sistema axiomático para la aritmética, Hilbert no se planteó como un objetivo explícito probar la consistencia de su sistema axiomático para la geometría. En cambio, en *Fundamentos de la geometría* se limita a tratar la cuestión de manera muy superficial, señalando meramente que la geometría analítica construida sobre los números reales puede ser utilizada para demostrar la consistencia de sus axiomas para la geometría sintética.

Un lugar mucho más relevante lo ocupan, en cambio, sus investigaciones *metageométricas* en torno a la *independencia* de ciertos axiomas y a la imposibilidad de deducir algunos teoremas importantes de la geometría elemental, a partir de cierto conjunto acotado de axiomas. En efecto, hemos visto que, en sus notas de clases, Hilbert reconoce la notable importancia de estas investigaciones para su abordaje axiomático a la geometría, en parte debido a dos razones principales. Por un lado, las investigaciones de independencia constituyen el ámbito en donde se perciben más radicalmente las virtudes, desde un punto de vista matemático, de su nueva concepción formal del método axiomático. Más precisamente, Hilbert señala que la independencia de un axioma o un teorema podía ser demostrada por primera vez de un modo *sistemático y matemáticamente preciso*, gracias a las herramientas conceptuales que aportaba el método axiomático formal. En segundo lugar, las investigaciones en torno a la independencia ponían además de manifiesto un rasgo central que Hilbert vinculaba al método axiomático, a saber: su capacidad de convertirse en una herramienta sumamente fecunda para el descubrimiento de nuevos resultados matemáticos. Como hemos señalado, motivado por preguntas por la independencia de un axioma o un teorema, Hilbert presentó en *Fundamentos de la geometría* diversos modelos de nuevas geometrías – geometrías no–desarguianas, geometrías no–arquimedianas, etc. – que por sí mismas constituían resultados interesantes. Por último, esta importancia, atribuida por Hilbert a las investigaciones de independencia, puede ser percibida además cuando se analiza el tratamiento particular que los postulados de continuidad reciben en su abordaje axiomático a la geometría; especialmente, cuando se utilizan estas notas de clases para examinar las vicisitudes que rodearon a la inclusión de Hilbert del axioma de completitud, en su sistema de axiomas para la geometría elemental.

Según hemos analizado en el capítulo 6, Hilbert incorporó el axioma de completitud con el objetivo específico de garantizar, en su sistema de axiomas para la geometría euclídea elemental, la correspondencia uno–a–uno entre los puntos de una línea y los números reales, i.e, para garantizar la continuidad lineal. Una consecuencia inmediata de esta incorporación era que la geometría analítica sobre los números reales se convertía en el *único* ‘modelo’ (salvo isomorfismo) de su sistema de axiomas para la geometría. Asimismo, la característica fundamental que Hilbert destacaba del axioma de completitud era que permitía garantizar la continuidad lineal por medio de *dos axiomas independientes*, o en otras palabras, que permitía conservar al axioma de Arquímedes como un axioma separado e independiente. Ahora bien, hemos advertido que ésta no era la única función que desempeñaba el axioma de completitud. Por el contrario, este axioma era imprescindible para que *el sistema axiomático de Hilbert* logre capturar íntegramente el dominio de la geometría euclídea elemental, es decir, para que se cumpla el criterio de completitud 'pre–formal', que Hilbert impone en este período temprano para sus sistemas de axiomas. En efecto, si el axioma de completitud no era incluido, muchas construcciones muy básicas de la geometría euclídea – por ejemplo, las descriptas en las proposiciones I, 1 y I, 22 de los *Elementos* Euclides –, no podían ser llevadas a cabo sobre la base del sistema de axiomas original del *Festschrift* (Hilbert 1899).[74]

Luego, hemos visto que, por un lado, Hilbert conocía perfectamente estas limitaciones de su sistema axiomático, dado que las señala de un modo explícito en sus notas de clases para el curso de 1898/1899; por otro lado, disponía además de alternativas para solucionar este problema puntual, en tanto que previamente había utilizado en sus cursos distintos axiomas de continuidad que garantizaban la posibilidad de realizar estas construcciones. La opción adoptada en el primera edición del *Festschrift* fue, en cambio, privilegiar las investigaciones de independencia por sobre el criterio de completitud "pre–formal", por decirlo de alguna manera. Es decir, puesto que las alternativas disponibles para el axioma de completitud no permitían que el axioma de Arquímedes sea presentado como un axioma independiente, Hilbert decidió dejar "incompleto", en el sentido antes referido, a su sistema original de axiomas, para no obstaculizar las investigaciones de independencia que, en su opinión, arrojaban los resultados más interesantes y novedosos. Podemos concluir entonces que la importancia conferida a las investigaciones sobre la independencia de ciertos axiomas muestra claramente que, para Hilbert, el nuevo método axiomático formal no debía ser concebido *exclusivamente* como una herramienta eficaz para conseguir una presentación más rigurosa y perspicua de una teoría matemática – rasgo que por cierto Hilbert enfatiza constantemente – sino también como un poderoso instrumento para alcanzar nuevos descubrimientos y resultados matemáticos.

[74] Como hemos dicho, para solucionar este problema no se requiere un axioma que garantice el continuidad completa, sino que basta con un axioma de continuidad que postule la propiedad de intersección de dos círculos. Véase Hartshorne (2000).

Bibliografía

Abrusci, Vito Michele (1978). «Autofundazione della matematica. Le ricerche di Hilbert sui fondamenti della matematica». En: Vito Michele Abrusci (Ed.), *Ricerche sui Fondamenti Bernays, della Matematica by David Hilbert*, pp. 13–131. Bibliopolis, Napoles.

