P

Verdad:

Deflacionismo, Referencia y Paradojas

Autor:
Picollo, Lavinia María

Tutor:
Barrio, Eduardo Alejandro

2015

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Doctor de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía.

Posgrado

Universidad de Buenos Aires

Tesis Doctoral

VERDAD
De acionismo, Referencia y Paradojas

Autora:
Lavinia Mar a Picollo

Director y Consejero de Estudios:
Dr Eduardo Alejandro Barrio

\In vino, possibly, \veritas", but in a sober symposium \verum"."

John L. Austin

Agradecimientos

Quisiera agradecer primero y principalmente a mi director y consejero de estudios Eduardo Barrio, sin el cual esta tesis no habr a sido de ninguna manera posible. Gracias a Eduardo comenc a trabajar sobre la nocion de verdad y hered de el las ideas de acionistas que ac de endo. Le agradezco no solo por su gran labor de supervision de todos mis escritos y su continuo apoyo sino tambien por su constante incentivo a la autosuperacion, por sus innumerables esfuerzos para ubicarme a m y a todos los inte-grantes del Buenos Aires Logic Group al nivel de los mejores investigadores del mundo en el area.

Para citar algunos ejemplos, desde el a~no 2010 Eduardo coordina el seminario Work in progress, en el cual aprend a dar charlas as como a escucharlas y realizar buenas intervenciones. Tambien ha establecido v nculos en la forma de proyectos de investigacion colaborativos con la Universidad de Oxford y el MCMP (Munich Center for Mathematical Philosophy), actualmente los mejores centros donde trabajar los temas que ocupan esta tesis. Esto me permitio realizar estancias cortas en ambos lugares durante el tiempo de mi doctorado, en las que aprend a adoptar nuevos puntos de vista, nuevas metodolog as, y las cuales modelaron y enriquecieron mis ideas de modo sustancial. Como tercer ejemplo, aunque podr a citar muchos otros, Eduardo se ha encargado de organizar numerosos talleres y conferencias e invitar una gran cantidad de losofos de todas las latitudes a exponer su trabajo frente al grupo. En otras palabras, me abrio las puertas a la comunidad logico- loso ca internacional.

Estoy especialmente en deuda con Volker Halbach, quien me ha recibido en la Universidad de Oxford e integrado al grupo de trabajo que dirige durante mi estad a en los meses de abril, mayo y junio de 2012. Fue una grata sorpresa enterarme a mi llegada de que ambos estabamos interesados en el concepto de referencia aplicado al lenguaje de la aritmetica y sus extensiones, y comenzando a trabajar en ello. Esto se tradujo en una serie de discusiones loso cas al respecto que han tenido una vasta in uencia en el trabajo sobre referencia que presento en esta tesis. Sin obligacion alguna, desde entonces Volker ha supervisado extrao cialmente todo mi trabajo, dandome consejos y devoluciones invaluables. Asimismo, me puso en contacto con muchos especialistas en los temas de esta tesis, con los cuales he tenido conversaciones fruct feras que impulsaron mi investigacion en la direccion actual.

Estoy sumamente agradecida con Hannes Leitgeb por recibirme en el MCMP en tres oportunidades diferentes, integrandome a su grupo de doctorandos, permitiendome participar de su seminario de trabajo en progreso, supervisandome durante mi estad a, manteniendo fruct feras discusiones loso cas, dandome valiosos consejos y apoyando mi aplicacion a diversas conferencias y escuelas de verano. Gracias a Hannes logre superar el estancamiento en el cual se encontraban mis investigaciones en torno a la referencia a mediados de 2013.

Un agradecimiento muy especial es para Thomas Schindler, quien no solo ha colaborado conmigo en la escritura del cap tulo 5 y en la prueba de la proposicion 3.37 sino que tambien hemos mantenido numeros simas discusiones que desembocaron en diversas ideas que ac desarrollo, en particular en torno al de acionismo y al minimalista acerca de la verdad. Tambien quisiera agradecerle el enorme apoyo que me brindo estos ultimos meses para poder completar la escritura de la tesis.

A lo largo de estos a~nos el Buenos Aires Logic Group ha sido una ayuda invaluable para la exploracion de distintos temas, produccion y discusion de ideas, tanto en el seminario Work in Progress como en el grupo de lectura y en las tantas ocasiones en las cuales he tenido la oportunidad de discutir ideas loso cas con sus integrantes. Les agradezco mucho a Natalia Buacar, Bruno Da Re, Juan Nascimbene, Federico Pai-los, Ariel Ro e, Lucas Rosenblatt, Mariela Rubin, Damian Szmuc, Diego Tajer, Paula Teijeiro y Joaqu n Toranzo. Quisiera agradecer tambien a los miembros del seminario Work in progress que no pertenecen a este grupo, esto es, Ramiro Caso, Miranda del Corral, Justina D az Legaspe y Nicolas Loguercio, por sus excelentes comentarios en las oportunidades que tuve de presentar mi trabajo ante ellos.

Agradezco tambien a los miembros de los grupos de logica de la Universidad de Oxford, del MCMP y del TiLPS (Tilburg Center for Logic, Ethics, and Philosophy of Science), por haber escuchado mis charlas sobre extractos en progreso de la tesis y por sus excelentes comentarios y objeciones, sin los cuales mi trabajo no ser a lo que es. En particular quisiera agradecer a Catrin Campbell-Moore, Johannes Stern y Martin Fischer por discutir puntos espec cos sobre la referencia conmigo y a Jonas Raab su lectura detallada de algunas partes de la tesis y sus utiles comentarios.

Estoy en deuda tambien con J.C. Beall, Filip Buekens, Cezary Cieslinski, Roy Cook, Je Ketland, ystein Linnebo, Agust n Rayo y Albert Visser por sus excelentes devoluciones sobre diferentes partes de la tesis, as como sus buenos consejos para el futuro de la investigacion.

He presentado mi trabajo en diversos eventos academicos, donde recib muy buenos comentarios que resultaron de suma utilidad para esta investigacion: charlas en las Universidades de Gante y Groningen; el 29th International Symposium Logica 2015 en Hejnice, Republica Checa; el II Congreso Internacional de la Sociedad Filoso ca del

Uruguay en Montevideo; el Logic Colloquium 2013 en Evora, Portugal; el First MCMP-Munich Buenos Aires Workshop en Munich, Alemania; el Buenos Aires-Oxford Research Project: Truth, Open-Endedness and Inexpressibility, el II Congreso Latinoamericano de Filosof a Anal tica, el Logic Workshop in Buenos Aires - A Tribute to Horacio Arlo-Costa y el Symposium on Yablo's Paradox, los cuatro en Buenos Aires; la Third New College Logic Meeting en Oxford, Reino Unido; y, por ultimo, el Segundo Coloquio de Jovenes Investigadores en Filosof a Anal tica en Buenos Aires. Mi profundo agradeci-miento a todos sus participantes.

Quisiera agradecer tambien a la Universidad de Buenos Aires, por haberme per-mitido realizar mis estudios doctorales y haber nanciado parte de mi viaje a Oxford; al Conicet por haber nanciado todos mis estudios doctorales y la parte restante de aquel viaje: al DAAD, el servicio aleman de intercambio academico, por haber cubierto por completo una de mis estancias de tres meses en el MCMP; y, por ultimo pero no menos importante, a Sadaf, por ser el lugar donde todas las reuniones del Buenos Aires Logic Group, las charlas de los invitados y muchos eventos academicos han tenido y siguen teniendo lugar.

Finalmente, quisiera agradecer a mi familia y, principalmente, a mi madre, cuyo apoyo incondicional y sin precedentes es mi sosten, la condicion de posibilidad de toda mi carrera.

Indice general

Introduccion

Alfred Tarski y la corriente de de acionista sacaron la verdad del ambito de la metaf sica para ubicarla en el ambito de la logica. Mientras que Tarski se encargo de despojarla de otros conceptos metaf sicos comunmente asociados (correspondencia, realidad, mundo, etc.) ofreciendo un abordaje puramente extensional, el de acionismo, impulsado por el trabajo de Tarski, la puso al nivel de una constante logica.

De acuerdo con Tarski, el predicado de verdad satisface el esquema

`A' es verdadera si y solo si A. (Esquema T)

donde A es cualquier oracion del lenguaje de cuyas expresiones se quiere predicar verdad y `A' un nombre para ella. En otras palabras, una oracion es verdadera siempre y cuando lo que dice es el caso. Y, a la inversa, cualquier predicado que satisfaga el Esquema T y se aplique exclusivamente a oraciones de un lenguaje sera un predicado de verdad para este lenguaje. En consecuencia, no parece haber necesidad de recurrir a conceptos metaf sicos para caracterizar el predicado veritativo.

Los de acionistas, por su parte, fueron los primeros en advertir expl citamente que en enunciados como

La equivalencia entre masa y energ a es verdadera. (1)

y

Todos los teoremas de la aritmetica son verdaderos. (2)

el predicado de verdad no agrega contenido conceptual alguno, no ocurre para adscribir una propiedad a la equivalencia entre masa y energ a o a los teoremas de la aritmetica porque, como nota Tarski, una oracion y su predicacion de verdad son siempre equi-valentes. Ocurre, en cambio, para permitir expresar precisamente aquello de lo cual se predica verdad, en estos casos la equivalencia y los teoremas, sin la necesidad de articu-larlo expl citamente, i.e., sin la necesidad de enunciar la letra expl cita de la equivalencia entre masa y energ a o de todos y cada uno de los teoremas de la aritmetica.

Si bien (1) puede tener un sentido diferente a \La energ a en reposo de un cuerpo es el producto de su masa por la velocidad de la luz al cuadrado," su contenido proposicional es ciertamente el mismo y, por ende, son intercambiables en contextos extensionales salva veritate. Del mismo modo, (2) no expresa mas que el contenido de todos y cada uno de los teoremas de la aritmetica a la vez, de su `conjuncion in nita'.

Expresar uno o varios enunciados sin articularlos puede resultar necesario no solo por razones retoricas (enfasis) o epistemicas (podr a no recordarse, por ejemplo, que establece la equivalencia entre masa y energ a) sino incluso puramente logicas: es imposible, al menos para los seres humanos, enunciar todos los teoremas de la aritmetica porque estos son in nitos; el predicado de verdad, en cambio, permite hacerlo mediante una unica expresion, (2).

El cuanti cador universal posibilita expresar in nitas oraciones a la vez siempre y cuando estas di eran en un termino. Por ejemplo, \Todos los seres humanos son mortales" puede verse como la expresion de todos los enunciados de la forma \m es mortal", donde m es el nombre de un ser humano. Pero si las oraciones no comparten su forma, como los teoremas de la aritmetica, el cuanti cador por s solo no puede expresarlas todas a la vez. Sin embargo, con la ayuda del predicado veritativo esto s es posible, porque predicar verdad de un enunciado no opera un cambio de contenido en el enunciado pero s un cambio sintactico; el enunciado, que originalmente estaba en posicion oracional, pasa a estar en posicion nominal, a ser un objeto en la oracion, sobre el cual los cuanti cadores s son capaces de cuanti car. (2) puede verse como la expresion de todos los enunciados de la forma \m es verdadero", donde m es el nombre de un teorema de la aritmetica. A su vez, estos enunciados expresan lo mismo que cada teorema, correspondientemente. Luego, los efectos de incorporar un predicado de verdad al lenguaje son comparables, al menos en este caso, a los de los cuanti cadores, a los de una constate logica.

Una de las tesis centrales del de acionismo es que la unica razon de ser del predicado de verdad es posibilitar la expresion de ciertos enunciados sin articularlos para, entre otras cosas, expresar `conjunciones in nitas', posicion a la cual adhiero y en favor de la cual argumento a lo largo de la tesis. Este rol logico-expresivo de la verdad, que, sostengo, es su rol mas importante aunque otros hayan sostenido posiciones diferentes, hace del predicado una cuestion logica; exhorta a la busqueda de logicas o teor as formales de la verdad que extiendan los sistemas actuales de logica para poder formular en ellas las teor as con las cuales se trabaja, v.g., la aritmetica, y bene ciarse as de estas bondades expresivas del predicado de verdad, esto es, la expresion de `nuevas conjunciones in nitas'. El objetivo central de esta tesis es averiguar que principios formales para el gobierno del predicado veritativo debe adoptarse para garantizar que el predicado pueda llevar a cabo este y sus otros roles expresivos, unica razon de su existencia.

La posicion mas popular al respecto sostiene que es necesario y su ciente adoptar formalizaciones del Esquema T o de sus versiones en forma de reglas, esto es, aquellas que permiten inferir A de \`A' es verdadera" y viceversa, para todas las oraciones del lenguaje en el cual se trabaja. No obstante, Tarski ha demostrado que si la logica subyacente es clasica, esto da lugar a paradojas semanticas (que involucran el predicado de verdad) y, por tanto, a trivialidad. La mas famosa de estas antinomias es la paradoja del mentiroso, cuya formulacion original es atribuida a Eubulides de Mileto, del siglo IV antes de Cristo. Surge al considerar la oracion:

(L) es falsa. (L)

L es conocida como la \`oracion del mentiroso'. En virtud del Esquema T, si se supone que es verdadera, se debe concluir que es falsa y viceversa, lo cual lleva a una contradiccion.

Por esta razon muchos teoricos de la verdad que buscan, como yo, principios que garanticen su rol expresivo, mayormente pero no necesariamente de acionistas, han op-tado por abandonar la logica clasica. En esta tesis de endo el camino contrario. Una elucidacion de que signi ca exactamente que expresiones como (2) expresen la \`conjun-cion in nita' de los enunciados de los cuales predican verdad dejar en claro que el Esquema T y principios semejantes no son ni necesarios ni su cientes para garantizar el rol logico-expresivo de la verdad. Aun mas, en contextos clasicos basta con adoptar la direccion de izquierda a derecha de los bicondicionales del Esquema T, esto es, el esquema

Si \`A' es verdadera, entonces A. (T Out)

para toda oracion A del lenguaje, que, a diferencia del Esquema T, no da lugar a con-tradicciones ceteris paribus. Consecuentemente, garantizar el rol expresivo de la verdad no es razon su ciente para adoptar logicas no clasicas.

Sin embargo, muchas instancias del Esquema T son correctas e inofensivas y puede resultar deseable, por razones de completitud o cuestiones practicas, contar tambien con ellas en una teor a clasica formal de la verdad. El problema yace en identi car cuales son estas instancias correctas, en dar criterios razonables de seleccion de instancias del Esquema T. En la literatura se han propuesto muchos criterios de seleccion, ninguno de los cuales ha resultado del todo satisfactorio, al menos desde un punto de vista de acionista. Estos son o bien demasiado restrictivos, es decir, dejan de lado muchas instancias intuitivamente correctas del Esquema T, o bien resultan arbitrarios, o bien demasiado complejos como para dar lugar a una teor a de la verdad cuyo proposito ultimo es hacer las veces de una logica, esto es, auxiliar al razonamiento.

Una estrategia prometedora e inexplorada consiste recurrir a la nocion de referencia. La idea de que las expresiones que llevan a paradojas semanticas comparten ciertos patrones referenciales `peligrosos' que son responsables por las contradicciones, que llamo `vision referencialista de las paradojas semanticas', es considerada conocimiento comun. Aun mas, la postura ortodoxa sostiene que, mas espec camente, estos patrones comunes se reducen a la autorreferencia, directa o indirecta, como en el caso de la oracion L del mentiroso. En cualquier caso, si la vision referencialista es acertada, es posible un criterio de restriccion de instancias del Esquema T basado en la nocion de referencia que resulte consistente, amplio y con poder explicativo. Asimismo, la referencia es prima facie una nocion de baja complejidad aritmetica, por estar basada, aunque sea parcialmente, en la sintaxis de las expresiones referentes, lo cual apunta a la posibilidad de un criterio relativamente simple de restriccion.

No obstante, el concepto de referencia que se necesita para dar cuenta de los patrones referenciales detras de las paradojas semanticas no es facil de caracterizar. Tampoco lo es la referencia para lenguajes formales en general. Lo evidencian los diversos intentos en la literatura pero, principalmente, el debate que se genero alrededor de la paradoja de Yablo. Estas di cultades han impedido hasta el momento veri car o refutar la vision referencialista y, a fortiori, su version ortodoxa que, por ende, han adquirido cierto estatus de leyenda.

Stephen Yablo introdujo una antinomia que declaro `no autorreferencial' para refutar la tesis referencialista ortodoxa, i.e., que todas las paradojas semanticas son autorreferenciales. La no autorreferencialidad de la paradoja de Yablo fue a su vez puesta en duda, suscitando un debate inextricable que culmino recien cuando Hannes Leitgeb advirtio que diversas nociones incompatibles y poco claras de autorreferencia estaban en juego en la discusion. Esto se tradujo en el `desaf o de Leitgeb' a encontrar una nocion adecuada y precisa de referencia aplicable a lenguajes formales de primer orden y, en particular, al lenguaje de la verdad (usualmente el lenguaje de la aritmetica de Peano de primer orden aumentado con un s mbolo de predicado monadico para la verdad), que permita clasi car las expresiones de estos lenguajes segun sus patrones de referencia. Co-mo se~nala Leitgeb, de no encontrar una nocion tal la autorreferencia debe ser eliminada del discurso cient co como un pseudo concepto.

En esta tesis supero el desaf o de Leitgeb, aunque dejo de lado su condicion de equivalencia, un requisito de extensionalidad de acuerdo con el cual dos oraciones logicamente equivalentes re eren a lo mismo, que, argumento, es inadecuado. En consecuencia, proporciono una serie de nociones de referencia hiperintensionales |i.e., que fallan la condicion de equivalencia| y adecuadas desde un punto de vista material para el len-guaje de la aritmetica de primer orden y para su extension con un predicado de verdad.

De acuerdo con los nuevos conceptos, la paradoja de Yablo no es autorreferencial pero s mal fundada, i.e., no bien fundada, (el grafo que la relacion de referencia genera lo es), por lo cual queda refutada la postura referencialista ortodoxa. Pero la vision referencialista general resulta verdadera: todas las expresiones que dan lugar a paradojas son mal fundadas, lo cual queda claro porque la teor a de la verdad que proporciono dada por instancias del Esquema T generadas por las oraciones bien fundadas es no solo consistente sino tambien correcta. Como la nocion de referencia a partir de la cual de no buena fundacion, as como los otros criterios de seleccion, es de caracter sintactico y, por ende, de baja complejidad aritmetica, la nocion de buena fundacion, a diferencia de los conceptos usuales de fundacion como los de Kripke o Leitgeb, es de nible en el lenguaje de la aritmetica y, en consecuencia, las teor as resultantes correspondientes son lo su cientemente sencillas como para ser empleadas como logicas, satisfaciendo uno de los requisitos mas importantes del de acionismo.

Adicionalmente, muestro que el criterio puede re narse, sin aumentar la complejidad: las antinomias comparten patrones de referencia mal fundados con ciertas caracter sticas espec cas, no cualquier mal fundacion es capaz de dar lugar a paradojas. Luego, introduzco teor as de la verdad mas abarcativas que aquella dada por instancias bien fundadas, para las cuales tambien pruebo correccion. En todos los casos, incluso cuando se emplea la buena fundacion como criterio de restriccion, las teor as tienen un gran poder de prueba, comparable con el de las mejores teor as a disposicion en la lite-ratura, lo cual indica que el criterio de seleccion es lo su cientemente amplio. Ademas, en virtud de la tesis referencialista, los criterios empleados son claramente explicativos, no arbitrarios.

La tesis consta de 8 cap tulos. El cap tulo 1 establece los preliminares tecnicos y la notacion para toda la investigacion posterior.

El capitulo 2 esta dedicado a la presentacion del trabajo de Tarski en torno a la verdad. En 2.1 introduzco las condiciones que Tarski ha impuesto sobre toda de nicion de verdad: la correccion formal y la adecuacion material. Mientras que la correccion formal (apartado 2.1.1) establece que la de nicion debe tomar la forma de una de nicion expl cita, la condicion de adecuacion material (apartado 2.1.2) presupone una distincion entre el lenguaje para el cual se quiere de nir verdad, el lenguaje objeto, y el lenguaje desde el cual se de ne verdad, el metalenguaje, y consiste en lo que Tarski denomina `Convencion T': a grandes rasgos, una de nicion de verdad dada en un metalenguaje debe implicar todas las instancias del Esquema T dadas por oraciones del lenguaje objeto, y el predicado de verdad solo puede aplicarse a estas ultimas. Por esta razon, se dice que las nociones tarskianas de verdad estan tipeadas o estrati cadas.

La seccion 2.2 introduce el metodo de Tarski para de nir verdad en 2.2.1 y luego expone en detalle los dos tipos de de nicion de verdad que da para lenguajes formales: una absoluta (apartado 2.2.2), en la cual las expresiones del lenguaje objeto tienen su signi cado usual, y otra relativa a una estructura (apartado 2.2.3), donde las expresiones del lenguaje objeto son interpretadas de acuerdo con esta estructura dada.

Finalmente, la seccion 2.3 se ocupa de las limitaciones del abordaje tarskiano y esboza ciertas soluciones posibles. En 2.3.1 presento una version formal general del teorema de la inde nibilidad de la verdad de Tarski (teorema 2.9), que, grosso modo, prohibe la identi cacion de lenguaje y metalenguaje en toda de nicion de verdad que se lleve a cabo en logica clasica, so pena de trivialidad, e introduzco el problema que presentan aquellos lenguajes y teor as que carecen de interpretacion `natural' o estandar en el marco de Tarski: aquellas que se encuentran `al nal de la jerarqu a' generada por la estrati cacion. En 2.3.2 considero entonces la posibilidad de extender la nocion de interpretacion para incluir estas interpretaciones `naturales', mientras que en 2.3.3 exploro la v a axiomatica, sugerida pero desestimada por el mismo Tarski. El metodo axiomatico introducido en este apartado se extendera a practicamente toda la tesis.

El cap tulo 3 introduce una serie de teor as de la verdad que pretenden trascender la estrati cacion tarskiana, la distincion entre lenguaje y metalenguaje, si caer en trivia-lidad, ya sea abandonando la logica clasica o adoptando unicamente instancias correctas e inofensivas de versiones formales del Esquema T, camino que tomo en esta tesis. Es-tas teor as son bien consideradas en la literatura y, al mismo tiempo, funcionales al hilo argumental de la tesis, en particular a los cap tulos 5, 6 y 8. En 3.1 presento las teor as semanticas de Punto Fijo de Saul Kripke, que abandonan la logica clasica en favor de logicas paracompletas, seguidas por dos axiomatizaciones posibles de una de las teor as en logica clasica. 3.2 esta dedicada a la exposicion de la nocion de dependencia de Leit-geb y la teor a semantica de la verdad que en base a ella Leitgeb construye. Esta es una teor a que, en lugar de abandonar la logica clasica, busca dar un criterio de seleccion explicativo para la restriccion del Esquema T, parte del objetivo de esta investigacion. En 3.3 presento una de las teor as axiomaticas clasicas mas reconocidas en la literatura, el sistema Friedman-Sheard. Finalmente, en 3.4 exploro tres abordajes que abandonan la logica clasica y adoptan logicas paraconsistentes en su lugar para poder dar teor as de verdad libre de tipos.

El cap tulo 4 es una reconstruccion racional de la postura de acionista con res-pecto a la verdad. Doy primero una breve historia de sus or genes, para luego examinar lo que, considero, es la tesis central del de acionismo, i.e., que el predicado de verdad existe en el lenguaje unicamente para llevar a cabo funciones expresivas comparables a las de las conectivas logicas usuales; principalmente, la expresion de `conjunciones in-nitas' como (2). Argumento que estas funciones logico-expresivas son posibles gracias a lo que llamo `funcion basica de la verdad' o `naturaleza desentrecomilladora', y doy una serie de ejemplos. En la seccion 4.3 sostengo que la funcion basica de la verdad es la naturaleza de este predicado, esto es, la verdad es simplemente un mecanismo de desentrecomillacion, y de endo que esta naturaleza o signi cado es expresable mediante el Esquema T o principios analogos frente a una serie de objeciones en los apartados 4.3.1-4.3.5.

El cap tulo 5 esta basado en un trabajo conjunto con Thomas Schindler, titulado \Disquotation and In nite Conjunctions" (cf. Picollo & Schindler (2015)). El objetivo es dar un conjunto de condiciones necesarias m nimas que toda teor a de la verdad de acio-nista |y, en general, toda teor a cuyo predicado sea capaz de llevar a cabo las funciones logicas que el de acionismo le adjudica| debe satisfacer, a la luz de la reconstruccion de esta posicion que ocupa el cap tulo anterior.

Tras dar ciertas condiciones generales, en 5.2 hago dos intentos por elucidar en que sentido expresiones como (2) son capaces de expresar la conjuncion in nita de todas las oraciones de las cuales predican verdad, en este caso la conjuncion in nita de todos los teoremas de la aritmetica, de los cuales el segundo es exitoso (apartado 5.2.2), para luego investigar que principios formales para regular el comportamiento del predicado veritativo en el marco de una teor a de la verdad |v.g., el Esquema T| son necesarios para garantizar esta capacidad expresiva. Pero la cuestion central, de la cual me ocupo en 5.2.3, es si acaso estos principios son necesarios y su cientes para garantizar el cumplimiento de las funciones logico-expresivas del predicado veritativo y, en caso negativo, cuales lo son.

Contrario a la opinion generalizada, muestro que, si bien el Esquema T u otros principios semejantes expresan la naturaleza de la verdad, en sus versiones formales no son ni necesarios ni su cientes para garantizar el rol expresivo de la verdad. Mientras que ciertos principios logicos clasicos resultan indispensables, principios que algunas teor as presentadas en el cap tulo 3 dejan de lado, junto con ellos la formalizacion de T Out es no solo necesaria sino tambien su ciente. Luego, examino posibles objeciones y las respondo positivamente. Siendo esta `mitad' del Esquema T consistente en logica clasica bajo condiciones normales, sostengo que las paradojas semanticas ya no son una razon para abandonar el terreno de la logica clasica.

Finalmente, en la seccion 5.3 listo las condiciones que toda teor a de acionista de la verdad debe satisfacer basandome en los resultados de las dos secciones anteriores y despues evaluo las teor as de la verdad introducidas en el cap tulo 3 a la luz de es-tos requisitos. Demuestro que muchas de estas teor as satisfacen versiones formales del

Esquema T o principios de verdad similares pero, no obstante, no logran garantizar las funciones logico-expresivas de su predicado de verdad, mientras que otras, sin satisfacer ningun principio de aquella ndole, s lo logran.

El cap tulo 6 expone las di cultades que toda nocion de referencia para un len-guaje formal de primer orden debe enfrentar y, de este modo, permite identi car las condiciones que una de nicion materialmente adecuada debe satisfacer necesariamente. En 6.1 hago una breve presentacion de la paradoja de Yablo, su formalizacion en el lenguaje de la verdad, su caracter paradojico y el debate en torno a su presunta no au-torreferencialidad, junto con las objeciones de Leitgeb a las nociones de autorreferencia, confusas e incoherentes, que estaban en juego en la discusion. En 6.2 expongo las condi-ciones que de acuerdo con Leitgeb toda nocion de referencia formal debe satisfacer, en particular su `condicion de equivalencia', junto con su mencionado desaf o a encontrar nociones precisas que capturen las intuiciones basicas alrededor de la referencia. 6.3 es un repaso sucinto de los intentos previos de Gilbert Ryle, Hilary Putnam, Nelson Goodman y Rafal Urbaniak de de nir referencia u otros conceptos cercanos, se~nalando sus aciertos y desaciertos a la luz de las condiciones de Leitgeb. Por ultimo, en 6.4 argumento en contra de la condicion de equivalencia de Leitgeb y, en general, a favor de la hiperin-tensionalidad de la referencia, de modo tal que queda claro nalmente que condiciones debe satisfacer una nocion adecuada de referencia para lenguajes formales.

El cap tulo 7 ofrece nociones de referencia para el lenguaje de la aritmetica de primer orden y el lenguaje de la verdad que satisfacen las condiciones enumeradas en el cap tulo anterior. En 7.1 doy una de nicion de referencia de oraciones del lenguaje de la aritmetica a numeros naturales, sus objetos primarios, mientras que en 7.2 doy una de nicion de referencia de oraciones a oraciones del mismo lenguaje, a traves de los numeros naturales que las codi can y, a partir de ella, doy de niciones de autorreferencia y buena fundacion. En ambos casos las nociones son semanticas, de nidas en funcion de la nocion de verdad en el modelo estandar de la aritmetica, y, en consecuencia, altamente complejas. Por otro lado, son hiperintensionales y materialmente adecuadas hasta donde las peculiaridades del lenguaje lo permiten, como ah ejempli co. La ultima nocion permite dar cuenta de la autorreferencialidad de las oraciones de G•odel y otros fenomenos, as como de la infundacion de las cadenas de oraciones, cada una de las cuales re ere a la que le sigue.

La seccion 7.3 se ocupa de de nir referencia de oraciones a oraciones del lenguaje de la verdad, la extension del lenguaje de la aritmetica con un s mbolo de predicado para expresar verdad, pero este es un tipo especial de referencia, una referencia que solo tiene en cuenta aquellas expresiones que caen bajo el alcance del predicado de verdad en una oracion, de la referencia a traves del predicado veritativo o, como la llamo, `referencia aletica'. Ofrezco dos nociones de referencia aletica, una semantica (apartado 7.3.1) y otra sintactica (apartado 7.3.2), ya no en funcion de la verdad en un modelo dado sino del predicado de prueba de la teor a en la cual se trabaja, y muestro que ambas dan vere-dictos intuitivamente correctos sobre ciertas expresiones paradojicas y otras patolog as. La paradoja de Yablo y sus formulaciones alternativas resultan no autorreferentes y, de este modo, queda refutada la version ortodoxa de la tesis referencialista acerca de las paradojas.

En el apartado 7.3.1 demuestro asimismo la inde nibilidad de la referencia aleti-ca semantica, resultado que puede extenderse facilmente a las nociones de referencia semanticas introducidas en las dos secciones previas, y ofrezco una axiomatizacion posi-ble por medio de un predicado primitivo. En 7.3.2, en cambio, muestro que la referencia aletica sintactica s es de nible en el lenguaje de la aritmetica, as como las nocio-nes derivadas de autorreferencia y buena fundacion aleticas sintacticas, a diferencia de los conceptos de fundacion de Kripke o Leitgeb. No obstante, se~nalo que las nociones sintacticas generan cierta estrati cacion que es preciso neutralizar mediante jerarqu as y la restriccion a oraciones con ciertas caracter sticas particulares.

En el ultimo cap tulo de la tesis, empleo la nocion de referencia aletica sintactica dada en el cap tulo anterior para la formulacion de criterios de seleccion de instancias de una version formal del Esquema T, dando lugar a una serie de teor as clasicas de la verdad. Tras ofrecer algunos resultados que serviran luego para establecer la consistencia de estos sistemas, en la seccion 8.2 exploro cuatro criterios posibles y las teor as de la verdad a las cuales dan lugar, correspondientemente.

A grandes rasgos, en 8.2.1 restrinjo el Esquema T a oraciones aleticamente bien fundadas y sus equivalentes, y pruebo que el sistema resultante es correcto y deductiva-mente tan poderoso como las mejores teor as de la verdad disponibles en la literatura, lo cual muestra que es bien abarcativo. Esto constituye una veri cacion de la vision re-ferencialista de las paradojas, de acuerdo con la cual estas comparten ciertos patrones referenciales que otras oraciones inofensivas no tienen: todas las oraciones paradojicas son infundadas, y no muchas expresiones infundadas son no paradojicas, porque pocas instancias inofensivas del Esquema T han quedado fuera.

En 8.2.2 y 8.2.3 muestro que el criterio de seleccion dado por la infundacion puede re narse al menos en dos direcciones: o bien admitiendo, ademas de las instancias bien fundadas, aquellas que no son autorreferenciales y re eren directamente solo a un numero nito de otras oraciones, o bien aquellas que no son autorreferenciales ni re eren a expresiones autorreferenciales y re eren directamente solo a un numero nito de otras oraciones, o sus equivalentes. En ambos casos muestro que las teor as son correctas y, por incluir las instancias bien fundadas, deductivamente poderosas.

Dado que las tres teor as introducidas hasta el momento son consistentemente extensibles con una version formal de T Out, que garantiza la capacidad de sus predicados de cumplir las funciones logico-expresivas de la verdad, y sus criterios de restriccion son explicativos, abarcativos y tan simples como de nibles en el lenguaje de la aritmetica de primer orden, sostengo que estas extensiones son buenas candidatas a teor a de acionista clasica de la verdad. En cambio, la teor a dada en 8.2.4, cuyas instancias del Esquema T estan restringidas unicamente a oraciones no autorreferentes, si bien es consistente, no es correcta y, por tanto, no es una buena teor a de acionista.

Finalmente, en el ultimo apartado de la tesis recapitulo los resultados obtenidos y extraigo algunas conclusiones.

Existen al menos cinco modos de leer esta tesis. Uno de ellos es hacerlo simplemente de corrido, pero es posible seguir otros caminos, segun los conocimientos e intereses que se tenga. Tengase en cuenta en cualquier caso que los cap tulos 1-3 son introductorios. Mientras que el primero puede resultar necesario para establecer algunas cuestiones de notacion, a menos que se est familiarizada con la notacion de Halbach, los cap tulos 2 y 3 son meramente expositivos; su lectura puede omitirse si ya se conoce su contenido. En ultima instancia, a lo largo del texto habr referencias a de niciones, teor as y resultados que aparecen en estos cap tulos, a los cuales podra volverse de ser necesario.

Aquellas personas que solo esten interesadas en lo escrito sobre verdad y no sobre referencia pueden saltear los apartados 6.1.2, 6.2-6.4 y 7.1-7.3.1. Aquellas, en cambio, que se interesen exclusivamente en las nociones de referencia pueden leer unicamente los cap tulos 1, 6 y 7. Si se esta interesado solo en lo que concierne a teor as formales de la verdad puede comenzase por los cap tulos 1-3 y pasar directamente al apartado 7.3.2 y al cap tulo 8. Finalmente, si el interes esta en lo escrito acerca del de acionismo, puede leerse unicamente los cap tulos 1-5.