Andersen, Kirsti (2007). *The Geometry of an Art. The Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. Springer, London.

Arana, Andrew y Mancosu, Paolo (2012). «On the Relationship between plane and solid Geometry». *The Review of Symbolic Logic*, **5(2)**, pp. 294–353.

Avellone, Maurizio; Brigaglia, Aldo y Zappulla, Carmela (2002). «The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri». *Archive for History of Exact Sciences*, **56**, pp. 363–425.

Awodey, Steve y Reck, Erich (2002). «Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth–Century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic». *History and Philosophy of Logic*, **23**, pp. 1–30.

Baird, Davis y Hughes, R.I.G (Eds.) (1998). *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Baldus, Richard (1928a). «Zur Axiomatik der Geometrie I. Über Hilberts Vollständigkeitsaxiom». *Mathematische Annalen*, **100**, pp. 321–333.

—— (1928b). «Zur Axiomatik der Geometrie II. Vereinfachungen des Archimedischen und Cantorschen Axioms». *Atti del Congresso Internazionale die Mathematici, Bologna 3–10 Septembre 1928*, **4**, pp. 271–275.

—— (1930). «Zur Axiomatik der Geometrie III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom». *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, **5**, pp. 3–12.

Bernays, Paul (1922a). «Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik». *Die Naturwissenschaften*, **10**, pp. 93–99. English version in Bernays (1998).

—— (1922b). «Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **31**, pp. 10–19.

—— (1930). «The Philosophy of Mathematics and Hilbert's Proof Theory». En: Paolo Mancosu (Ed.), *From Brouwer to Hilbert*, pp. 234–265. Oxford University Press, Oxford.

—— (1935). «Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik». En: *David Hilbert gesammelte Abhandlungen*, pp. 196–216. Springer, Berlin.

—— (1942). «Review: Ein Unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie, by Max Steck». *The Journal of Symbolic Logic*, **7(2)**, pp. 42–43.

—— (1955). «Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome». *Mathematische Zeitschrift*, **63**, pp. 219–229.

—— (1967). «David Hilbert». En: P. Edwards (Ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*, volumen 3, pp. 496–504. Macmillan Publishing Co., New York. Segunda edición, D. Borchert (ed.), 2006, vol. 4, pp. 357–366.

Blanchette, Patricia (1996). «Frege and Hilbert on Consistency». *Journal of Philosophy*, **93(7)**, pp. 317–336.

Blumenthal, Otto (1922). «David Hilbert». *Die Naturwissenschaften*, **4**, pp. 67–72.

—— (1935). «Lebensgeschichte». En: *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, volumen 3, pp. 388–429. Springer-Verlag, Berlin.

Boniface, Jacqueline (2002). *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse.* Ellipses, Paris.

—— (2004). *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques.* Vrin, Paris.

Boos, William (1985). «'The True' in Gottlob Frege's 'Über die Grundlagen der Geometrie'». *Archive for History of Exact Sciences*, **34(1/2)**, pp. 141–192.

Bos, Henk (2001). *Redifining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer Verlag, New York.

Bottazzini, Umberto (2001a). «I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert». *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, **8(4-B)**, pp. 545–570.

—— (2001b). «I geometri italiani e il problema dei fondamenti (1889-1899)». *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, **8(4-A)**, pp. 281–329.

Bourbaki, Nicolas (1994). *Elements of the History of Mathematics.* Springer, Berlin.

Bourbaki, Nicolás (1962). «La arquitectura de las matemáticas». En: François Le Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, pp. 36–49. Eudeba, Buenos Aires.

Boyer (1957). *A History of Analytic Geometry.* Dover Publications, New York.

Brouwer, Luitzen E. J. (1927). «Intuitionist Reflections on Formalism». En: Paolo Mancosu (Ed.), *From Brouwer to Hilbert*, pp. 40–44. Oxford University Press, Oxford. 1998.

Bunnin, Nicholas y Yu, Jiyuan (2004). *The Blackwell Dictionary of Western Philosophy.* Blackwell, Cornwall.

Cantor, Georg (1872). «Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihe». *Mathematische Annalen*, **5**, pp. 123–132.

—— (1874). «Über eine Eingeschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **77**, pp. 258–262.

—— (1879/84). «Über unedliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten». En: Ernst Zermelo (Ed.), *Gesammelte Abhandlungen*, pp. 139–244. Springer, Berlin. 1932.

Carnap, Rudolf (1927). «Eigentliche und eigentliche Begriffe». *Symposion*, **1**, pp. 355–374.

Cassini, Alejandro (2007). *El juego de los principios.* A–Z Editora, Buenos Aires, 1ª edición.

Cerroni, Cinzia (2004). «Non–Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang». *Historia Mathematica*, **31**, pp. 320–336.

—— (2007). «The Contribution of Hilbert and Dehn to Non–Archimedean Geometries and their Impact on the Italian School». *Revue d'histoire des mathématiques*, **13**, pp. 259–299.

—— (2010). «Some models of geometries after Hilbert's Grundlagen». *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, **30**, pp. 47–66.

Chihara, Charles (2004). *A Structural Account of Mathematics*. Oxford University Press, New York.

Coffa, Alberto (1986). «From Geometry to Tolerance: Sources of Conventionalism in Nineteenth-Century Geometry». En: Robert Colodny (Ed.), *From quarks to quasars: philosophical problems of modern physics*, pp. 3–70. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh.

—— (1991). *The semanctic tradition from Kant to Carnap*. Cambridge University Press, Cambridge.