1

Preliminares

En este cap tulo doy los preliminares tecnicos para toda la tesis y establezco cuestiones de notacion.

Para evitar formulaciones engorrosas muchas veces omito las comillas que marcan la mencion de una expresion para diferenciarla de su uso cuando se trata de una expresion perteneciente a un lenguaje formal.

Con frecuencia, abrevio expresiones castellanas como `si y solo si' o `siempre y cuando' mediante `sii' o el s mbolo `,', y `si . . . entonces . . . ' mediante `)', por cuestiones de simpleza y legibilidad.

1.1. Lenguajes y teor as de primer orden

En esta investigacion trabajo casi exclusivamente con lenguajes de primer orden. Un lenguaje de primer orden L es un conjunto recursivo de formulas construidas a partir de un vocabulario que contiene :, !; 8 y = como sus unicos s mbolos logicos, un stock in nito enumerable de variables de individuo x_1; x_2; : : : x_n; : : : , y los parentesis izquierdo y derecho como s mbolos auxiliares. Otros operadores logicos como ^, _, $ y 9 son de - nidos en funcion de :, ! y 8 como es usual. Ademas, L cuenta con un stock enumerable (nito o in nito) de constantes de individuo, una cantidad enumerable de s mbolos de funcion de cualquier aridad y una cantidad nita de s mbolos de relacion de cualquier aridad. Si bien esta ultima restriccion no es necesaria, es extremadamente conveniente en terminos de complejidad notacional.

Con frecuencia utilizo las letras x; y; z; : : : en lugar de x_1; x_2; x_3; : : : , por comodidad. Las nociones de termino, variable libre, variable ligada, formula, oracion, etc. son las usuales. Como metavariables empleo las letras v; u o v_1; v_2; v_3; : : : para variables de individuo, a; b; c; : : : o a_1; a_2; a_3; : : : para constantes de individuo, t; s o t_1; t_2; t_3; : : : para terminos en general, f; g; h; : : : para s mbolos de funcion, P; Q; R; : : : para s mbolos de relacion, '; ; ; ; ; : : : para formulas y ; ; ; ; : : : para conjuntos de oraciones del lenguaje. Muchas veces escribo '(v_0; : : : ; v_n) en lugar de ' para indicar que v_0; : : : ; v_n son las unicas variables libres en ' (y lo mismo para otras metaletras de formula y variables de individuo).

Sea '[t=s] la formula que resulta de reemplazar en ' todas las ocurrencias libres de s por t, esto es, o bien s es un termino cerrado, o bien contiene variables y se reemplazan unicamente las ocurrencias de s cuyas variables esten libres en '.

Un modelo M para L consta de un dominio jMj sobre el cual var an los cuanti - cadores del lenguaje y asigna un objeto ^{M} construido a partir de jMj a cada s mbolo no logico de L como su interpretacion, como es usual. M $_l$ ' indica que ' es verdadera de acuerdo con la interpretacion de L dada por M y la logica l. Cuando l es la logica clasica omito el sub ndice.

Una teor a axiomatica (o sistema formal) th formulada en L es un subconjunto recursivo de oraciones cerrado bajo los principios y reglas logicas de un calculo nitario o logica l. th `$_l$ ' indica que ' 2 th y que l es la logica subyacente. Si l es el calculo usual de la logica clasica, omito el sub ndice. Cuando no de lugar a confusion, omito tambien el cali cativo `axiomatica'.

De nicion 1.1 (Interpretaciones relativas). Sean th y th^0 dos teor as clasicas formuladas en lenguajes de primer orden L y L^0, respectivamente. th es relativamente interpretable en th^0 sii existe una funcion de traduccion : L ! L^0 tal que, para cualesquiera formulas '; de L (en adelante, '; 2 L)

- (:') = : ('),
- (' !) = (') ! ( ), y
- (8v') = 8v(! (')), para alguna formula 2 L^0; y

$$th ` ' ) th^0 ` ('):$$

1.2. La aritmetica de primer orden

1.2.1. Lenguaje y teor a

L_{pa} es el lenguaje de primer orden en el cual se formulan usualmente los axiomas de la aritmetica de Peano, pa. Cuenta unicamente con una constante de individuo 0 para el numero 0, un s mbolo monadico de funcion S para la funcion sucesor y dos s mbolos diadicos de funcion + y para la suma y la multiplicacion, respectivamente. El termino que consiste de n ocurrencias de S seguidas inmediatamente por 0 es el numeral de n, que noto n.

pa contiene los axiomas usuales para 0; S; + y , mas las in nitas instancias del axioma de induccion dadas por formulas de L_{pa}. La aritmetica de Robinson q es identica a pa sin el esquema de induccion.

Sea ! el conjunto de los numeros naturales. N es el modelo estandar de L_{pa}, donde

! = jNj y todos los s mbolos del vocabulario no logico de L_{pa} reciben su interpretacion pretendida.

De nicion 1.2 (!-consistencia). Una teor a th formulada en un lenguaje L que ex-tiende L_{pa} (en adelante, L L_{pa}) es !-inconsistente sii existe una formula '(v) 2 L tal que th ` '(n) para cada n 2 ! y, a la vez, th ` :8v'(v).

Luego, si th es !-inconsistente, ninguna extension de N a L es un modelo de th.

1.2.2. De nibilidad y representabilidad

Sea L L_{pa} y th una teor a formulada en L (en adelante, th L).

De nicion 1.3 (De nibilidad). Una formula '(v_1; : : : ; v_n) 2 L de ne una relacion R de aridad n sobre ! (en adelante, R $!^n$) sii

$$N \ '(k_1 \ ; : : : ; k_n) \ , hk_1; : : : ; k_n i \ 2 \ R:$$

De existir una formula ' tal para R, R es de nible en L.

Siendo los conjuntos o (la extension de las) propiedades relaciones de aridad 1 y las funciones un tipo especial de relacion, esta nocion se aplica tambien a conjuntos y a funciones.

De nicion 1.4 (Representabilidad debil). Una formula '(v_1; : : : ; v_n) 2 L representa debilmente una relacion R !^{n} en th sii

th ` '(k_1 ; : : : ; k_n) , hk_1; : : : ; k_ni 2 R:

De existir una formula ' tal, R es debilmente representable en th.

De nicion 1.5 (Representabilidad de relaciones). Una formula '(v_1; : : : ; v_n) 2 L representa una relacion R !^{n} en th sii

1. th ` '(k_1; : : : ; k_n) , hk_1; : : : ; k_ni 2 R; y
2. th ` :'(k_1 ; : : : ; k_n) , hk_1; : : : ; k_ni 2= R.

De existir una formula ' tal, R es representable en L.

Para la representabilidad de funciones suele reforzarse el segundo requisito.

De nicion 1.6 (Representabilidad de funciones). Una formula '(v_1; : : : ; v_n; v) 2 L representa una funcion n-adica f sobre ! (f : !^{n} ! !) en th sii

1. th ` '(k_1 ; : : : ; k_n; k) , f(k_1; : : : ; k_n) = k; y
2. th ` 8v_1 : : : v_n9v('(v_1; : : : ; v_n; v) ^ 8v_{n+1}('(v_1; : : : ; v_n; v_{n+1}) ! v_{n+1} = v)).

De existir una formula ' tal, f es representable en L.

El punto 2 de esta de nicion implica el punto dos de la de nicion 1.5, si f hace las veces de la relacion R.

Todos los subconjuntos recursivamente enumerables o semirecursivos de !^{n}, con n 2 !, son de nibles en L_{pa} y debilmente representables en q y, por tanto, en toda teor a que la contenga; v.g. pa. Adicionalmente, un conjunto o relacion es representable en q si y solo si es recursivo. Por ultimo, toda funcion primitiva recursiva (p.r.) es representable en q.[1] Por ejemplo, las relaciones `es menor que' y `es menor o igual que' entre numeros naturales son recursivas y, por tanto, de nibles en L_{pa} y representables en q mediante formulas u < v y u v, respectivamente.

[1]Vease George Boolos, John P. Burgess, & Richard C. Je rey (2007, caps 6 y 7) para una de nicion de las nociones de conjunto y funcion recursivos, y relaciones o conjuntos semirecursivos o recursivamente enumerables; vease Peter Smith (2007, cap. 9) para una exposicion detallada de las relaciones y funciones que q es capaz de representar, debilmente y simpliciter.

1.2.3. Codigos de G•odel y aritmetica como teor a de la sintaxis

Es posible codi car la sintaxis de cualquier lenguaje de primer orden L mediante numeros naturales llamados `codigos de G•odel', esto es, asignando a cada secuencia nita de s mbolos del vocabulario de L un y solo un numero natural. Luego, a traves de sus codigos, L_{pa} contiene un termino que denota cada una de las expresiones de L y puede, por tanto, hablar de ellas (cf. Boolos et al. (2007, cap. 15)). Si n es el codigo de una secuencia nita de s mbolos de L |que noto #( )| p q es el numeral de n, i.e., p q es un modo alternativo a n de notar el termino que se obtiene al anteponer n veces el s mbolo S al s mbolo 0. Asumo que el numero 0 no codi ca ningun s mbolo o secuencia de s mbolos de L, por cuestiones tecnicas.

Tambien es posible codi car secuencias nitas de numeros naturales o, si se quiere, codigos de expresiones de un lenguaje, mediante numeros naturales. Si la secuencia hk*1*; : : : ; k_ni 2 !^{n}, #(hk*1*; : : : ; k_ni) es su codigo. Por diversas razones que quedaran claras luego trabajo unicamente con codigos efectivos y monotonos. Un codigo de G•odel es efectivo si y solo si existe un algoritmo tal que, dado un numero natural, indica tras nito de pasos que objeto sintactico codi ca, si es que codi ca uno, y, viceversa, dado un objeto sintactico cualquiera devuelve su codigo en un numero nito de pasos. Una codi cacion es monotona si, cada vez que una secuencia de s mbolos ocurre propiamente en otra secuencia mas extensa, el codigo de la primera es menor que el de la segunda. Diferentes codi caciones pueden dar lugar a diferentes resultados, por lo cual es preciso ser cuidadosa. Bajo codi caciones no monotonas principios usualmente inofensivos se pueden tornar inconsistentes.[2]

A traves de sus codigos, L_{pa} y q pueden de nir y representar una serie propiedades, relaciones y funciones de los objetos codi cados. Sea L un lenguaje de primer orden y th L una teor a. En la siguiente tabla, las propiedades de secuencias o secuencias de secuencias de s mbolos de L a la derecha encuentran a su izquierda (variantes notacionales de) las formulas de L_{pa} que de nen los respectivos conjuntos de codigos de estas secuencias naturalmente.[3] Para evitar este discurso engorroso, en adelante cuando sea conveniente y claro identi co directamente las secuencias de s mbolos del lenguaje codi cado L con sus respectivos codigos. Asimismo, con frecuencia identi co tambien los conjuntos ; ; ; ; : : : de oraciones de un lenguaje con los conjuntos de sus codi-gos correspondientes. Como los conjuntos a la derecha de la tabla son recursivos, las formulas a la izquierda representan las propiedades a su derecha en q.

[2] ***Vease,*** v.g.***, Richard Jr Heck (2007) y Volker Halbach & Albert Visser (2014a,b).***

[3] ***Si bien no es demasiado preciso, por `natural' me re ero a una de nicion que formalice lo mas lealmente posible la de nicion informal que se tiene en mente. De niciones no naturales de ciertos conjuntos pueden arrojar resultados indeseables; vease Halbach & Visser (2014a,b)***.

$ClTerm_L(v)$:=	v es un termino cerrado de L
$Var(v)$:=	v es una variable de L de L
$At_L(v)$:=	v es una formula atomica
$Form_L(v)$:=	v es una formula de L
$Sent_L(v)$:=	v es una oracion de L de L
$Seq_L(v)$:=	v es una se secuencia de formulas
$SubForm_L(u; v)$:=	u es una subformula de v en L
$U_L(v_1; v_2; v_3)$:=	v_2 es una secuencia de variables de individuo y v_1 es una oracion de L que consta de la formula v_3 precedida por una secuencia de cuanti cadores universales sobre las variables en v_2 en ese orden
$Prf_{th}(u; v)$:=	u es una prueba de v en th

`V ar' no lleva sub ndice dado que todos los lenguajes de primer orden comparten las mismas variables de individuo. Cuando es lo su cientemente claro de que lenguaje se trata, omito el sub ndice `L'. 8t' es un modo abreviado de escribir $8v(ClTerm_L(v)$! ').

Cuanti cando existencialmente sobre u en $Prf_{th}(u; v)$ se obtiene una formula de L_{pa}, $9uPrf_{th}(u; v)$,[4] que representa debilmente el conjunto semirecursivo (pero no recursivo) de teoremas de th en q, y que usualmente se nota $Bew_{th}(v)$. Si $Prf_{th}(u; v)$ de ne la relacion `ser una prueba de' de modo natural, $Bew_{th}(v)$ satisface las condiciones de teoremicidad de L•ob (cf. Martin H. L•ob (1955)) para cualesquiera oraciones ' y del lenguaje de la teor a:

1. th ` ' ) th ` Bew_{th}(p'q)
2. th ` Bew_{th}(p' ! q) ! (Bew_{th}(p'q) ! Bew_{th}(p q))
3. th ` Bew_{th}(p'q) ! Bew_{th}(pBew_{th}(p'q)q)

Ademas, las funciones que toman como argumentos las entradas de la segunda columna y devuelven aquellas de la tercera en la siguiente tabla son todas p.r. y, por tanto, representables en q.[5] Sea R un s mbolo de relacion n-adico, $t_1; : : : ; t_n$; t; s terminos, v una variable y ; 2 L.

[4] ***Que, como* 9 *no es un s mbolo del lenguaje, es en realidad un modo abreviado de escribir*** :8v_1:Prf_{th}(v_1; v).

[5] Si estas funciones se aplican a argumentos que no responden a la forma indicada en la segunda columna, devuelven 0.

	h#(t_1); : : : ; #(t_n)i	#(Rt_1 : : : t_n)	R.(v_1; : : : ; v_n)
	#(')	#(:')	:.v
	h#('); #( )i	#(' !)	u!.v
	h#('); #(v)i	#(8v')	8.vu
	#('(v_1; : : : ; v_n))	n	free(v)
Sustitucion	h#('); #(t); #(s)i	#('[t=s])	v_1(v_2=v_3)
	h#('(~v)); #(hk~i)i	#('(k~))	~s.(u; v)
Diagonalizacion	#('(v))	#(8v(v = p'q ! '))	
Numeral	n	#(n)	num(v) o v̲
	#(hk_1; : : : ; k_ni)	n	lg(v)
	h#(hk_1; : : : ; k_ni); mi	k_m	$(u)_v$

Asimismo, si q th y L contiene exclusivamente s mbolos de funcion para funciones p.r. sobre ! de nidas en th de modo natural,[6] la funcion valor, que toma el codigo de un termino y devuelve su denotacion, tambien es representable en q.

Sera a menudo conveniente y algunas veces necesario contar con s mbolos de funcion para las funciones p.r. detalladas para la formulacion de axiomas y principios a lo largo de la tesis. Sea L^{+}_{pa} el resultado de expandir L_{pa} con un numero nito de s mbolos de funcion para funciones p.r. (a especi car), incluyendo aquellos que se encuentran en la columna de la derecha de la tabla anterior. La funcion diagonalizacion no tendra un s mbolo de funcion propio sino que es representada en q por la formula de L_{pa} que noto Diag(u; v), siguiendo la de nicion 1.6.

Por su parte, la funcion valor no puede tener un s mbolo de funcion que la represente, so pena de caer en contradicciones; solo puede ser representada en q por una formula '(u; v). No obstante, por comodidad escribo u = v en su lugar, aunque ` ' no sea un s mbolo de funcion del lenguaje.

Adopto dos s mbolos de funcion alternativos para la funcion numeral por cuestiones de legibilidad. Esta funcion suele utilizarse para cuanti car dentro de las comillas p:q de G•odel. Por ejemplo, si se quiere expresar que '(x) es demostrable en pa para todos los numeros, 8xBew$_{pa}$(p'(x)q) no sirve, porque las comillas de G•odel indican un numeral, un termino cerrado. Recurriendo a las funciones numeral y sustitucion es posible reintroducir la variable libre en p'(x)q y expresar lo que se quer a mediante la formula 8xBew$_{pa}$(p'q(x=pxq)), que suelen abreviarse como 8xBew$_{pa}$(p'(x)q), siguiendo la notacion dot de Feferman. Asimismo, expresiones como 8tBew$_{pa}$(p'(t.)q) son abreviaturas de 8tBew$_{pa}$(p'q(t=pvq)), donde v es la unica variable libre en ' y el punto debajo de t indica que t esta libre en la formula que sigue al cuanti cador.

[6] *Uno de los requisitos de naturalidad es que los de niens sean lo mas simple posibles en terminos de complejidad cuanti cacional, i.e., que sean $_0$ (vease el apartado 1.2.5).*

Sean q^{+} y pa^{+} la aritmetica de Robinson y la de Peano formuladas en L^{+}_{pa} con axiomas que de nen los nuevos s mbolos de funcion en terminos de (alguna de) las formulas que representaban naturalmente estas funciones en q. N^{+} es el modelo estandar de L^{+}_{pa}, que extiende N a todo el lenguaje. Nuevamente, $jN^{+}j$ = ! y todos los nuevos s mbolos de funcion L^{+}_{pa} reciben tambien su interpretacion pretendida.

1.2.4. El lenguaje de la verdad

Sea L_T el resultado de extender L^{+}_{pa} con un s mbolo de predicado monadico T para la verdad. L_T es el lenguaje de buena parte de las teor as formales de la verdad que juegan un rol en esta investigacion.

Sea pat la teor a que resulta de formular pa^{+} en L_T , incluyendo todas las instancias del esquema de axioma de induccion generadas por oraciones de L_T . Si !, hN^{+}; i es el modelo que resulta de extender N^{+} a todo L_T , asignando a T como su extension.

1.2.5. La jerarqu a aritmetica

Las formulas de L^{+}_{pa} se pueden clasi car de acuerdo con su complejidad cuanti cacional, dando lugar a una jerarqu a de conjuntos $_n$; $_n$ y $_n$ L^{+}_{pa} con n 2 ! conocida como \`jerarqu a aritmetica'. Si ' es logicamente equivalente a una formula que solo contiene cuanti cadores acotados,[7] ' pertenece tanto a $_0$ como a $_0$. Si ' es logicamente equivalente a una formula de la forma 8v_1 : : : v_n , donde 2 $_n$, entonces ' 2 $_{n+1}$. Si ' es logicamente equivalente a una formula de la forma :8v_1 : : : v_n , donde 2 $_n$, entonces ' 2 $_{n+1}$. Finalmente, si ' 2 $_n$ \ $_n$, ' 2 $_n$. Toda formula de L_{pa}^{+} es o bien $_n$ o bien $_n$ para algun n 2 !. Como es posible agregar cuanti cadores super uos a cualquier enunciado de L^{+}_{pa}, si ' es $_n$ o $_n$, tambien es $_m$ y $_m$ para cada m > n.

Una relacion sobre ! es de nible en L^{+}_{pa} mediante una formula $_0$ si y solo si es recursiva; mientras que es de nible mediante una formula $_1$ si y solo si es semirecursiva. En cambio, si es de nible exclusivamente mediante formulas $_n$ o $_{n+1}$ donde n > 0, la relacion no es siquiera semirecursiva. En consecuencia, q (q^{+}) prueba todas las oraciones $_1$ verdaderas en N (N^{+}). Este resultado se conoce como \`completitud $_1$' de q (q^{+}).

Por ejemplo, si la formula $Prf_{th}(u; v)$ del apartado 1.2.3 de ne la relacion de prueba en th de modo natural, $Prf_{th}(u; v)$ 2 $_0$, porque la relacion \`ser una prueba de'

[7] *I.e., todos los cuanti cadores 8v en estan seguidos por (v < t !) para algun termino t y una* formula .

es recursiva. $Bew_{th}(v)$, en cambio, es $_{1}$, porque se obtiene anteponiendo un cuanti - cador existencial a P $rf_{th}(u; v)$. Ademas, si th es consistente, $Bew_{th}(v)$ 2= $_{1}$, porque el conjunto de teoremas de th no es recursivo sino solo semirecursivo.

El lenguaje de la aritmetica de segundo orden, esto es, el resultado de extender L^{+}_{pa} con variables V que pueden ocupar la posicion de predicados y sus cuanti cado-res 8V correspondientes (cf. Stewart Shapiro (1991)), permite continuar la jerarqu a aritmetica, ahora llamada `jerarqu a anal tica', en la cual hay lugar tambien para las nuevas expresiones. Luego, en vez de un unico ndice, ahora las letras y estaran acompa~nadas por un sub ndice y un super ndice: $^{1}_{n}$ y $^{1}_{n}$. El super ndice se mantiene jo, es siempre 1; indica que se trata de una formula de primer orden, precedida por la cantidad de bloques de cuanti cadores de segundo orden que indica el sub ndice, que s var a, comenzando por el tipo de cuanti cador que indica la letra que se utiliza: esta por los cuanti cadores universales mientras que por los existenciales, o mejor dicho, por los universales precedidos por una negacion.

Al igual que antes, si una formula ' del lenguaje es logicamente equivalente a una formula que no contiene cuanti cadores de segundo orden o donde estos estan acotados,[8] ' pertenece tanto a $^{1}_{0}$ como a $^{1}_{0}$. Si ' es logicamente equivalente a una formula de la forma $8V_{1}$: : : V_{n} , donde 2 $^{1}_{n}$, entonces ' 2 $^{1}_{n+1}$. Si ' es logicamente equivalente a una formula de la forma $:8v_{1}$: : : v_{n} , donde 2 $^{1}_{n}$, entonces ' 2 $^{1}_{n+1}$. Finalmente, si ' 2 $^{1}_{n}$ \ $^{1}_{n}$, ' 2 $^{1}_{n}$. Toda formula es o bien $^{1}_{n}$ o bien $^{1}_{n}$ para algun n 2 !.

1.2.6. Lemas de diagonalizacion

Uno de los logros mas grandes de Kurt G•odel (1931) fue mostrar que la autorreferencia es posible en teor as formuladas en lenguajes formales como L_{pa} y sus extensiones de primer orden. Esto es lo que establecen los lemas diagonales, piezas claves en la prueba de sus resultados de incompletitud. Sea L L_{pa} un lenguaje de primer orden y th q una teor a formulada en L. Asumo una codi cacion de L en !. Si Sea ~v una abreviatura de v_{1}; : : : ; v_{n}.

Teorema 1.7 (Lema diagonal debil). Para toda formula '(v;~) 2 L existe una formula (~v) 2 L tal que

th ` (~v) \$ '(p (~v)q;~v)

Demostracion. Considerese la formula

8v(Diag(u; v) ! '(v;~)) (1.1)

[8] I.e., ***todos los cuanti cadores*** 8V ***en estan seguidos por*** (V X ! ***) para algun predicado o variable de predicado*** X ***y una formula .***

y su diagonalizacion

8u(u = p8v(Diag(u; v) ! '(v; ~v))q ! 8v(Diag(u; v) ! '(v; ~v))) (1.2)

Sea m el numeral del numero de G•odel de (1.2). Por las leyes de la identidad, esta formula es equivalente en th a

8v(Diag(p8v(Diag(u; v) ! '(v; ~v))q; v) ! '(v; ~v)) (1.3)

que, en virtud de que Diag(u; v) representa una funcion en q y, por ende, debe satisfacer la condicion 2 de la de nicion 1.6, es a su vez es equivalente en th a

'(m; ~v)

puesto que (1.3) a rma precisamente que la diagonalizacion de (1.1) |alias (1.2) o la denotacion de m| es un '. Luego,

th ` 8u(u = p8v(Diag(u; v) ! '(v; ~v))q ! 8v(Diag(u; v) ! '(v; ~v))) $ '(m; ~v)

□

Grosso modo, el teorema 1.7 establece que para cada predicado ' de L hay una formula del lenguaje que es equivalente en th a '(p q), que dice de que es un '.

Dado cualquier predicado '(v), el lema diagonal debil permite probar unicamente una equivalencia entre una formula y '(p q). Si el lenguaje contiene ciertos s mbolos de funcion adicionales, es tambien posible probar una identidad. Si se cuenta con un s mbolo de funcion para denotar la funcion sustitucion (a partir de la cual se puede de nir la funcion diagonalizacion), es posible reforzar el lema diagonal debil y obtener, para cada predicado ', una formula de la forma (y no meramente equivalente a) '(t) que contiene un termino que la denota a ella misma. Este resultado se conoce como `lema diagonal fuerte'. La posibilidad de obtener identidades en lugar de equivalencias sera crucial en los cap tulos posteriores de esta tesis, particularmente cuando se hable acerca de la referencia en extensiones de L_{pa}. Sea L L^{+}_{pa}. Nuevamente, asumo una codi cacion de L mediante numeros naturales.

Teorema 1.8 (Lema diagonal fuerte). Para toda formula '(v;~) 2 L existe un termino t de L^{+}_{pa} tal que

q^{+} ` t = p'(t;~v)q

Demostracion. Sea '(v(v=pvq);~v) el resultado de reemplazar v en ' por v(v=pvq). Como $v_1(v_2=v_3)$ representa la funcion sustitucion en q^{+}, q^{+} prueba que el termino p'(v(v=pvq);~v)q(p'(v(v=pvq);

en adelante, t, es identico a p'(p'(v(v=pvq); ~v)q(p'(v(v=pvq); ~v)q=pvq);

~v)q. Luego, q^{+} ` t = p'(t; ~v)q

□

Si la autorreferencia parec a una caracter stica dudosa de los lenguajes naturales, G•odel le devolvi toda su legitimidad al mostrar que es posible en el discurso matematico puro. No solo la autorreferencia directa es posible en el lenguaje de la aritmetica sino tambien ciertas formas de referencia indirecta, v.g., ciclos de oraciones, cada una de las cuales re ere a la que le sige en un c rculo. La existencia de ciclos es probable en q^{+} mediante lemas diagonales alternativos para cualesquiera formulas y cualquier longitud. Sea L como en el teorema anterior y ~u una abreviatura de u_1; : : : ; u_m.

Proposicion 1.9 (Ciclos de longitud 2). Para cualesquiera formulas '(v; ~v); (u; ~u) 2 L existen terminos t y s de L_{pa}^{+} tales que

q^{+} ` t = p'(s;~v)q

q^{+} ` s = p (t; ~u)q

Demostracion. Sea d.(v) := v(v; puq). Entonces,

$$q^{+} \text{ ` } d.(\underbrace{p\ (p'(d.(u);\sim v)q(u=puq);\ \sim u)q}_{s}) =$$

$$p\ (\underbrace{p'(d.(u);\sim v)q(num(p\ (p'(d.(u);\sim v)q(u=puq);\ \sim u)q)}_{t}=puq);\ \sim u)q$$

Luego,

q^{+} ` s = p (t; ~u)q

y

$$\begin{aligned} q^{+} \text{ ` } t &= p'(d.(u);\sim v)q(num(p\ (p'(d.(u);\sim v)q(u=puq);\ \sim u)q)=puq) \\ &= p'(d.(p\ (p'(d.(u);\sim v)q(u=puq);\ \sim u)q);\sim v)q \\ &= p'(s;\sim v)q \end{aligned}$$

□

La proposicion 1.9 establece la existencia de ciclos de longitud 2 para cualesquiera predicados. En general es posible probar la existencia de ciclos de longitud n para cualquier n 2 ! y formulas '$_1$; : : : ; '$_n$ de L con al menos una variable libre. Si para un ciclo de longitud n para las formulas '$_1$; : : : ; '$_n$ se diagonaliza sobre (v) |v.g., sobre (p'(d. (u);~v)q(u=puq); ~u) en el caso de ciclos de longitud 2|, para un ciclo de longitud n + 1 para las formulas '$_1$; : : : ; '$_{n+1}$ se aplica d. a '$_{n+1}$(p q(v=pvq);~v) donde v esta libre en '$_{n+1}$.

Por ejemplo, para formulas '$_1$; : : : ; '$_n$ con una unica variable libre v, comienza `desarrollandose'

$$\underbrace{d(p'_n(p'_{n-1}(: : : p'_1(dv)q(v=pvq) : : :)q(v=pvq))q)}_{t_n}$$

Proposicion 1.10 (Ciclos de longitud n). Para cualesquiera formulas '$_1$(v); : : : ; '$_n$(v) de L existen terminos t_1; : : : ; t_n de L^+_{pa} tales que

$$q^+ ` t_1 = p'_1(t_2)q$$

$$q^+ ` t_2 = p'_1(t_3)q$$

$$: : :$$

$$q^+ ` t_{n-1} = p'_{n-1}(t_n)q$$

$$q^+ ` t_n = p'_n(t_1)q$$

Este resultado puede generalizarse a formulas con cualquier numero de variables mayor o igual a 1, al igual que la proposicion que sigue.

Proposicion 1.11 (!-cadenas). Si '(v) 2 L, existe una secuencia de terminos diferentes t_i de L^+_{pa} con i 2 ! tales que

$$q^+ ` t_i = p'(t_{i+1})q$$

Demostracion. Sea g(v) := v (num(v (v=pvq))=pvq). Aplicada al codigo de un termino que denota (el codigo de) una formula ' 2 L con una variable libre v, g devuelve (el codigo de) '(p'(p'q)q). Luego, razonando en q^+,

$$\underbrace{g(num(p'(g(v))q))}_{t_0} = p'(\underbrace{g(num(p'(g(num(p'(g(v))q)))q))}_{t_1})q$$

y, por tanto,

$$q^+ ` t_0 = p'(t_1)q$$

Ademas,

t_1 = g(num(p'(g(num(p'(g(v))q)))q))

= p'(g(num(p'(g(num(p'(g(num(p'(g(num(p'(g(num(p'(g(v))q)))g)))q)))q)))q)))q

= '('t $_2$) {z $_{t_2}$ }

p q

y as siguiendo. Cada termino en la secuencia es el resultado de aplicar g(v) a alguna formula. Como la funcion representada por g(v) es monotonamente creciente, para cualesquiera i; j 2 !, si i < j, el valor de t_i resulta de aplicar g(v) a una formula mas corta que la que es el valor de t_j y bajo codi caciones monotonas las formulas mas cortas que estan formadas a partir de los mismos s mbolos que otras tienen codigos mas peque~nos, si i 6= j, t_i 6= t_j. □

No solo los ciclos de cualquier longitud son posibles en q^+ sino tambien las cadenas in nitamente descendientes. Naturalmente, tambien son posibles las cadenas in nitas hacia los dos lados, que pueden obtenerse a partir de las cadenas in nitamente descen-dientes, simplemente aplicando '(v) al primer termino t_0, obteniendo as un termino t_1 = p'(t_0)q, y luego aplicando '(v) a t_1, obteniendo un termino t_2, etc.

1.2.7. Resultados de incompletitud de G•odel

G•odel empleo un lema de diagonalizacion analogo a los presentados en el apartado 1.2.6 para probar sus famosos teoremas de incompletitud. La prueba del primer resultado es particularmente iluminadora para los propositos de esta tesis. Sea th q una teor a clasica formulada en un lenguaje de primer orden L L_{pa}.

Teorema 1.12 (G•odel. Primer resultado de incompletitud). Si th es consistente, existe una oracion $_{th}$ 2 L tal que th no prueba ni $_{th}$ ni : $_{th}$.

Demostracion. Aplicando el lema diagonal debil a :Bew_{th}(x), se obtiene una oracion $_{th}$ tal que

$$\text{th} \ ` \ _{th} \ \$ \ :Bew_{th}(p \ _{th}q) \tag{1.4}$$

Si th ` $_{th}$, como $Bew_{th}$ debilmente representa la teoremicidad de th en th, th ` Bew_{th}(p $_{th}$q), esto es, th ser a inconsistente en virtud de (1.4). Si, en cambio, th ` : $_{th}$, se tendr a, por un lado, que th ` Bew_{th}(p $_{th}$q) por (1.4) y, por otro, por la representacion debil, que th ` Bew_{th}(p: $_{th}$q), y th ser a inconsistente tambien.[9] □

[9]***Este resultado supone que Bew***$_{th}$ satisfaga las condiciones de teoremicidad de L•ob.

La oracion $_{th}$, conocida como `oracion de G•odel' de th, es frecuentemente des-cripta como una oracion que dice de s misma que no es demostrable en th, esto es, como una oracion autorreferente. En virtud de lo que sigue, dire que $_{th}$ es una oracion debil de G•odel de th.

Si se cuenta con su cientes s mbolos de funcion como para probar el lema dia-gonal fuerte, es posible, no solo una oracion equivalente a otra que dice de la primera que no es demostrable, sino una oracion identica a `otra' que dice de ella que no es demostrable. Sea ahora th q^{+} formulada en una extension L de L$^{+}_{pa}$. Aplicando el lema de diagonalizacion fuerte al predicado :Bew$_{th}$(x), se obtiene un termino g tal que

q^{+} ` g = p:Bew$_{th}$(g)q

para el cual es tambien posible probar que ni Bew$_{th}$(g) ni :Bew$_{th}$(g) son teoremas de th. :Bew$_{th}$(g) tambien es una oracion de G•odel de th, una oracion fuerte de G•odel, y de ella suele decirse con mas seguridad que es autorreferente.

Teorema 1.13 (G•odel. Segundo resultado de incompletitud). Si th q es una teor a consistente, no es capaz de probar su propia consistencia, esto es, th 0 :Bew$_{th}$(t) para ningun termino t del lenguaje de la teor a.

Corolario 1.14 (L•ob). Si th q es una teor a formulada en L L$_{pa}$, para cualquier oracion ' 2 L, si th ` Bew$_{th}$(p'q) ! ', entonces th ` '.