Contro, Walter (1976). «Von Pasch zu Hilbert». *Archive for History of Exact Sciences*, **15**, pp. 283–295.

Coolidge, Julian (1940). *A History of Geometrical Methods*. Clarendon Press, Oxford, 1ª edición.

Corry, Leo (1994). «La teoría de las proporciones de Eudoxio vista por Dedekind». *Mathesis*, **10**, pp. 35–68.

—— (1997). «David Hilbert and the Axiomatization of Physics». *Archive for History of Exact Sciences*, **51**, pp. 83–198.

—— (2000). «The empiricist roots in Hilbert's axiomatic method». En: Vincent Hendriks y Steg Pedersen (Eds.), *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, pp. 35–54. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

—— (2004a). *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*. Kluwer, Dordrecht.

—— (2004b). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birhäuser, Berlin, 2ª edición.

—— (2006). «Axiomatics, Empirism, and *Anschauung* in Hilbert's Conception of Geometry». En: José Ferreirós y Jeremy Gray (Eds.), *The Architecture of Modern Mathematics*, pp. 133–156. Oxford University Press, Oxford.

Courant, Richard y Robbins, Herbert (1979). *¿Qué es matemática?* Aguilar, Madrid, 5ª edición.

D'Agostino, Salvo (2000). *A History of the Ideas of Theoretical Physics. Essays on the Nineteenth and Twentieth Century Physics*. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Dedekind, Richard (1872). «Stetigkeit und irrationale Zahlen». En: *Gesammelte mathematische Werke*, volumen 3. Friedrich Vieweg & Sonn, Braunschweig. 1932. Versión en español de José Ferreirós, Alianza, Madrid, 1998.

—— (1888). «Was sind und was sollen die Zahlen?» En: *Gesammelte mathematische Werke*, volumen 3. Friedrich Vieweg & Sonn, Braunschweig. 1932. Versión en español de José Ferreirós, Alianza, Madrid, 1998.

Dehn, Max (1900). «Die Legendre'sche Sätze über die Winkelsumme im Dreieck». *Mathematische Annalen*, **53**, pp. 404–439.

Demopoulos, William (1994). «Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory». *History and Philosophy of Logic*, **15**, pp. 211–225.

Desargues, Girard (1987). *The Geometrical Work of Girard Desargues*. Springer, Berlin.

Detlefsen, Michael (1993a). «Hilbert's Formalism». *Hilbert, Revue Internationale de Philosophie*, **47**, pp. 285–304.

—— (1993b). «Hilbert's Work on the Foundations of Geometry in Relation to his Work on the Foundation of Arithmetic». *Acta Analytica*, **11**, pp. 27–39.

—— (1998). «Hilbert's Programme and Formalism». En: *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, volumen 4, pp. 231–238. Routledge, London and New York.

—— (2005). «Formalism». En: Stewart Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, pp. 236–317. Oxford University Press, New York.

Dieudonné, Jean (1971). «Modern Axiomatic Method and the Foundations of Mathematics». En: François Le Lionnais (Ed.), *Great Currents of Mathematical Thought*, volumen 2, pp. 251–266. Dover Publications, New York.

Efímov, N.V (1984). *Geometría superior*. Editorial Mir, Moscú.

Ehrlich, Philip (1995). «Hahn's *Über die Nichtarchimedischen Grössensysteme* and the Development of the Modern Theory of Magnitudes and Numbers to Measure Them». En: Jaakko Hintikka (Ed.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, pp. 165–214. Kluwer, Dordrecht.

—— (1997). «From Completeness to Archimedean Completeness». *Synthese*, **110**, pp. 57–76.

—— (2006). «The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes». *Archive for History of Exact Sciences*, **60**, pp. 1–121.

Enriques, Federigo (1907). «Prinzipien der Geometrie». En: W. Meyer y H. Mohrmann (Eds.), *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, volumen 3.1.1, pp. 6–126. Teubner, Leipzig.

Epple, Moritz (1994). «Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele. Ein Diskurs über die Natur der Mathematik». *Mathematische Semesterberichte*, **41**, pp. 113–133.

Ewald, William (1996). *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics*. volumen 2. Clarendon Press, Oxford.

Fano, Gino (1907). «Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert». En: W. Meyer y H. Mohrmann (Eds.), *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, volumen 3.1.1, pp. 221–388. Teubner, Leipzig.

Ferreirós, José (2006). «The Rise of Pure Mathematics as arithmetic with Gauss». En: N. Goldstein, C. & Schappacher (Ed.), *The Shaping of Arithmetic: Number Theory after Carl Friedrich Gauss's Disquistiones Arithmeticae*, pp. 235–268. Springer, Berlin.

—— (2007). *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Birhäuser, Berlin, 2ª edición.

—— (2009). «Hilbert, logicism, and mathematical existence». *Synthese*, **170**, pp. 33–70.

Franks, Curtis (2009). *The Autonomy of Mathematical Knowledge. Hilbert's Program Revisited*. Cambridge University Press, New York.

Frege, Gottlob (1892). «Über Sinn und Bedeutung». *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, **100**, pp. 25–50. Versión en español en Frege 1996, pp. 172–197.

—— (1903a). «Über die Grundlagen der Geometrie». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **12**, pp. 319–324, 368–375. Versión en español en Frege (1996), pp. 265-278.

—— (1903b). *Grundgesetze der Arithmetik*. volumen 2. Olms, Hildescheim.

—— (1906a). «Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **15**, pp. 586–592.

—— (1906b). «Über die Grundlagen der Geometrie». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **15**, pp. 296–309, 377–403, 423–430. Versión en español en Frege (1996), pp. 279–334.