1.3. La teor a de conjuntos Zermelo-Fraenkel

L$_{zfc}$ es el lenguaje de la teor a de conjuntos de Zermelo-Fraenkel de primer orden con el axioma de eleccion (zfc).[10] Su vocabulario no logico esta dado por un s mbolo de relacion diadico primitivo 2 para la pertenencia entre conjuntos y un termino ? para el conjunto vac o, de nido en zfc en funcion de 2.

pa y, a fortiori, q son relativamente interpretables en zfc. Esto signi ca que zfc prueba la existencia de objetos isomor cos a los numeros naturales. Si bien existen diver-sas traducciones posibles que dan cuenta de la interpretabilidad relativa, la mas usual es la que `identi ca' cada numero natural con un cardinal de von Neumann |estos son ?, f?g, f?; f?gg, f?; f?g; f?; f?ggg, etc|(cf. Tarski, Andrzej Mostowski & Raphael M. Robinson (1953) y Enderton (1977, cap. 4)). ! es el conjunto de cardinales de Von Neu-mann que suele identi carse directamente con el conjunto de numeros naturales `real', que noto N .

[10] ***Herbert B. Enderton (1977), Yiannis Moschovakis (2006) y Azriel Levy (1979) contienen todo lo que cito sin prueba acerca de zfc.***

En consecuencia, L_{zfc} tambien es capaz de de nir y zfc de representar relaciones recursivas y funciones p.r. de alguna manera. Ademas, L_{zfc} puede codi car cualquier lenguaje de primer orden L dado, por ejemplo, a traves de los cardinales de von Neumann y de nir las nociones sintacticas |tanto conjuntos como funciones| de L, que zfc luego representar mediante formulas que notare igual que para el caso de q y pa. Sea L^{+}_{zfc} el resultado de extender L_{zfc} con los s mbolos de funcion de pa^{+} y zfc^{+} el resultado de incorporar a zfc axiomas para de nir estos s mbolos.

Sea $L^{+}{}_{zfc}{}^{u}$ el resultado de expandir L^{+}_{zfc} con un nuevo s mbolo monadico de predi-cado C y $zfc^{+}{}_{u}$ una teor a identica a zfc^{+} excepto que los cuanti cadores que ocurren en los axiomas y las de niciones estan relativizados a C. Por ejemplo, relativizar los cuanti cadores del axioma de extensionalidad

8x; y(8z(z 2 x $ z 2 y) ! x = y)

al predicado C da por resultado

8x; y(Cx ^ Cy ! (8z(z 2 x $ z 2 y) ! x = y))

A diferencia de zfc^{+}, esta teor a permite la incorporacion de urelementos al universo de discurso, i.e., objetos que no son conjuntos. Por ejemplo, es posible extender el lenguaje y la teor a para hablar de numeros naturales y conjuntos de numeros naturales propiamente dichos. Sea $L^{+}{}_{zfc}{}^{n}$ el resultado de extender $L^{+}{}_{zfc}{}^{u}$ con dos nuevas constantes de individuo 0 y N y tres s mbolos de funcion, S, + y , y sea $zfc^{+}{}_{n}$ el resultado de formular $zfc^{+}{}_{u}$ sobre este lenguaje e incorporar los siguientes axiomas:

- 8x(x 2 N ! :Cx) ^ CN
- 0 2 N ^ 8x 2 N (S(x) 6= 0 ^ (8y 2 N S(y) 6= x ! x = 0))
- 8x 2 N 9y 2 N S(x) = y
- 8z(8x(x 2 z ! :Cx) ^ Cz ^ 0 2 z ^ 8x 2 z(S(x) 6= 0 ^ (8y 2 zS(y) 6= x ! x = 0)) ^ 8x 2 z9y 2 zS(x) = y ! N z)

junto con de niciones recursivas de + y en terminos de 0 y S, como es usual.

El primer axioma indica que los elementos de N estan extentos de satisfacer los axiomas de zfc^{+}, mientras que N mismo no. El segundo establece que 0 es un miembro de N , que 0 no es una imagen de S y que es el unico con esta propiedad en N . De acuerdo con el tercer axioma de $zfc^{+}{}_{n}$, todos los miembros de N tienen una imagen en

N a traves de S. Por ultimo, el cuarto axioma a rma que N es el conjunto mas peque~no que satisface los tres anteriores. De este modo, es posible hablar del conjunto de numeros naturales N (no !, el de los cardinales de von Neumann) en el marco de la teor a de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

1.4. Notacion para ordinales

Los numeros ordinales, con los cuales asumo cierta familiaridad, son entidades conjun-tistas sobre las cuales se pueden realizar ciertas operaciones algebraicas (suma, exponen-ciacion, etc) (cf. Wolfram Pohlers (2009, cap. 3)). Los cardinales de von Neumann son los ordinales nitos y ! es el primer ordinal in nito. Sea On la clase de todos los ordinales cuya existencia es probada en zfc^{+}. Como metavariables sobre ordinales emplear las letras griegas ; ; ; ; : : : , a veces con sub ndices.

Ciertos segmentos iniciales contables X de On son codi cables mediante numeros naturales, esto es, es posible asignar recursivamente a cada ordinal en X un numero natural. Estos sistemas de codigos se conocen como notaciones para ordinales. El numeral de cada uno de estos numeros sirve luego como un nombre para el ordinal en L_{pa}: el lenguaje puede hablar de este modo tambien acerca de ordinales.

Teorema 1.15 (Cantor. Forma normal). Para todo 6= 0, existen unicos ordinales $_1$ $_n$ tales que = !^{1} + + !^{n} .

Codi cando el ordinal 0 con un numero natural cualquiera, es posible codi car nuevos ordinales = !^{1} + + !^{n} empleando la forma normal de Cantor, mediante el codigo de la secuencia de los codigos de $_1$; : : : ; $_n$. Para eso es necesario que $_1$; : : : ; $_n$ < . Esto no lleva demasiado lejos: solo para pocos ordinales > 0 existen $_1$; : : : ; $_n$ < tales que = !^{1} + + !^{n} , a saber, solo aquellos que se encuentran por debajo de $_0$, el l mite de los ordinales

$$1; !; !^{!}; !^{!^{!}}; !^{!^{!^{!}}}; : : :$$

Es posible obtener codigos para segmentos iniciales mas largos de ordinales me-diante la funcion de Veblen.

De nicion 1.16 (Funcion de Veblen). La funcion de Veblen en : On^{2} ! On es tal que, si ; son ordinales,

1. en(0;) = ! ;

2. en(+ 1;) = el -esimo ordinal tal que en(;) = ;

3. si es un ordinal l mite, en(;) = el -esimo ordinal tal que en(;) = para todo < .

Esta es una de nicion de la funcion de Veblen por induccion trans nita. Dado un ordinal , en(;) es el -esimo punto jo de la funcion monadica en(; x). Por ejemplo, en(0; 0) = 1, en(0; 1) = ! y en(1; 0) es el primer ordinal tal que en(0;) = , esto es, el primer punto jo de en(0; x), $_0$.

Algunos ordinales $_0$ son constructibles mediante la funcion de Veblen, esto es, existen ; < tales que en(;) = . Luego, si se codi can los ordinales menores a $_0$ con la notacion anterior, dada por la forma normal de Cantor, la funcion de Veblen ofrece codigos para nuevos ordinales = en(;) $_0$ si ; < . Lamentablemente, no todos los segmentos contables de ordinales pueden obtenerse de este modo tampoco.

De nicion 1.17 (Ordinal de Feferman-Sch•utte). El ordinal $_0$ de Feferman-Sch•utte es el menor ordinal > 0 tal que, para cualesquiera ; < , en(;) < .

Todo ordinal menor a $_0$ puede codi carse mediante un numero natural unico de modo recursivo y, por ende, para cada < $_0$ existe en L_{pa} un termino que denota el codigo de . Asumo una unica notacion ordinal de aqu en mas, en la cual el ordinal 0 es codi cado por el numero 0. Sean Ord(v) y v_1 v_2 las formulas de L_{pa} que de nen, respectivamente, el conjunto de codigos de ordinales menores a $_0$ y la relacion de menor entre estos ordinales bajo esta codi cacion. Tambien es posible desarrollar sistemas de notacion mas abarcativos, para segmentos de ordinales mas extensos que $_0$, pero no es necesario para los propositos de esta investigacion.

Sea 8 ' para cualquier variable de ordinal un modo abreviado de escribir 8v(Ord(v) ! ') en L_{pa} y sus extensiones. pa (pa^+) solo es capaz de probar una version acotada del principio de induccion trans nita o, equivalentemente, buen orden,

8 (8 '( ) ! '( )) ! 8 '( )

para cada ' 2 L_{pa} (L^+_{pa}), para ordinales menores a $_0$. Esto es,

pa ` 8 (8'( ) ! '( )) ! 8'( ) (IT)

si < $_0$. El menor ordinal a partir del cual una teor a no es capaz de probar instancias del principio de induccion trans nita se conoce como su `ordinal prueba-teorico'. El ordinal prueba-teorico de pa (pa^+) es $_0$, si bien hay codi caciones al menos hasta $_0$. Como consecuencia, en pa (pa^+) no siempre es posible probar ciertas propiedades basicas acerca de los ordinales mas all de $_0$. V.g., los predicados Ord(v) y v_1 v_2 de L_{pa} solo representan los conjuntos que de nen para ordinales menores a $_0$.

2

Tarski o la verdad tipeada

\If I had to name the theory, I would call it the \Look No Semantics! Conception of Truth"."

{ Hilary Putnam, `A Comparison of Something with Something Else'

La nocion de verdad, junto con otros conceptos llamados `semanticos', hab a ca do en considerable descredito hacia comienzos del siglo XX. Matematicos y loso-fos anal ticos |el c rculo de Viena en primer lugar, por sus consideraciones empiristas y anti-metaf sicas| prefer an evitar el uso de la palabra `verdad', debido a las di cultades que enfrentaban los multiples intentos de de nirla y a las conocidas antinomias a las cuales da lugar.

No obstante, la nocion de verdad era empleada informalmente como hoy, no solo en el discurso cotidiano, sino tambien en el loso co y en el discurso de la logica matemati-ca, area de especializacion de Tarski, para hablar de modelos de teor as, consistencia, satisfacibilidad y categoricidad, entre otros, ya desde el siglo XIX. Su uso parec a ser esencial y constitu a por tanto una amenaza para la consistencia y precision de cualquier disciplina que la involucrara.

Tarski fue el primero en buscar dar nociones formales de verdad que superasen estas di cultades, que dieran lugar a conceptos claros y libres de inconsistencias. Impuso primero dos condiciones sobre toda de nicion de verdad, una de correccion formal y otra de adecuacion material, que expongo en la seccion 2.1 de este cap tulo. La seccion 2.2 da una introduccion general al metodo tarskiano y presenta los dos tipos de de nicion de verdad que Tarski introdujo: verdad absoluta y verdad relativa. En 2.2.2 ilustro el metodo tarskiano para de nir verdad absoluta, esto es, para lenguajes formales interpretados, que introdujo Tarski en (1933), aplicandolo al lenguaje de la aritmetica de primer orden.

En 2.2.3 presento la de nicion tarskiana de verdad para oraciones de un lenguaje formal no interpretado relativa a un modelo, estructura o interpretacion cualquiera del lenguaje, que Tarski introdujo en (1952), y en (1956) junto a Robert L. Vaught.

Las de niciones tarskianas enfrentan conocidas limitaciones, principalmente la falta de universalidad. En 2.3, el ultimo apartado del cap tulo, las se~nalo e indico dos maneras posibles de superar algunas de las di cultades que estas limitaciones conllevan mediante jerarqu as, sin apartarme del esp ritu tarskiano.

2.1. Criterios para una de nicion de verdad

El desaf o que Tarski se impuso fue legitimar la nocion de verdad y otros conceptos semanticos ante las comunidades matematica y loso ca; mostrar que es posible superar no solo las di cultades conceptuales sino logicas que la verdad tra a consigo.

> For a long time the semantical concepts have had an evil reputation among specialists in the study of language. They have resisted all attempts to de ne their meaning exactly, and the properties of these concepts, apparently so clear in their content, have led to paradoxes and antinomies. (Tarski, 1933, p. 252)

Este desaf o tom la forma de dos condiciones que, desde el punto de vista de Tarski, toda de nicion de verdad debe satisfacer. Las presento a continuacion, en los dos apartados que siguen, respectivamente. La primera concierne a la forma de la de - nicion. La segunda re ere a la correccion de la de nicion, es un requisito de adecuacion material, que responde a ciertos rasgos asignados usualmente al concepto de verdad y, de acuerdo con Tarski, hace de la de nicion una de nicion semantica, que respeta la intuicion correspondentista.

2.1.1. Correccion formal

De acuerdo con Tarski (1933, 1944), una de nicion formalmente correcta de verdad debe tomar la siguiente forma:

Para toda oracion x, x es verdadera si y solo si P (x): (EXP) donde P es un predicado posiblemente complejo expresado en terminos de nociones mas sencillas y bien entendidas, para las cuales se cuenta con formulaciones precisas (esto es, ni la expresion `es verdadera', ni otras expresiones sinonimas o igual o mas oscuras ocurren en P ), o bien ser equivalente a una de nicion de la forma de (EXP), y esta equi-valencia debe ser demostrable empleando principios que no contengan la expresion `es verdadera', ni otras expresiones sinonimas o igual o mas oscuras. En palabras mas sen-cillas, lo que Tarski pide es una de nicion expl cita del predicado de verdad en terminos no semanticos.

> For, if this postulate is satis ed, the de nition of truth [. . .] will explain the meaning of the term being de ned in terms whose meaning appears to be completely clear and unequivocal. And, moreover, me have then a kind of guarantee that the use of semantic concepts mill not involve us in any contradictions. (Tarski, 1944, p. 351)

Una de nicion expl cita del predicado veritativo permitir a eliminarlo, esto es, reemplazarlo por una formula dada en terminos claros, que no engendren contradiccio-nes. De este modo, se obtendr a una prueba automatica de la consistencia del concepto de nido. A diferencia de los abordajes clasicos de la verdad, como la corriente corres-pondentista, Tarski no busca que (EXP) je la intension del predicado de verdad, el signi cado de este concepto, sino meramente la extension.

2.1.2. Adecuacion material

Tarski baso su investigacion en torno a la verdad sobre sus intuiciones correspondentistas o, como el las llama, semanticas.

> Amongst the manifold e orts which the construction of a correct de nition of truth for the sentences of colloquial language has called forth, perhaps the most natural is the search for a semantical de nition. By this I mean a de nition which we can express in the following words:
>
> a true sentence is one which says that the state of a airs is so and so, and the state of a airs indeed is so and so.
>
> From the point of view of formal correctness, clarity, and freedom from am-biguity of the expressions occurring in it, the above formulation obviously leaves much to be desired. Nevertheless its intuitive meaning and general intention seem to be quite clear and intelligible. To make this intention more de nite, and to give it a correct form, is precisely the task of a semantical de nition. (Tarski, 1933, p. 155, sus italicas)

Desde este punto de vista, lo semantico es aquello que, de alguna manera, relaciona signi cantes con sus signi cados, el lenguaje con el mundo.[1]

La condicion de adecuacion material que Tarski impone sobre toda de nicion de verdad esta para garantizar que el predicado adquiera la extension adecuada, que respete la intencion correspondentista; que los objetos que resulten verdaderos de acuerdo con la de nicion sean precisamente aquellos que intuitivamente lo son. Comienza por considerar los siguientes dos principios:

(1) Todos los enunciados de la forma

`A' es verdadera si y solo si A: (Esquema T)

deben poder derivarse de una de nicion de verdad, donde A es una oracion y `A' es un nombre transparente para A, i.e., un termino que indica, por su estructura, que denota A, v.g., dado por comillas o por una descripcion estructural (la oracion cuya primera palabra es . . .) de A.

(2) Solo las oraciones pueden ser verdaderas.

La condicion (2) indica que, entre los diversos candidatos posibles a portadores de verdad, i.e., oraciones declarativas, proposiciones, creencias, enunciados, pensamientos, juicios, aserciones, etc., Tarski opta por las oraciones. Estas no deben ser entendidas como tal o cual soporte f sico, ya sea gra co o sonoro, porque, como se~nala Tarski (1933, pp. 166-167),

> [...] we are not interested here in \formal" languages and sciences in one special sense of the word \formal", namely sciences to the signs and expressions of which no material sense is attached. For such sciences the problem here discussed [el de de nir verdad] has no relevance, it is not even meaningful. We shall always ascribe quite concrete and, for us, intelligible meanings to the signs which occur in the languages we shall consider.

Tampoco son oraciones de cualquier tipo sino, como Willard Van Orman Quine (1992) las denomina, oraciones eternas, esto es, libres de indexicos y otras palabras sensibles al contexto, ya que una misma oracion que contenga indexicos puede ser capaz de expresar en algunos casos algo verdadero y en otros algo falso (cf. Donald Davidson (1969)), como la oracion \Mi nombre es Lavinia", que dicha por m es verdadera, mientras que dicha por ustedes es seguramente falsa.