—— (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Felix Meiner Verlag, Hamburg.

—— (1983). *Nachgelassene Schriften*. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2ª edición. H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach (eds.).

—— (1985). «Über Euklidische Geometrie». En: Hans Hermes; Friedrich Kambartel y Friedrich Kaulbach (Eds.), *Nachgelassene Schriften*, pp. 182–184. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2ª edición.

—— (1996). *Escritos filosóficos*. Crítica, Barcelona.

Frei, Günther (1985). *Die Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918)*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Freudenthal, Hans (1957). «Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Auflage von Hilberts 'Grundlagen der Geometrie'». *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **4**, pp. 105–142.

—— (1962). «The main trends in the foundations of geometry in the 19th century». En: Ernest Nagel (Ed.), *Logic, methodology, and philosophy of science*, pp. 613–621. Standford University Press, Stanford.

—— (1974). «The Impact of von Staudt's Foundations of Geometry». En: R. Cohen (Ed.), *For Dirk Struik*, pp. 189–200. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Friedman, Michael (1997). «Helmholtz's Zeichentheorie and Schlick's allgemeine Erkenntnislehre: Early logical empiricism and its nineteenth century background». *Philosophical Topics*, **25**, pp. 19–50.

Gabriel, Gottfried (1978). «Implizite Definitionen – Eine Verwechselungsgeschichte». *Annals of Science*, **35**, pp. 419–423.

Gandon, Sébastien (2005). «Pasch entre Klein et Peano: empirisme et idéalité en géométrie». *Dialogue: Canadian Philosophical Review*, **44(4)**, pp. 653–692.

Gauss, Carl Friedrich (1900). *Werke, Band VIII, Arithmetik und Algebra: Nachträge zu Band 1–3.* Teubner, Leipzig.

Gergonne, Jose Diez (1818). «Essai sur la théorie des definitions». *Annales de Mathématiques Pures et Appliqueés*, **9**, pp. 1–35.

Grassmann, Hermann (1844). *Die Lineale Ausdehnungslehre.* Teubner, Leipzig.

—— (1995). *A New Branch of Mathematics: The Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works.* Open Court, Chicago.

Gray, Jeremy (2006). *Worlds Out of Nothing. A Course in the History of Geometry in the 19th Century.* Springer, London.

—— (2008). *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics.* Princeton Univsersity Press, Princeton.

Greenberg, Marvin J. (1994). *Euclidean and Non–Euclidean Geometries.* W. H. Freeman and Company, New York, 3ª edición.

Guerrerro, Ana Berenice (2006). *Geometría. Desarrollo axiomático.* ECOE Ediciones, Bogotá.

Hahn, Hans (1907). «Über die nichtarchimedischen Grössensysteme». *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, **116**, pp. 601–655.

Hallett, Michael (1994). «Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought». En: Alexander George (Ed.), *Mathematics and Mind*, pp. 158–200. Oxford University Press, Oxford.

—— (1995a). «Hilbert and Logic». En: Mathieu Marion y Robert Cohen (Eds.), *Québec Studies in the Philosophy of Science*, volumen Part I: Logic, Mathematics, Physics and History of Science, pp. 135–187. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

—— (1995b). «Logic and Mathematical Existence». En: Lorenz Krüger (Ed.), *Physik, Philosophie und die Einheit der Wissenschaften*, pp. 33–82. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

—— (2008). «Reflections on the Purity of Method in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*». En: Paolo Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, pp. 198–255. Oxford University Press, New York.

—— (2010). «Frege and Hilbert». En: Michael Potter y Thomas Ricketts (Eds.), *The Cambridge Companion to Frege*, pp. 413–464. Cambridge University Press, New York.

—— (2012). «More on Frege and Hilbert». En: Mélanie Frappier; Dereik Brown y Robert DiSalle (Eds.), *Analysis and Interpretation in the Exact Sciences*, pp. 135–162. Springer, New York.

Hallett, Michael y Majer, Ulrich (Eds.) (2004). *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902.* Springer, Berlin.

Hankel, Hermann (1867). *Vorlesung über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* Voss.

Hartshorne, Robin (2000). *Geometry: Euclid and Beyond.* Springer, New York.

Health, Thomas L. (Ed.) (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary. 3 vols.* University Press, Cambridge. Versión en español: María Luisa Puertas Castaños, Madrid, Gredos, 1991.

Heck, Richard (1995). «Definition by induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*». En: William Demopoulos (Ed.), *Frege's Philosophy of Mathemtics*, pp. 295–333. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Heidelberger, Michael (1998). «From Helmholtz's Philosophy of Science to Hertz's Picture–Theory». En: Davis Baird y Robert Hughes (Eds.), *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*, pp. 9–24. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Heine, Eduard (1872). «Die Elemente der Functionenlehre». *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **74**, pp. 172–188.

Helmholtz, Hermann von (1867). *Handbuch der physiologischen Optik*. Voss, Leipzig. 3 vols.

—— (1977). «The Facts in Perception». En: Paul Hertz y Moritz Schlick (Eds.), *Epistemological Writings*, Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hertz, Heinrich (1894). *Die Prinzipien der Mechanik*. Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner), Leipzig.

—— (1999). *Die Constitution der Materie. Eine Vorlesung über die Grundlagen der Physik aus dem Jahre 1884*. Springer, Berlin.

Hertz, Paul (1934). «Sur les axiomes d'Archimède et de Cantor». *Archives des sciences physiques et naturelles*, **5(16)**, pp. 179–181.

Hilbert, David (1891a). «Projective Geometrie; (Vorlesung, SS 1891)». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1891b). «Über die Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück». *Mathematische Annalen*, **38**, pp. 459–460.

—— (1893). «Über die vollen Invariantensysteme». *Mathematische Annalen*, **42**, pp. 313–373.

—— (1893/4). «Analytische Geometrie des Raumes». Ms. Vorlesung WS 1893/94. Staats– und Universitätsbiblioteck Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 543.

—— (1894). «Die Grundlagen der Geometrie; (Vorlesung, SS 1894)». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1894/5). «Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes». Ms. Vorlesung WS 1894/95. Staats- und Universitätsbiblioteck Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 543.

—— (1895). «Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe». *Mathematische Annalen*, **46**, pp. 91–96.

—— (1896). «Über die Theorie der algebraischen Invarianten». En: *Gesammelte Abhandlungen*, volumen 2. Springer, Berlin. 1933.

—— (1897a). «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **4**, pp. 175–546.

—— (1897b). «Zahlbegriff und Quadratur des Kreises». Ms. Vorlesung WS 1897/8. Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 549.

—— (1898a). «Elemente der Euklidischen Geometrie». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1898b). «Grundlagen der Euklidischen Geometrie; (Vorlesung, WS 1898/1899)». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1898c). «Mechanik». Ms. Vorlesung WS 1898/9. Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 553.

—— (1899). «Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss–Weber Denkmals in Göttingen. Herausgegeben von dem Fest–Comitee». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1900a). *Les principes fondamentaux de la géometrie. Traduit par L. Laugel.* Gauthier–Villars, Paris.

—— (1900b). «Mathematische Probleme». En: *David Hilbert Gesammelte Abhandlungen*, volumen 3, pp. 290–329. Springer-Verlag, Berlin. 1935.

—— (1900c). «Über den Zahlbegriff». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **8**, pp. 180–184.

—— (1902a). «Über die Grundlagen der Geometrie». *Mathematische Annalen*, **56**, pp. 381–422.

—— (1902b). *The Foundations of Geometry.* The Open Court Publishing Company, Illinois. Trad. E.J. Townsend.

—— (1902c). «Grundlagen der Geometrie (Vorlesung; SS 1902)». En: Michael Hallett y Ulrich Majer (Eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Springer, Berlin. 2004.

—— (1903). *Grundlagen der Geometrie.* Teubner, Leipzig, 2ª edición.

—— (1905a). «Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik». En: A. Krazer (Ed.), *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker–Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, pp. 174–185. Teubner, Leipzig.

—— (1905b). «Logische Principien des mathematischen Denkens». Ms. Vorlesung SS 1905. Ausgearbeitet von E. HELLINGER, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen..

—— (1905c). «Logische Principien des mathematischen Denkens». Ms. Vorlesung SS 1905. Ausgearbeitet von M. BORN, Staats- und Universitätsbiblioteck Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 558a.

—— (1917). «Prinzipien der Mathematik». Ms. Vorlesung WS 1917/18. Ausgearbeitet von P. BERNAYS, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

—— (1918). «Axiomatisches Denken». *Mathematische Annalen*, **78**, pp. 405–415. Versión en español en (Hilbert 1993, pp. 23–35).

—— (1920/21). «Anschauuliche Geometrie». Ms. Vorlesung WS 1920/21. Ausgearbeitet von W. ROSEMANN, Staats- und Universitätsbiblioteck Göttingen. Cod. Ms. D. Hilbert 563.

—— (1921). «Grundlagen der Mathematik». Ms. Vorlesung WS 1921/22. Ausgearbeitet von P. BERNAYS, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

—— (1922). «Die logischen Grundlagen der Mathematik. Erste Mitteilung». *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **1**, pp. 157–177. Versión en español en (Hilbert 1993, pp. 37–62).

—— (1926). «Über das Unendliche». *Mathematische Annalen*, **95**, pp. 161–190. Versión en español en (Hilbert 1993, pp. 83-121).

—— (1927). «Grundlagen der Geometrie». Ms. Vorlesung SS 1927. Ausgearbeitet von A. SCHMIDT, Bibliothek des mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

—— (1930). *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 7ª edición.

—— (1992). *Natur und mathematisches Erkennen*. Birhäuser, Basel. Nach der Ausarbeitung von Paul Bernays.

—— (1993). *Fundamentos de la matemática*. UNAM. Trad. Luis Felipe Segura.

—— (1999). *Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays*. Teubner, Leipzig, 14ª edición. Herausgegeben und mit Anhängen versehen von Michael Toepell.

Hilbert, David y Ackermann, Wilhelm (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer, Berlin.

Hilbert, David y Bernays, Paul (1934). *Grundlagen der Mathematik*. volumen 1. Springer, Berlin. Segunda Edición, 1968.

Hilbert, David y Cohn-Vossen, Stephan (1996). *Anschauuliche Geometrie*. Springer, Berlin, 2ª edición.

Hintikka, Jaakko (1997). «Hilbert vindicated?» *Synthese*, **110**, pp. 15–36.

Huntington, Edward (1902). «A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude». *Transactions of the American Mathematical Society*, **3(2)**, pp. 264–279.

Hyder, David Jalal (2003). «Kantian Methaphysics and Hertzian Mechanics». En: Friedrich Stadler (Ed.), *The Vienna Circle and Logical Empirism: Re–evaluation and Future Perspectives*, pp. 35–46. Kluwer, Dordrecht.

Killing, Wilhelm (1885). *Die Nicht–Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*. Teubner, Leipzig.