[1] ***Tarski se~nala tambien otras nociones como t picamente semanticas: las de*** designacion***,*** satisfaccion ***y de nicion*.**

Las razones que da Tarski para preferir oraciones por sobre las proposiciones, la opcion rival mas saliente, son escasas y pueden resumirse en la siguiente cita:

> [...] as regards the term \proposition", its meaning is notoriously a subject of lengthy disputations by various philosophers and logicians, and it seems never to have been made quite clear and unambiguous. For several reasons it appears most convenient to apply the term \true" to sentences, and we shall follow this course. (Tarski, 1944, p. 342)

En efecto, se cuenta con de niciones precisas de oracion de practicamente todos los lenguajes relevantes a esta investigacion, mientras que no puede decirse lo mismo del concepto de proposicion. Ademas, al elegir oraciones como las portadoras de verdad, las herramientas formales necesarias son m nimas, a saber, terminos que denoten las oraciones en cuestion. Para estos ultimos hay a disposicion un mecanismo generador, i.e., las comillas, aunque puede haber terminos de otras clases.

Por estas razones opto yo tambien por tomar oraciones como portadoras de verdad en toda esta investigacion. No obstante, si se pre ere leer predicaciones de verdad como \`A' es verdadera", donde A es una oracion, como diciendo de la proposicion expresada por A que es verdadera en lugar de A misma, no encuentro razones para oponerme ni hay nada en esta tesis que lo impida.

Con respecto a la condicion (1), el Esquema T implica, por ejemplo, que la oracion \Virgilio fue un poeta" es verdadera si y solo si Virgilio fue un poeta, lo cual es bien sencillo y razonable. Tarski ve en el Esquema T una suerte de extensionalizacion de la teor a de la verdad por correspondencia; una realizacion de esta teor a sin el aura metaf sica que suele acompa~narla.

Pero Tarski advierte rapidamente que este esquema trae graves problemas. Con-siderese la siguiente oracion `del mentiroso':

L es falsa. (L)

L dice de s misma que es falsa. Dado que `L' es un nombre para L, de acuerdo con (1) una buena de nicion de verdad deber a implicar la siguiente instancia del Esquema T:

L es verdadera si y solo si L es falsa

esto es, una contradiccion. El Esquema T es precisamente lo que habilita a derivar de la suposicion de que L es verdadera que es falsa y viceversa. En esto consiste la paradoja del mentiroso. (cf. Jose Mart nez (2014)).

Las causas por las cuales un principio tan intuitivo como el Esquema T engendra paradojas son, como indica Tarski, dos. Por un lado, el lenguaje en y para el cual se pretende dar una de nicion de verdad |el castellano| coinciden. Los lenguajes naturales son semanticamente cerrados, contienen su propio predicado de verdad. Se ha querido dar una de nicion del predicado de verdad de y para un mismo lenguaje y, en consecuencia, algunas de las oraciones por las cuales se puede reemplazar A en el Esquema T contienen ellas mismas la expresion `es verdadera' (o expresiones sinonimas),
as como nombres para estas mismas oraciones.

Por otro lado, la logica subyacente que se supone ligada al lenguaje en el cual se trabaja es la clasica. Cualquier lenguaje que satisfaga estas dos condiciones |i.e., que sea semanticamente cerrado y opere con logica clasica| sera trivial. Este resultado se conoce informalmente como `teorema de la inde nibilidad de Tarski'. El teorema de inde nibilidad de Tarski propiamente dicho (teorema 2.9) tiene una formulacion precisa y dependiente de ciertas caracter sticas del lenguaje bajo consideracion. En el apartado 2.3.1 de esta seccion enuncio y pruebo el teorema para una amplia familia de lenguajes formales.

Dado que Tarski no considera seriamente la posibilidad de adoptar logicas alter-nativas a la clasica, sostiene que todo lenguaje que contenga su propio predicado de verdad es o bien inconsistente o bien confuso, que no es posible que un lenguaje formal no trivial contenga un predicado aplicable a sus propias oraciones y satisfaga el Esque-ma T. Luego concluye que \[a]ccordingly, we decide not to use any language which is semantically closed in the sense given" (Tarski, 1944, p. 349).

La paradoja del mentiroso ha sido presentada en castellano y una estar a tentada a inferir entonces que o bien el castellano es trivial o bien no puede contener un predicado que satisfaga el Esquema T y, a fortiori, tampoco un predicado de verdad. Sin embargo, Tarski se guarda de extraer estas conclusiones. Desde su punto de vista, que comparto, el lenguaje coloquial no tiene una estructura especi cada, no se sabe con exactitud cuales son sus oraciones declarativas pues esta sujeto a cambio continuo y, por ende, no queda claro que sea trivial. Tampoco es claro cual es la logica que lo subyace, si es que tal cosa existe. La `demostracion' del teorema de Tarski en castellano es puramente ilustrativa y servira de modelo para las pruebas formales.

> We may at best only risk the guess that a language whose structure has been exactly speci ed and which resembles our everyday language as closely as possible would be inconsistent. (Tarski, 1944, p. 349)

Por esta razon, y lo seguir en esto, Tarski abandona el lenguaje natural y opta por trabajar en lenguajes formales.

> The problem of the de nition of truth obtains a precise meaning and can be solved in a rigorous way only for those languages whose structure has been exactly speci ed. For other languages|thus, for all natural, \spoken" langua-ges|the meaning of the problem is more or less vague, and its solution can have only an approximate character. Roughly speaking, the approximation consists in replacing a natural language (or a portion of it in which we are interested) by one whose structure is exactly speci ed, and which diverges from the given language \as little as possible". (Tarski, 1944, p. 347, sus italicas)

A la luz de las hipotesis de su teorema, Tarski deja de lado los lenguajes semanti-camente cerrados y establece una distincion entre el lenguaje de cuyas oraciones se quiere predicar verdad |el lenguaje objeto| y el lenguaje desde el cual se hacen estas ads-cripciones de verdad |el metalenguaje|. As evita la paradoja del mentiroso, que no es una formula bien formada en los lenguajes tarskianos. Otros caminos a seguir para no caer en contradicciones consisten en dar unicamente teor as incompletas o parciales de verdad, abandonar la logica clasica o restringir la capacidad expresiva del lenguaje de modo tal que o bien no contenga nombres para sus propias expresiones o bien no sea capaz de formular oraciones como L. Lo ultimo es quizas una movida espuria, en tanto se estar a recortando la expresividad de un lenguaje por un lado para incrementarla (agregando un predicado veritativo) por otro. Las primeras dos opciones, en cambio, son muy comunes en la literatura post tarskiana, como se vera mas adelante.

Luego, para de nir verdad para las oraciones de un lenguaje objeto L, Tarski propone operar desde un metalenguaje L^0 que contenga

- una copia o traduccion de L, esto es, que todo lo que pueda decirse en L pueda tambien decirse en L^0,
- nombres para las oraciones de L y capacidad de hablar de la sintaxis de este lenguaje,
- un predicado monadico para expresar verdad en L,

y sea esencialmente mas rico que L. El metalenguaje L^0 debera tener, por tanto, al menos los recursos de un lenguaje de predicados de primer orden y, adicionalmente, ser de alguna manera mas poderoso que el lenguaje objeto. Tarski (1944, p. 351) mismo admite que el cali cativo `esencialmente mas rico' no es facil de de nir en terminos generales, y todos los intentos formales hasta el momento han fracasado. Notese que, evidentemente, Tarski no esta pensando en lenguajes aislados sino en pares de lenguajes y calculos formulados en ellos; identi ca de cierto modo un lenguaje con la teor a para cuya expresion fue dise~nado.

La distincion entre lenguaje y metalenguaje da lugar a nociones tipeadas de ver-dad, en analog a con la separacion en niveles de la teor a de tipos de Bertrand Russell (1903). Esta distincion requiere a su vez la reformulacion de las condiciones (1) y (2) de adecuacion material de toda de nicion de verdad. El resultado es lo que Tarski (1933) llama `Convencion T'.

De nicion 2.1 (Convencion T). Una de nicion de T en L^0 es una de nicion material-mente adecuada de verdad para L solo si implica (traducciones adecuadas a L^0 de):

1. todas las instancias del esquema

   `A' es verdadera si y solo si (A) (Esquema T Tipeado)

   donde A es una oracion del L, `A' es un nombre transparente para A y (A) es una traduccion de A a L^0 (si L L^0, (A) = A), y
2. solo las oraciones de L son verdaderas.

A diferencia del Esquema T, el Esquema T Tipeado permite que la ocurrencia entrecomillada de cada oracion A a la izquierda de los bicondicionales pertenezca a un lenguaje diferente que su ocurrencia sin entrecomillar, a la derecha. En otras palabras, habilita una distincion tajante entre lenguaje objeto y metalenguaje. En el apartado que sigue presento los dos tipos de de nicion tarskiana de verdad y muestro como, en ambos casos, se satisface la Convencion T.

2.2. De niciones tarskianas de verdad

A nes de los a~nos 1920' Tarski inicio la busqueda de una de nicion formal de verdad. En (1933) ofreci tres de niciones de verdad simpliciter (a secas, absoluta) con estas carac-ter sticas para oraciones de tres lenguajes formales interpretados diferentes y mostr que las nociones resultantes satisfacen los criterios propuestos en la seccion anterior. Como se~nala Solomon Feferman (2008a), este trabajo estuvo dirigido a la comunidad loso ca, mientras que en (1952), y en (1956) junto a Robert L. Vaught, Tarski presento una de nicion precisa de verdad para oraciones de un lenguaje formal en un modelo, de la verdad relativa a una estructura o interpretacion, orientada mas bien hacia la comunidad logico-matematica. Tras una breve introduccion en 2.2.1 al metodo general que Tarski emplea en sus de niciones, los apartados 2.2.2 y 2.2.3 que siguen estan dedicados a la presentacion de cada uno de estos tipos de de nicion, respectivamente.

El primer grupo de de niciones in uyo radicalmente en (practicamente) toda obra de losof a anal tica posterior acerca de la verdad. Tuvo una gran injerencia en el desarrollo del de acionismo, as como en la literatura actual sobre teor as de la verdad. El segundo grupo de de niciones dio lugar a lo que hoy se conoce como `teor a de modelos', una de las ramas centrales de la logica matematica. Ambas nociones tuvieron un exito rotundo en la comunidad logico- loso ca y tambien logico-matematica, al menos a largo plazo.

Fue idea de Tarski que sus de niciones esten dadas en terminos claros y precisos, que estuvieran mas all de toda duda. Por ende, consider que los de niens no deb an contener terminos semanticos que no fueran a su vez reducibles a otros conceptos no semanticos, razon por la cual empleo exclusivamente terminos logicos y matematicos, dandole consistencia y claridad, y por ende, legitimidad a la nocion de verdad. Si bien eligio el lenguaje de la teor a general de clases o teor a simple de tipos como metalenguaje para las dos clases de teor as de la verdad que introdujo, hoy es mas usual emplear el lenguaje y la teor a de conjuntos. Las de niciones tarskianas de verdad que presento en esta seccion estan formuladas en una extension de L^{+}_{zfc} y dadas en una metateor a que extiende zfc^{+} (vease el apartado 1.3); son de niciones conjuntistas de verdad. En matematica es usual de nir un concepto en terminos conjuntistas para establecer su legitimidad.

2.2.1. El metodo recursivo

Una de nicion de verdad dada por todas las instancias del Esquema T Tipeado resultar a materialmente adecuada por estipulacion. Sin embargo, en ese caso la de nicion no ser a formalmente correcta. En palabras de Tarski,

> We can only say that every equivalence of the form [Esquema T Tipeado] obtained by replacing [A] by a particular sentence, and [`A'] by a name of this sentence, may be considered a partial de nition of truth, which explains wherein the truth of this one individual sentence consists. The general de - nition has to be, in a certain sense, a logical conjunction of all these partial de nitions. (Tarski, 1944, p. 344)

Si el lenguaje objeto contara con un numero nito de oraciones $A_1; : : : ; A_n$, las instancias del Esquema T Tipeado ser an nitas, y la conjuncion de todas ellas dar a lugar a una de nicion formalmente correcta de verdad, a saber

$$\text{Para toda oracion } x, x \text{ es verdadera si y solo si } x = `A_1' \text{ y } A_1, \text{ o } \ldots, \text{ o } x = `A_n' \text{ y } A_n, \tag{2.1}$$

|si y el lenguaje objeto fuera parte del metalenguaje; de lo contrario habr a que traducir el segundo conyunto en cada disyuncion del lado derecho del bicondicional|. Lamenta-blemente, los lenguajes formales con los cuales se suele trabajar cuentan con un numero in nito de oraciones y no admiten conjunciones in nitas, por lo cual no es posible poner en conjuncion todas las instancias del Esquema T Tipeado y dar una de nicion analoga a (2.1).[2]

La Convencion T parece sugerir otro modo aparentemente rapido y sencillo, al-ternativo a la conjuncion in nita de las instancias del Esquema T Tipeado, de dar una de nicion de verdad que satisfaga el requisito de correccion formal dado por (EXP): i.e., generalizar sobre sobre el Esquema T Tipeado. Supongase que L L^0. Luego, se podr a de nir verdad para L en L^0 del siguiente modo:

$$\text{Para toda oracion A de L, `A' es verdadera si y solo si A.} \tag{2.2}$$

Sin embargo, como se~nala Tarski, existen di cultades sintacticas que ponen en duda la viabilidad de (2.2). Para comenzar, ser a preciso extender los lenguajes primer orden para contar con cuanti cadores sobre posicion oracional en el lenguaje, i.e. la cuanti cadores de segundo orden sobre variables 0-adicas (cf. Boolos et al. (2007, cap. 22)). En segundo lugar, el predicado veritativo se aplicar a exclusivamente a nombres transparentes de oraciones. Este es super cialmente un mal menor, pues si se sabe que una oracion `A' es verdadera, y que `A'= s, donde s no es un nombre transparente de A, por la ley de Leibniz se sabe tambien que s es verdadera.

Males mayores aparecen cuando se cuestiona la naturaleza de las comillas (o las descripciones estructurales). Usualmente los terminos que se obtienen entrecomillando otras expresiones son considerados sintacticamente simples, es decir, carecen de comple-jidad interna, son tan complejos como un nombre de cualquier otra ndole. No obstante, dado que es preciso cuanti car dentro de las comillas, hay que entenderlas como un s mbolo de funcion ` \x"', que toma formulas de L y las devuelve transformadas en objetos. De lo contrario, no ser a posible sustituir `A' por oraciones en (2.2) y, por ende,

`A' es verdadera si y solo si Virgilio fue un poeta.

---

[2] ***Aun si admitieran conjunciones in nitas una de nicion de verdad en esta l nea no ser a posible, porque en lenguajes in nitarios normales, i.e.***, donde la de nicion de formula bien formada es recursiva, no existe la conjuncion in nita de todas las formulas del lenguaje, ya que deber a contenerse a ella misma.

ser a una consecuencia de la de nicion, lo cual es absurdo. Ademas, podr a derivarse tambien esta otra instancia:

`A' es verdadera si y solo si Virgilio no fue un poeta.

esto es, la teor a ser a inconsistente.

Por un lado, las comillas deben comportarse como un operador, que se aplica a formulas como lo hace la negacion `:'. Pero en vez de dar lugar a nuevas formulas, como los operadores, las comillas dan lugar a objetos, y se comportan en esto como s mbolos de funcion. Las comillas son un dispositivo ling•u stico h brido. Lamentablemente, no existe tal cosa en ninguno de los lenguajes arti ciales construidos hasta ahora. Si se piensa la cuanti cacion sobre oraciones como cuanti cacion de segundo orden sobre variables 0-adicas, las comillas tomar an objetos del dominio sobre el cual var an las variables de segundo orden y arrojar an elementos del dominio de primer orden.

Quizas sea posible agregar un dispositivo de este tipo a algun lenguaje formal que sea capaz de cuanti car sobre formulas. Pero, como se~nala Tarski, esto no es tan sencillo. Primero, el operador-funcion resultante no ser a extensional sino intensional, i.e., dadas dos oraciones A y B, podr a (y, en muchos casos, deber a) ocurrir que A y B sean (incluso logicamente) equivalentes y, sin embargo, `A'6=`B'. Por ejemplo, dos tautolog as diferentes.

Segundo, ya no tendr an sentido a rmar expresiones como \x' es una variable', porque ya no ser an oraciones sino funciones oracionales o proposicionales. Una opcion ser a contar con dos tipos de comillas para evitar este problema: las funcionales y las que arrojan terminos cerrados, como es usual.

Pero, tercero y mas importantemente, habr a un alto riesgo de caer en contradic-ciones aun antes de introducir un predicado de verdad. Si el lenguaje tuviera capacidad autorreferencial, podr a formularse la siguiente oracion:

Para toda oracion A, si `A'=(2.3), entonces no A. (2.3)

Instanciando el cuanti cador universal de esta oracion en (2.3), se tendr a que (2.3) implica su propia negacion. Pero la negacion de (2.3) implica a su vez que hay una oracion `A' tal que `A'=(2.3) y A, esto es, (2.3). Luego, (2.3) y su negacion ser an equivalentes, lo cual es un absurdo.

En vista de estas di cultades, Tarski explor un metodo alternativo para dar de-niciones de verdad formalmente correctas y materialmente adecuadas para lenguajes con un numero in nito de oraciones: el metodo recursivo. El resultado fue lo que el llamo `de niciones estructurales' o de niciones recursivas de verdad. La intuicion que esta por detras es la siguiente: la verdad de una oracion en un lenguaje formal depende de la verdad de sus partes componentes, es composicional. Luego, ser a su ciente pos-tular instancias del Esquema T Tipeado para oraciones atomicas del lenguaje objeto y luego agregar clausulas que permitan inferir la verdad o falsedad de las oraciones mas complejas, que se forman a partir de estos componentes atomicos. Por ejemplo, clausulas que digan que una conjuncion es verdadera si y solo si ambos conyuntos lo son.

No obstante, as descripto este metodo falla, porque no toda oracion comple-ja esta compuesta por oraciones atomicas. En particular, las oraciones universalmente cuanti cadas |como `para todo x, x es poeta'| estan sintacticamente compuestas de formulas con variables libres |como `x es un poeta'|, de las cuales no tiene sentido predicar verdad o falsedad. Por esta razon Tarski da un rodeo y antes de de nir ver-dad para las oraciones de un lenguaje de primer orden da una de nicion recursiva de la nocion de satisfaccion para sus formulas por ciertos objetos. Por ejemplo, `x es un poeta' es satisfecha por Virgilio, y tambien por Homero, pero no por Augusto; y no es en s ni verdadera ni falsa. Oraciones universalmente cuanti cadas como `para todo x, x es poeta' seran verdaderas en la medida en que todos los objetos de los cuales se est hablando satisfagan la subformula `x es un poeta'.

De este modo, Tarski de nira verdad para las oraciones de un lenguaje objeto des-de un metalenguaje a partir de la nocion de satisfaccion, que introduce recursivamente, como se vera en los siguientes dos apartados.

2.2.2. Una de nicion recursiva de verdad a secas

En 1933 Tarski ilustra su metodo recursivo para de nir satisfaccion y luego verdad cum-pliendo con los requisitos de correccion formal |dado por (EXP)| y de adecuacion material |dado por la Convencion T| con tres lenguajes objeto absolutamente inter-pretados, tres fragmentos del lenguaje de la teor a general de clases o teor a simple de tipos (cf. Mario Gomez-Torrente (2004)). Este es una suerte de lenguaje de segundo orden donde las variables de predicado estan indexadas u ordenadas. Mientras que las variables de individuo var an sobre individuos, las de segundo orden que llevan el ndice 1 var an sobre clases de individuos, las que tienen ndice 2 sobre clases de clases de individuos, etc. El lenguaje de la teor a general de clases contiene todas las variables de ndice o tipo nito. El fragmento para el cual Tarski da su mas famosa de nicion de verdad es el que contiene unicamente variables de primer y segundo orden, el lenguaje de la teor a basica de clases. Como metateor a emplea la teor a general de clases o simple de tipos (cf. Thierry Coquand (2015)).

Sin embargo, ya en la traduccion al aleman de su monograf a de 1933 publicada en 1935 Tarski agrego una septima seccion titulada `Postscript' en la cual se~nala la con-veniencia de recurrir a una metateor a de clases mas poderosa, que contenga tambien ordenes trans nitos. Todos estos ordenes pueden de nirse en teor a de conjuntos (uti-lizando aritmetica trans nita) que, como sostienen G•odel (1933) y ystein Linnebo & Agust n Rayo (2012), puede verse como una generalizacion de la teor a simple de tipos. Trabajo por tanto directamente desde el lenguaje de la teor a de conjuntos e ilustro las de niciones tarskianas de 1933 mediante una de nicion analoga donde el lenguaje objeto es L_{pa}. La posibilidad de codi car las expresiones de cualquier lenguaje de primer orden mediante conjuntos, la capacidad del lenguaje de la teor a de conjuntos para hablar de estos codigos y de nir ciertas propiedades recursivas de estos ultimos, y la de la teor a de conjuntos para representar buena parte de estas propiedades (vease el apartado 1.3) permite llevar a cabo la de nicion.

El metalenguaje extiende $L^{+}{}_{zfc}{}^{n}$ con un predicado monadico $T_{L_{pa}}$ para expresar verdad en L_{pa} (vease el apartado 1.2.1) y un predicado diadico $Sat_{L_{pa}}$ para expresar satisfaccion. La metateor a en la cual se de ne verdad para oraciones de L_{pa} es una extension de $zfc^{+}{}_{n}$ formulada en esta expansion de $L^{+}{}_{zfc}{}^{n}$ (vease el apartado 1.3).

Intuitivamente, los objetos que satisfacen formulas de L_{pa} con una variable libre son numeros, los que satisfacen formulas con dos variables libres son pares ordenados de numeros, etc. Para evitar estas consideraciones relativas a cada formula Tarski pre ere trabajar con asignaciones de numeros, funciones o secuencias que asignan numeros no solo a las variables que estan libres en una formula dada, sino a todas las variables a la vez y, en general, a todos los terminos del lenguaje, de modo tal que una misma asignacion podra satisfacer formulas con distinto numero de variables libres.[3] Trabajo sobre una codi cacion de expresiones de L_{pa} con conjuntos de la metateor a (vease el apartado 1.3).

De nicion 2.2 (Asignaciones para L_{pa}). Una asignacion g para L_{pa} es una funcion cuyo dominio es el conjunto de (los codigos de) terminos de L_{pa} y su codominio N , tal que

1. g(p0q) = 0;
2. g(pSvq) = Sg(pvq);
3. g(pv + uq) = g(pvq) + g(puq); y
4. g(pv uq) = g(pvq) g(puq).

[3]***Dado que los lenguajes que Tarski (1933)*** considera carecen de terminos cerrados, sus asignaciones, que el denomina `secuencias', solo asignan objetos a las

variables de individuo. Aca, como se vera a continuacion, es preciso extenderlas a todos los terminos del lenguaje.

Una asignacion para L_{pa} asigna a cada termino cerrado el numero que este denota, a cada variable un numero y a cada termino complejo con variables libres el numero que denotar a el termino si las variables libres fueran reemplazadas por los numerales de los numeros que la asignacion les asigna.

Dado que el concepto de funcion y el conjunto de terminos de L_{pa} son de nibles en zfc^{+}, el metalenguaje contiene una formula $As_{L_{pa}}$ (v) que de ne el conjunto de fun-ciones que son asignaciones para L_{pa}. Luego, se esta en condiciones de de nir la nocion de satisfaccion de formulas de L_{pa} por una asignacion en la metateor a. Sea 8g' una abreviatura de 8v($As_{L_{pa}}$ (v) ! ').

De nicion 2.3 (Satisfaccion de formulas de L_{pa} por una asignacion).

$Sat_{L_{pa}}$ (g; x) $\$_{def}$ F $orm_{L_{pa}}$ (x) ^

(9y; z(x = (y=.z) ^ g(y) = g(z)) _
9y(x = :.y ^ :$Sat_{L_{pa}}$ (g; y)) _
9y; z(x = (y!.z) ^ ($Sat_{L_{pa}}$ (g; y) ! $Sat_{L_{pa}}$ (g; z))) _
9y; z(x = 8.yz ^ 8g^0(8w(V ar(w) ^ w 6= y ! g^0(w) = g(w))
! $Sat_{L_{pa}}$ (g^0; z))))

Una formula x de L_{pa} es satisfecha por una asignacion g si x es una formula atomica de la forma t = s y t denota lo mismo que s de acuerdo con g,[4] o x es la negacion de una formula que no es satisfecha por g, o el condicional entre dos formulas tales que g no satisface el antecedente o s el consecuente, o una formula de la forma 8v' y todas las asignaciones que di eren de g a lo sumo en lo que asignan a v satisfacen '.

Por ejemplo, si g(px_1q) = 0 y g(pvq) = 1 para toda variable v distinta de x_1, $Sat_{L_{pa}}$ (g; p8 x_2 x_2 0 = x_1 q), porque toda asignacion g^0 que di ere de g a lo sumo en lo que asigna a x_2 es tal que $Sat_{L_{pa}}$ (g^0; p x_2 0 = x_1 q), ya que, para todo n 2 N, n 0 = g^0 (p x_1 q) = 0, porque g^0 no puede diferir de g en cuanto a x_1 sino solo con respecto a x_2. 8x_2 x_2 0 = x_1 es satisfecha exclusivamente por asignaciones que asignen 0 a x_1. Por otro lado, 8x_2 x_2 0 = 0 es satisfecha por todas las asignaciones y 8x_2 x_2 0 = S0 por ninguna. La asignacion particular que est bajo consideracion solo sera relevante en la medida en que la formula en cuestion tenga variables libres. Si una formula no contiene variables libres, esto es, es una oracion, o bien todas las asignaciones la satisfacen o bien ninguna lo hace. Este concepto binario es lo que dar lugar a la nocion de verdad.

[4] ***Notese que las unicas formulas atomicas de L_{pa}*** son enunciados de identidad.

De nicion 2.4 (Verdad de oraciones de L_{pa}).

$$T_{Lpa} (x) \$_{def} Sent_{Lpa} (x) \wedge 8gSat_{Lpa} (g; x)$$

Luego, una oracion de L_{pa} es verdadera siempre y cuando toda |o, lo que es lo mismo, alguna| asignacion para este lenguaje la satisface, y falsa en caso contrario. 8x$_2$ x$_2$ 0 = 0 es verdadera, mientras que 8x$_2$ x$_2$ 0 = S0 es falsa.

La de nicion de verdad dada es formalmente correcta porque sigue el patron de (EXP): su de niens no contiene T_{Lpa} , aunque s contiene el predicado Sat_{Lpa} , que esta de nido en terminos de s mismo. Sin embargo, siendo la de nicion 2.3 recursiva y categorica, es posible obtener una de nicion expl cita de Sat_{Lpa} en la metateor a.[5] Ademas, aparte de s mismo, Sat_{Lpa} no esta de nido en terminos semanticos de ninguna clase sino provenientes exclusivamente de la teor a de conjuntos. Luego, las de niciones 2.3 y 2.4 apuntan a una reduccion de la nocion de verdad a conceptos no semanticos sino matematicos, conjunt sticos, lo cual implica la consistencia del concepto de nido, provisto que la teor a de conjuntos sea consistente.

Naturalmente, esto no basta. Es preciso tambien establecer la adecuacion material de las de niciones dadas para que sean totalmente aceptables. Como indica Tarski, la de nicion 2.4 satisface de hecho la Convencion T y es, por tanto, materialmente adecuada. De acuerdo con la de nicion 2.1, deber an obtenerse a partir de2.4

1. todas las instancias de

$$T_{Lpa} (p'q) \$ (') \tag{2.4}$$

   para cada oracion ' de L_{pa}, donde (') es una traduccion (razonable) de ' al lenguaje de la metateor a; y

2. 8x(T_{Lpa} (x) ! $Sent_{Lpa}$ (x)).

La condicion 2 es facilmente veri cable leyendo el bicondicional de la de nicion 2.4 de izquierda a derecha y eliminando el segundo conyunto del de niens. La condicion

[5] ***Se puede probar en la metateor a que existe una relacion* R *tal que***

$$8g; x(R(g; x) \$ F orm_{Lpa} (x) \wedge (9y; z(x = (y=.z) \wedge g(y) = g(z)) \_$$
$$9y(x = :.y \wedge :R(g; y)) \_ 9y; z(x = (y!.z) \wedge (R(g; y) ! R(g; z))) \_$$
$$9y; z(x = 8.yz \wedge 8g^0(8w(V ar(w) \wedge w 6= y ! g^0(w) = g(w)) ! R(g^0; z)))))$$

y que para toda relacion* R^0 *tal que

$$8g; x(R^0(g; x) \$ F orm_{Lpa} (x) \wedge (9y; z(x = (y=.z) \wedge g(y) = g(z)) \_$$
$$9y(x = :.y \wedge :R^0(g; y)) \_ 9y; z(x = (y!.z) \wedge (R^0(g; y) ! R^0(g; z))) \_$$
$$9y; z(x = 8.yz \wedge 8g^0(8w(V ar(w) \wedge w 6= y ! g^0(w) = g(w)) ! R^0(g^0; z)))))$$

R = R⁰ (cf. Tarski (1933, p. 193, nota 1)).

1, en cambio, es levemente mas compleja y requiere, en primer lugar, de una traduccion `razonable' de las oraciones de L_{pa} en el metalenguaje. Intuitivamente, lo razonable en este caso consiste en traducir, primero, los terminos de L_{pa} de acuerdo con el siguiente esquema:

(0) = 0

(v) = v

(St) = S (t)

(t + s) = (t) + (s) (t

s) = (t) (s)

y luego las formulas:

(t = s) = ((t) = (s)) (:')

= : (')

(' !) = (') ! ( )

(8v') = 8v 2 N (')

Luego, da la interpretacion estandar de L_{pa} y es, por ende, una buena tra-duccion de las formulas de este lenguaje a $L^{+}{}_{zfc}{}^{n}$. Basandose en esta traduccion es po-sible probar que todas las instancias de (2.4) se siguen de la de nicion 2.4 y, por tan-to, esta es materialmente adecuada.[6] Por ejemplo, se sabe que T_{Lpa} (p8x x 0 = 0q) porque 8gSat$_{Lpa}$ (g; p8x x 0 = 0q), pues 8g8g^{0}(8y(V ar$_{Lpa}$ (y) ^ y 6= pxq ! g^{0}(y) = g(y)) ! Sat$_{Lpa}$ (g^{0}; px 0 = 0q)), pues 8g8g ^{0}(8y(V ar$_{Lpa}$ (y) ^ y 6= pxq ! g^{0}(y) = g(y)) ! g^{0}(px 0q) = g^{0}(p0q)) o, como x es la unica variable libre, 8g g(px 0q) = g(p0q), ya que 8g g(pxq) g(p0q) = g(p0q), pues 8x 2 N x 0 = 0, esto es, (8x x 0 = 0).

Ademas, la de nicion 2.4 permite derivar principios razonables que gobiernan el predicado de verdad para L_{pa}, como los siguientes principios de consistencia y comple-titud internas:

Consistencia 8x(Sent$_{Lpa}$ (x) ! (:T$_{Lpa}$ (x) _ :T$_{Lpa}$ (:.x)))

Completitud 8x(Sent$_{Lpa}$ (x) ! (T$_{Lpa}$ (x) _ T$_{Lpa}$ (:.x)))

[6] ***Esto es una consecuencia inmediata de***

*(*8gSat$_{Lpa}$ *(*g; p'*(*v$_1$: : : v$_n$*)*q*)* $ 8v$_1$: : : v$_n$ *(')) ^ (*9gSat$_{Lpa}$ *(*g; p'*(*v$_1$: : : v$_n$*)*q*)* $ 9v$_1$: : : v$_n$ *('))*

que puede probarse por induccion sobre la complejidad de '.

De acuerdo con el primero, no es posible que una oracion y su negacion sean ambas verdaderas, mientras que el segundo a rma que toda oracion es tal que o bien ella es verdadera o su negacion lo es. Como indica Tarski, juntos estos dos principios implican que el conjunto de verdades aritmeticas es consistente y completo y, por tanto, diferente del conjunto de teoremas de pa, como muestra el primer resultado de incompletitud de G•odel (vease el apartado 1.2.7), de acuerdo con el cual hay oraciones verdaderas de L_{pa} que no son demostrables en pa.

Tarski ha mostrado que es posible dar una de nicion de verdad consistente, formalmente correcta y materialmente adecuada |por supuesto, bajo su propia comprension de estos terminos| de verdad para un lenguaje formal, sin recurrir a conceptos semanticos sino exclusivamente a nociones matematicas claras y precisas. Ademas, sugiere que su metodo puede generalizarse a cualquier lenguaje de orden nito o, en terminos modernos, a cualquier lenguaje cuyo dominio de discurso tenga el tama~no de un conjunto (esto quedar claro mas adelante en el cap tulo); aunque no presenta ninguna de nicion general de verdad para lenguajes con estas caracter sticas. Notese que como llevar a cabo esta generalizacion no es obvio, en tanto las de niciones dadas en esta seccion dependen fuertemente de la sintaxis de L_{pa}.

Si bien, al haber sido dadas para tres lenguajes en particular, las de niciones tarskianas de 1933 son, en algun sentido, nociones relativas de verdad, en otro sentido de nen verdad para el lenguaje objeto |L_{pa} en este caso| en terminos absolutos, no dependientes de tal o cual interpretacion del vocabulario no logico de este lenguaje sino entendiendo sus s mbolos bajo su interpretacion usual, como hablando, en el caso de L_{pa}, sobre los numeros naturales. Por eso, como se~nala Feferman (2008b), esta nocion de verdad esta orientada a la comunidad loso ca.

En la siguiente subseccion presento, en cambio, una de nicion de verdad para un lenguaje relativa a una estructura, modelo o interpretacion de ese lenguaje, destinada mas bien a la comunidad logico-matematica. Esta de nicion tiene un caracter general en tanto es aplicable a cualquier lenguaje de primer orden; es, en alguna medida, una version parametrizada de la de nicion 2.4, donde L_{pa} se convierte en parametro; pero, ademas, la interpretacion canonica del lenguaje se convierte en una variable sobre la cual se cuanti ca.