Kirchhoff, Gustav (1877). *Vorlesung über Mathematische Physik. Mechanik*. Teubner, Leipzig, 2ª edición.

Kitcher, Philip (1976). «Hilbert's Epistemology». *Philosophy of Science*, **43**, pp. 99–115.

Klein, Felix (1871). «Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.» *Mathematische Annalen*, **4**, pp. 573–625. Reimpreso en Klein 1921, pp. 254-305.

—— (1873). «Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (zweiter Aufsatz)». *Mathematische Annalen*, **6**, pp. 112–145. Reimpreso en Klein 1921, pp. 311-343.

—— (1874). «Nachtrag zu dem « zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie »». *Mathematische Annalen*, **7**, pp. 531–537. Reimpreso en Klein 1921, pp. 344–350.

—— (1890). «Zur Nicht-Euklidische Geometrie». En: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, volumen 1, pp. 353–383. Springer, Berlin. 1921.

—— (1921). *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* volumen 1. Springer, Berlin.

—— (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Springer, Berlin. Versión en español: *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX*,Crítica, Barcelona, 2006. Trad. José Luis Aréntegui.

—— (1949). *Elementary Mathematics from and Advanced Point of View.* Dover Publications, New York.

—— (2004). *Elementary Mathematics from an advanced Standpoint. Geometry.* Dover Publications, New York.

Klev, Ansten (2011). «Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences». *The Review of Symbolic Logic*, **4(4)**, pp. 645–681.

Kline, Morris (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial, Madrid. 3 vols..

Kolmorogov, Alexander y Yuskevich, Alexander (Eds.) (1996). *Mathematics of the 19th Century.* Birkhäuser, Basel.

Köpke, Alfred (1887). «Über die Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen». *Mathematische Annalen*, **29**, pp. 123–140.

Korselt, Alwin (1903). «Über die *Grundlagen der Geometrie*». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **12**, pp. 402–407.

—— (1908). «Über die *Logik der Geometrie*». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **17**, pp. 98–124.

Kowol, Gerhard (2009). *Projektive Geometrie und Cayley–Klein Geometrien der Ebene.* Birhäuser, Berlin.

Lotze, Hermann (1879). *Metaphysik.* Hirzel, Leipzig.

Lützen, Jesper (2005). *Mechanistic Images in Geometric Form.* Oxford University Press, Oxford.

Majer, Ulrich (1995). «Geometry, Intuition and Experience: from Kant to Husserl». *Erkenntnis*, **42(2)**, pp. 261–285.

—— (1998). «Heinrich Hertz's Picture–Conception of Theories: its elaboration by Hilbert, Weyl, and Ramsey». En: D. Baird (Ed.), *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*, pp. 225–242. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

—— (2006). «The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry». En: Emily Carson y Ranate Huber (Eds.), *Intuition and the Axiomatic Method*, pp. 47–66. Kluwer, Dordrecht.

Mancosu, Paolo (1996). *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.* Oxford University Press, New York.

—— (1998). «Hilbert and Bernays on Metamathematics». En: Paolo Mancosu (Ed.), *From Brouwer to Hilbert*, pp. 149–188. Oxford University Press, New York.

—— (2003). «The Russellian Influence on Hilbert and his School». *Synthese*, **137**, pp. 59–101.

Marchisotto, Elena Anne y Smith, James T. (2007). *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic.* Birhäuser, Boston.

Möbius, August Ferdinand (1827). «Der barycentrische Calcul». En: *Gesammelte Werke*, volumen 1, pp. 1–138. J. A. Barth, Leipzig.

Mehrtens, Herbert (1990). *Moderne Sprache Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Minkowski, Hermann (1973). *Briefe an David Hilbert.* Springer, Berlin. Mit Beiträgen und herausgegeben von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus.

Moise, Edwin (1973). *Elementary Geometry from an advanced Standpoint.* Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2ª edición.

Moore, Eliakim Hastings (1902). «On the Projective Axioms of Geometry». *Transactions of the American Mathematical Society*, **3(1)**, pp. 142–158.

Moore, Gregory (1997). «Hilbert and the Emergence of Modern Mathematical Logic». *Theoria*, **12(1)**, pp. 65–90.

—— (2000). «Historians and Philosophers of Logic: Are They Compatible? The Bolzano–Weierstrass Theorem as a Case of Study». *History and Philosophy of Logic*, **20**, pp. 169–180.

Mueller, Ian (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's* Elements. volumen Massachusetts. MIT Press.

Nabonnand, Philip (2008a). «Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle». Manuscrito.

Nabonnand, Philippe (2008b). «La théorie des Würfe de von Staudt – Une irruption de l' algèbre dans la géométrie pure». *Archive for History of Exact Sciences*, **62**, pp. 201–242.

Nagel, Ernst (1939). «The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry». *Osiris*, **7**, pp. 142–223.

Pasch, Moritz (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Teubner, Leipzig. Traducción al español de J.G. Alvarez Ude y J. Rey Pastor, Madrid, Imprenta de Eduardo Arias, 1913.

—— (1926). *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Teubner, Leipzig, 2ª edición.

Passos Videira, Antonio (2011). «Kirchhoff e os fundamentos da mecânica». *Scientiae Studia*, **9(3)**, pp. 611–624.

Peckhaus, Volker (1990). *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Das Göttinger Modell interdisziplinärer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

—— (1994a). «Logic in transition: The logical calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)». En: Dag Prawitz y Dag Westerstahl (Eds.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala*, pp. 311–323. Kluwer, Dordrecht.

—— (1994b). «Hilbert's Axiomatic Programme and Philosophy». En: David E. Rowe y Edward Knobloch (Eds.), *The History of Modern Mathematics*, volumen 3, pp. 91–112. Academic Press, Boston.

—— (1995). «Hilberts Logik: Von der Axiomatik zur Beweistheorie». *Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften, Technik und Medizin*, **3**, pp. 65–86.

—— (2003). «The Pragmatism of Hilbert's Programme». *Synthese*, **137**, pp. 141–156.

Peckhaus, Volker y Kahle, Reinhard (2002). «Hilbert's Paradox». *Historia Mathematica*, **29**, pp. 157–175.

Petri, Birgit y Schappacher, Norbert (2006). «On Arithmetization». En: N. Goldstein, C. & Schappacher (Ed.), *The Shaping of Arithmetic: Number Theory after Carl Friedrich Gauss's Disquistiones Arithmeticae*, pp. 343–374. Springer, Berlin.

Pieri, Mario (1900). «Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto.» *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, **49**, pp. 173–222.

Poincaré, Henri (1902). «[Review]: Hilbert. Les Foundaments de la Géometrie». *Bulletin des sciences mathemátiques. Deuxième série*, **26**, pp. 249–272.

Poncelet, Jean Victor (1822). *Traité des propiétés projectives des figures.* Gauthier–Villars, Paris.

Reichenbach, Hans (1958). *The Philosophy of Space and Time.* Dover Publications, London.

Reid, Constance (1996). *Hilbert.* Springer, New York.

Resnik, Michael (1974). «The Frege-Hilbert Controversy». *Philosophy and Phenemenological Research*, **34(3)**, pp. 386–403.

—— (1980). *Frege and the Philosophy of Mathematics.* Cornell University Press, Ithaca, NY.

Reye, Theodor (1886). *Die Geometrie der Lage.* Baumgärtner, Leipzig, 3ª edición.

Ricketts, Thomas (2005). «Frege's 1906 Foray into metalogic». En: Michael Beaney y Erich Reck (Eds.), *Gottlob Frege. Critical Assessments of Leading Philosophers*, volumen 2, pp. 136–155. Routledge, New York.

Rowe, David (1989). «The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein». En: David ROWE (Ed.), *The History of Modern Mathematics*, volumen 1, pp. 209–273. Academic Press, Boston.

—— (1994). «The Philosophical Views of Klein and Hilbert». En: Sasaki Chikara; Sugiura Mitsuo y Joseph Dauben (Eds.), *The Intersectition of Institutional and Intellectual Issues*, pp. 187–202. Birhäuser, Basel.

—— (1997). «Perspectives on Hilbert». *Perspectives on Science*, **5(4)**, pp. 533–570.

—— (2000). «The Calm before the Storm: Hilbert's Early Views on the Foundations». En: Vincent Hendriks; Stig Pedersen y Klaus Jorgensen (Eds.), *Proof Theory. History and Philosophical Significance*, pp. 55–93. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

—— (2003). «From Königsberg to Göttingen: A Sketch of Hilbert's Early Career». *The Mathematical Intelligencer*, **25(2)**, pp. 44–50.

Scalan, Michael (1991). «Who were the American Postulate Theorists?» *The Journal of Symbolic Logic*, **56(3)**, pp. 981–1002.

—— (2003). «American Postulate Theorists and Alfred Tarski». *History and Philosophy of Logic*, **24**, pp. 307–325.

Schiemann, Gregor (1998). «The Loss of World in the Image: Origin and Development of the Concept of Image in the Thought of Hermann von Helmholtz and Heinrich Hertz». En: Davis Baird y Robert Hughes (Eds.), *Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher*, pp. 25–38. Kluwer Academic Press, Dordrecht.

Schlick, Moritz (1918). «Allgemeine Erkenntnislehre». En: Hans Wendel y Fynn Engler (Eds.), *Kritische Gesamtausgabe. Abteilung I, Band I*, Springer, Berlin. 2009.

Schlimm, Dirk (2010a). «Klein and Pasch on intuition and proofs (with an appendix containing the Pasch–Klein correspondence)».

—— (2010b). «Pasch's Philosophy of Mathematics». *The Review of Symbolic Logic*, **3(1)**, pp. 1–26.

Schmidt, Arnold (1931). «Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie». *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*, **5**, pp. 3–8.

Schoenflies, Arthur (1907). «Projektive Geometrie». En: W. Meyer y H. Mohrmann (Eds.), *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, volumen 3.1.1, pp. 389–480. Teubner, Leipzig.

Schur, Friedrich (1898). «Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie». *Mathematische Annalen*, **51**, pp. 401–409.

Scriba, Christoph y Schreiber, Peter (2010). *5000 Jahre Geometrie*. Springer, Berlin, 3ª edición.

Seidenberg, Abraham (2007). *Lectures in Projective Geometry*. Dover Publications, New York, 3ª edición.

Shapiro, Stewart (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press, New York.

—— (2000). *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*. Oxford University Press, Oxford.

—— (2005). «Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta–mathematics». *Philosophia Mathematica*, **13(3)**, pp. 61–77.

Sieg, Wilfried (1999). «Hilbert's Programs: 1917–1922». *Bulletin of Symbolic Logic*, **5(1)**, pp. 1–44.

—— (2009). «Hilbert's Proof Theory». En: Dov Gabbay y John Woods (Eds.), *Handbook of the History of Logic. Volume 5. Logic from Russell to Church*, pp. 321–384. Elsevier, Amsterdam.

Simons, Peter (2009). «Formalism». En: Andrew Irvine (Ed.), *Philosophy of Mathematics*, pp. 291–310. North–Holland, Amsterdam.

Smadja, Ivahn (2011). «Local axioms in disguise: Hilbert on Minkowski diagrams». *Synthese*. Online first.

Sommer, J. (1900). «[Review]: Hilbert's foundations of geometry». *Bulletin of the American Mathematical Society*, **6**, pp. 287–299.

Steiner, Jacob (1832). «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander». En: *Gesammelte Werke. Erster Band*, pp. 229–460. G. Reimer, Berlin. 1880.

Stroppel, Markus (1998). «Bemerkungen zur ersten nicht desarguesschen ebenen Geometrie bei Hilbert». *Journal of Geometry*, **63**, pp. 183–195.

—— (2011). «Early explicit examples of non–desarguesian plane geometries». *Journal of Geometry*, **102(1-2)**, pp. 179–188.

Tamari, Dov (2007). *Moritz Pasch (1843–1930). Vater der modernen Axiomatik. Seine Zeit mit Klein und Hilbert und seine Nachwelt. Eine Richtigstellung.* Shaker Verlag, Aachen.

Tappenden, Jamie (2000). «Frege on Axioms, Indirect Proof, and Independence Arguments in Geometry: Did Frege Reject Independence Arguments?» *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **41**, pp. 271–315.

Thomae, Johannes K. (1898). *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen.* Verlag von Louis Nebert, Halle, 2ª edición.

—— (1906). «Gedankenlose Denker». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung*, **15**, pp. 434–438.

Toepell, Michael (1985). «Zur Schlüsselrolle Friedrich Schurs bei der Entstehung von David Hilberts "Grundlagen der Geometrie"». En: M. Folkerts (Ed.), *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke*, pp. 637–649. Franz Steiner Verlag, Stuttgart.

—— (1986). *Über die Entstehung von David Hilberts Grundlagen der Geometrie.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

—— (1995). «Zum Einfluss Grassmanns auf die Grundlagen der Geometrie». En: *Hermann Grassmann: Werk und Wirkung: internationale Fachtagung anlässlich des 150. Jahrestages des ersten Erscheinens der "linealen Ausdehnungslehre", Lieschow/Rügen, 23.–28.5.1994.*, Ernst–Moritz–Arndt–Universität, Greifswald.

—— (1999). «Die Projective Geometrie als Forschungsgrundlage David Hilberts». En: *David Hilbert: Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays. 14. Auflage*, pp. 347–364. Teubner, Leipzig.

Torres, Carlos (2009). «De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo kantiano». *Diánoia*, **LIV(63)**, pp. 37–70.

Torretti, Roberto (1984). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Kluwer, Dordrecht.

Veblen, Oswald (1903). «Hilbert's Foundations of Geometry». *The Monist*, **13**, pp. 303–309.

—— (1904). «A System of Axioms for Geometry». *Transactions of the American Mathematical Society*, **5(3)**, pp. 343–384.

—— (1908). «A Set of Assumptions for Projective Geometry». *American Journal of Mathematics*, **30(4)**, pp. 347–380.

Voelke, Jean-Daniel (2008). «Le théorème fondamental de la géométrie projective: évolution de sa preuve entre 1847 et 1900». *Archive for History of Exact Sciences*, **62**, pp. 243–296.

Volkert, Klaus (1986). *Die Krise der Anschauung*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

von Neumann, John (1931). «Die formalistische Grundlegung der Mathematik». *Erkenntnis*, **2**, pp. 116–131.

von Plato, Jan (1997). «Formalization of Hilbert's Geometry of Incidence and Parallelism». *Synthese*, **110**, pp. 127–141.

von Staudt, Georg (1856). *Beiträge zur Geometrie der Lage, I*. Verlag von Bauer und Raspe, nürnbergª edición. 3.

—— (1857). *Beiträge zur Geometrie der Lage, II*. Verlag von Bauer und Raspe, nürnbergª edición.

—— (1860). *Beiträge zur Geometrie der Lage, IIII*. Verlag von Bauer und Raspe, nürnbergª edición.

von Staudt, Karl G. C (1847). *Geometrie der Lage*. Friedrich Kornische Buchhandlung, Nürnberg.

Wehmeier, Kai (1997). «Aspekte der Frege-Hilbert Korrespondenz». *History and Philosophy of Logic*, **18**, pp. 201–209.

Weir, Alan (2011). «Formalism in the Philosophy of Mathematics». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/formalism-mathematics/.

Weyl, Hermann (1925). «Die heutige Erkenntnislage in der Mathematk». *Symposion*, **1**, pp. 1–32. Versión en inglés en (Mancosu 1998, pp. 123-142).

—— (1944). «David Hilbert and his Mathematical Work». *Bulletin of the American Mathematical Society*, **50**, pp. 612–654.

—— (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton Univsersity Press, Princeton.

—— (1951). «A Half–Century of Mathematics». *The American Mathematical Monthly*, **58(8)**, pp. 523–553.

—— (1985). «Axiomatic versus Constructive Procedures in Mathematics». *The Mathematical Intelligencer*, **7**, pp. 10–17.

Wiener, Hermann (1891). «Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **1**, pp. 45–48.

—— (1893). «Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **3**, pp. 70–90.

Young, John Wesley (1911). *Lectures on Fundamental Concepts of Algebra and Geometry*. Macmillan Publishing Co., New York.

Zach, Richard (1999). «Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic». *Bulletin of Symbolic Logic*, **5(3)**, pp. 331–366.

Ziwet, Alexander (1892). «The Annual Meeting of German Mathematicians». *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1(2)**, pp. 96–102.