2.2.3. Nociones recursivas de verdad en una estructura

La nocion de verdad es una estructura o modelo aparece de manera informal al menos desde el siglo XIX en la literatura logico-matematica, por ejemplo, al hablar de modelos para las geometr as no euclidianas, o de la caracterizacion de Dedekind de los numeros naturales y de los reales hasta el isomor smo en lenguajes de segundo orden. Luego vino el formalismo de Hilbert y el algebra de estructuras. La nocion fue central tambien en la formulacion del teorema de L•owenheim-Skolem y el teorema de completitud de G•odel.

Tarski & Vaught (1956) de nieron formalmente por primera vez este concepto pa-ra, entre otras cosas, dar pruebas mas sencillas y extender el resultado de L•owenheim-Skolem. La de nicion fue esencial para el desarrollo de la teor a de modelos, que re-sulto de suma utilidad luego en diversas areas de conocimiento como la losof a, la logica, la matematica y otras ciencias deductivas (cf. Chen Chung Chang & H. Jerome Keisler (1990)).

A diferencia del concepto de verdad absoluto presentado en el apartado anterior, relativo a un lenguaje, la nocion de verdad en una estructura es, obviamente, no solo relativa a un lenguaje sino tambien a una estructura. En lugar de trabajar con un lenguaje objeto absolutamente interpretado, se consideran lenguajes de primer orden cuyo vocabulario no logico carece de signi cado junto con una familia de modelos posibles para este vocabulario, tambien llamados `estructuras' o `interpretaciones'. Si se entiende la interpretacion usual |original, pretendida, canonica| del vocabulario no logico de un lenguaje, sobre la cual se de n a verdad en el apartado anterior, como una entre muchas, si se piensa la de nicion 2.4 como una de nicion de verdad para L_{pa} bajo la estructura de los numeros naturales, interpretando los s mbolos no logicos de este lenguaje como hablando de los numeros naturales, la de nicion de verdad en un modelo puede ser vista como una generalizacion de la de nicion 2.4 que la extiende a otras interpretaciones de su vocabulario no logico. Asimismo, la de nicion tarskiana de verdad en un modelo es en realidad un esquema de de nicion, donde el lenguaje de primer orden L para el cual esta dada es meramente un parametro: la nocion es directamente aplicable a cualquier lenguaje de primer orden.

A diferencia del caso anterior, los modelos o interpretaciones de un lenguaje ob-jeto L no cuentan con la ontolog a propia de la interpretacion canonica del lenguaje, como la de los numeros naturales, sino que sus dominios estan dados exclusivamente por conjuntos. El metalenguaje es simplemente el resultado de incorporar un predicado T_L para la verdad de oraciones de L, ahora diadico para relativizar la verdad a una estruc-tura, y un predicado triadico Sat_L, ahora con un lugar extra para modelos, simplemente a L^{+}_{zfc}. En lugar de agregar como urelementos los objetos de los cuales hablar a L y una de nicion de estos a zfc^{+}_{u}, como se hizo con N en la de nicion absoluta de verdad para L_{pa}, se trabaja directamente sobre zfc^{+} y, en lugar de un conjunto de urelementos, se utiliza un conjunto de conjuntos que sea isomor co al primero y de nible en zfc^{+}. Por ejemplo, en lugar de introducir el conjunto N para de nir la estructura de los numeros naturales, se recurre al !, esto es, el conjunto de los cardinales de von Neumann, el ordi-nal de los numeros naturales, o a otros conjuntos isomor cos. Esto siempre sera posible en la medida en que el dominio de la estructura no conjuntista tenga una cardinalidad de nible en zfc^{+}, siempre y cuando su cardinalidad sea lo su cientemente peque~na. Vuelvo sobre esto mas adelante.

Trabajar unicamente con estructuras conjuntistas, por un lado, implica que ningun lenguaje recibira su interpretacion pretendida, excepto quizas ciertos fragmentos de L^{+}_{zfc}.[7] Pero por otro, simpli ca enormemente las de niciones y pruebas sobre la no-cion de estructura, asignacion, satisfaccion y verdad sin conllevar otras consecuencias signi cativas. A continuacion ofrezco una de nicion actual de estructura, modelo o inter-pretacion de un lenguaje L dado en zfc^{+}, que di ere poco desde el punto de vista tecnico de la original presentada en Tarski & Vaught (1956). Sea L un lenguaje cualquiera de primer orden codi cado en !.

De nicion 2.5 (Modelos de L). Una interpretacion, modelo o estructura M de L es un par ordenado hjMj; x^{M}i, donde jMj, el dominio de M, es un conjunto no vac o y x^{M} es una funcion de interpretacion, que asigna miembros de jMj a las constantes de individuo de L, funciones n-adicas de nidas de jMj^{n} en jMj a los s mbolos de funcion n-adicos de L y subconjuntos de jMj^{n} a las letras de predicado n-adicas de L.

Por ejemplo, N es una interpretacion estandar conjuntista del vocabulario de L_{pa}: jNj = !, p0q^{N} = ?, pSq^{N} = fhx; yi 2 !^{2} : y = x [fxgg, etc. Tras identi car cada numero de von Neumann con un numero natural |? con 0, f?; f?gg con 1, etc.|, la de nicion de verdad de oraciones de L_{pa} en N coincide. practicamente con la de nicion 2.4. Sea M od_{L}(M) la formula de L^{+}_{zfc} que de ne la clase de modelos de L, y sea 8M' una abreviatura de 8v(M od_{L}(v) ! ') para todo L.

Al igual que antes, para dar una de nicion de verdad en un modelo es preciso primeramente de nir satisfaccion en un modelo, para poder lidiar con formulas, lo cual es necesario para dar las condiciones de verdad de oraciones universalmente cuanti ca-das. Nuevamente, la nocion de satisfaccion esta dada recursivamente y en funcion de asignaciones. La nocion de asignacion para terminos de L es relativa a la estructura en la cual se de ne satisfaccion.

De nicion 2.6 (Asignaciones de un modelo). Una asignacion g de una interpretacion M de L es una funcion cuyo dominio es el conjunto de terminos de L y su codominio jMj, tal que

1. si a es una constante de individuo de L, g(paq) = paq^{M}, y

[7]***A menos que se adopte una vision estructuralista de las matematicas. Vease,*** v.g.***, [Shapiro](#) ([1997](#)).***

2. si f es un s mbolo n-adico de funcion y $t_1; : : : ; t_n$ son terminos de L,

$$g(pf\ t_1; : : : ; t_nq) = pfq^M(g(pt_1q); : : : ; g(pt_nq))$$

Sea $As_L(g; M)$ la formula de L^+_{zfc} que de ne la clase de asignaciones de cada interpretacion M para L. Las asignaciones deben respetar lo asignado por la estructura a las constantes de individuo y s mbolos de funcion, mientras que tienen total libertad sobre las variables de individuo.

El predicado de satisfaccion de formulas de L, $Sat_L(v_1; v_2; v_3)$, tendra ahora tres argumentos: la asignacion v_1 del modelo v_3 de L satisface la formula v_2 2 L. Sean $R_1^{n_1}$; : : : ; $R_m^{n_m}$ los unicos s mbolos de predicado de L de aridad n_k 2 ! con 1 k m, correspondientemente.

De nicion 2.7 (Satisfaccion de formulas de L por una asignacion de un modelo).

$Sat_L(g; x; M)$ \$def $F\ orm_L(x)$ ^ $As_L(g; M)$ ^

$(9t_1 : : : t_{n_1} (x = (R._1^{n_1}\ t_1 : : : t_{n_1}) \wedge ht_1^M; : : : ; t_{n_1}{}^M i\ 2\ pR_1^{n_1}q^M)$ _

$^M i\ 2\ pR_m^{n_m}q^M)$ _

: : :

$9t_1 : : : t_{n_m} (x = (R._m^{n_m}\ t_1 : : : t_{n_m}) \wedge ht_1^M; : : : ; t_{n_m}$

$9y(x = :.y \wedge :Sat_L(g; y; M))$ _

$9y; z(x = (y!.z) \wedge (Sat_L(g; y; M) ! Sat_L(g; z; M)))$ _ $9y;$
$z(x = 8.yz \wedge 8g^0(As_L(g^0; M) \wedge$
$8w(V\ ar(w) \wedge w\ 6= y\ !\ g^0(w) = g(w))\ !\ Sat_L(g^0; z; M))))$

Una formula ' de L es satisfecha por una asignacion g de una interpretacion M si y solo si ' es una formula atomica de la forma $R_i^{n_i}\ t_1 : : : t_{n_i}$ con 1 i m y la n_i-tupla dada por los objetos de jMj que g asigna a $t_1 : : : t_{n_i}$ pertenece a la relacion que x^M asigna a $R_i^{n_i}$, o ' es la negacion de y no es satisfecha por g, o ' es el condicional de dos formulas y y, si la primera es satisfecha por g, la segunda tambien, o ' es la cuanti cacion universal 8v y todas las asignaciones de M que di eren de g a lo sumo en lo que asignan a v satisfacen .

Notese que la forma de la de nicion 2.7 depende esencialmente del vocabulario no logico de L: tanto los predicados y las funciones involucradas ($Sent_L(v)$, :., etc.) como el numero de l neas dedicadas a las formulas atomicas, que depende a su vez del numero de letras de predicado en el vocabulario no logico de L. Esto no podr a ser de otro modo, en tanto estos predicados y funciones dependen del codigo de expresiones de

L con el cual se trabaje, que es algo externo a la metateor a. L no ocurre en la de nicion

2.7 como variable, como lo hace M, sino como parametro. Estrictamente hablando, hay una de nicion del estilo de 2.7 para cada lenguaje de primer orden L; la de nicion 2.7 es esquematica.

A partir de la nocion de satisfaccion de formulas de L, al igual que antes, se pue-de de nir verdad, solo que ahora, siendo L un lenguaje formal no interpretado, ambas nociones dependen de una u otra interpretacion. Por esta razon se agrego un predi-cado diadico a L^{+}_{zfc} para expresar verdad en un modelo. Esta nocion de verdad para oraciones de L bajo una estructura, al estar de nida en terminos de Sat_L, hereda su esquematicidad. Como se~nala Eduardo A. Barrio (2014a, p. 28), \Tarski no ofreci una de nicion general, sino un metodo sistematico para obtener de niciones de verdad para una coleccion considerable de lenguajes formales."

De nicion 2.8 (Verdad de oraciones de L en un modelo).

$$T_L(x; M) \$_{def} Sent_L(x) \wedge 8g(As_L(g; M) ! Sat_L(g; x; M))$$

Si bien Tarski & Vaught no hablan de correccion formal y adecuacion material para la de nicion de verdad relativa a un modelo, se puede probar que, dado un modelo, la de nicion 2.8 es formalmente correcta y materialmente adecuada. Es posible dar una de nicion expl cita de Sat_L en L^{+}_{zfc} utilizando la misma tecnica esbozada en el apartado anterior y, por tanto, de acuerdo con EXP, la de nicion 2.8 es formalmente correcta. Ademas, al igual que para la de nicion 2.4, dado un modelo M de L se puede probar todas las instancias de

$$T_L(p'q; M) \$ (') \tag{2.5}$$

donde es una funcion que traduce oraciones de L en L_{zfc} tal que, si a es una constante de individuo, v una variable, $t_1; : : : ; t_n$ terminos, y ' y formulas de L,

$$(a) = paq^M$$
$$(v) = v$$
$$(ft_1 : : : t_n) = pfq^M((t_1); : : : (t_n))$$

y luego las formulas:

$$(R_i^{n_i} t_1 : : : t_{n_i}) = h (t_1); : : : ; (t_{n_i})i \ 2 \ pR_i^{n_i}q^M; \text{ si } 1 \ i \ m \ (:')$$
$$= : (')$$
$$(' ! \quad) = (') ! ( )$$
$$(8v') = 8v \ 2 \ jMj \quad (')$$

Ademas, dado un modelo M de L, la de nicion 2.8 implica que

$$8x(T_L(x; M) ! Sent_L(x))$$

Por tanto, para cada modelo M de L, $T_L(v; M)$ satisface la Convencion T: la de nicion 2.8 es materialmente adecuada.

Notese que a partir de la de nicion 2.8, cuanti cando sobre M es posible de nir la nocion de verdad en todo modelo o, lo que es lo mismo, de verdad logica en sentido contemporaneo. Tambien se puede obtener de niciones analogas de falsedad logica, satisfacibilidad, consecuencia logica, y otros conceptos logicos, aunque se han dado ar-gumentos en contra de la adecuacion material de estas de niciones.[8]

2.3. Limitaciones y jerarqu as

Tarski ha dado, por un lado, de niciones de verdad absoluta para ciertos lenguajes formales interpretados, como la de nicion 2.4, y, por otro, de niciones de verdad para cualquier lenguaje de primer orden relativas a un modelo de este lenguaje, que introduje en la de nicion 2.8, en ambos casos satisfaciendo las condiciones impuestas en el apartado 2.1. Como se~nale mas de una vez, esta ultima de nicion puede entenderse como una generalizacion de las de niciones del estilo de 2.4 en dos sentidos. Por un lado, 2.4 esta anclada a la interpretacion canonica del lenguaje objeto, mientras que la de nicion 2.8 permite variar el signi cado de sus s mbolos no logicos. Por otro, la de nicion 2.4 concierne exclusivamente a L_{pa}, mientras que la otra es un esquema aplicable a cualquier lenguaje de primer orden.

Sin embargo, hay un sentido en el cual la de nicion de verdad en un modelo no es una generalizacion de la de verdad absoluta para L_{pa}. Si bien la primera ofrece muchas mas interpretaciones que la segunda, la interpretacion particular de la cual la segunda hace uso impl cito no se encuentra entre las que ofrece la de nicion de verdad en un modelo, pues su dominio no esta formado por conjuntos. Solo las interpretaciones conjuntistas son consideradas por la de nicion 2.8. Una podr a conformarse con interpretaciones conjuntistas isomor cas a las originales; pero, lamentablemente, no toda interpretacion canonica tiene una interpretacion conjuntista isomor ca a ella.

En esta seccion pruebo primero un resultado general que implica este hecho, el teorema de la inde nibilidad de la verdad de Tarski en terminos formales. Luego, en 2.3.2 presento un modo de solucionar la di cultad de dar nociones de verdad absolutas

[8] *Vease, por ejemplo, John Etchemendy (1990), Vann McGee (1992b), Manuel Garc a-Carpintero*

(1993), Gomez-Torrente (1998/1999) para una discusion.

para cualquier lenguaje formal de primer orden relajando ciertas caracter sticas de la nocion de interpretacion. Finalmente, en 2.3.3 exploro una segunda v a que circunviene el problema, evitando hablar de interpretaciones simpliciter. Ambos caminos desembocan en jerarqu as.

2.3.1. Inde nibilidad de la verdad

Si se quisiera dar una de nicion de verdad absoluta para L^{+}_{zfc} no se podr a recurrir a una instancia de la de nicion 2.8, pues la estructura que se precisa debe ser la interpretacion usual, estandar, de este lenguaje. I.e., deber a existir un modelo M en donde jMj contenga todos los conjuntos del universo de zfc^{+}, lo cual es imposible, pues zfc^{+} deber a implicar la existencia de un conjunto de todos los conjuntos que, por la paradoja de Russell, se sabe que no existe.[9]

Naturalmente, esto no es ninguna novedad. De haber sido posible dar una de ni-cion de verdad absoluta para L^{+}_{zfc} en terminos de la de nicion 2.8, que esta formulada en L^{+}_{zfc}, se habr a dado con un lenguaje semanticamente cerrado y, por tanto, inconsistente. En otras palabras, zfc^{+} ser a una teor a trivial. La imposibilidad de dar esta de nicion es un simple corolario del teorema de Tarski. Ahora se esta en condiciones de dar una version formal de este resultado.

Teorema 2.9 (Tarski. Inde nibilidad de la verdad). Si th L es una teor a capaz de interpretar relativamente q y existe una formula T (v) 2 L tal que, para toda oracion ' 2 L, th prueba

T (p'q) $ ' (Esquema-T)

donde p'q denota en th el codigo de G•odel de ', th es inconsistente.[10]

Demostracion. Si th es capaz de interpretar relativamente q, es capaz, por un lado, de codi car la sintaxis de L y, por otro, de probar una traduccion del lema diagonal debil. Aplicando este lema al predicado :T v, existe una oracion tal que

th ` :T p q $

que contradice directamente su instancia correspondiente del Esquema-T. □

---

[9] ***Si existiera, el axioma de separacion de*** zfc^{+} ***permitir a inferir la existencia del conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de s mismos, esto es, el conjunto de Russell, que lleva directamente a inconsistencias.***

[10] ***Notese que el guion en `Esquema-T' diferencia al Esquema T*** de este principio formulado en un lenguaje de primer orden, una de sus posibles formalizaciones.

En otras palabras, si una teor a contiene su propio predicado de verdad y es tanto o mas poderosa que la aritmetica de Robinson |y ciertamente zfc^+ lo es| es posible formular una oracion del mentiroso y reproducir en la teor a el razonamiento informal que lleva de este tipo de oraciones a una contradiccion. Se obtiene as la paradoja del mentiroso en una de sus versiones formales. Si la de nicion 2.5 proveyera una estructura M en la cual el vocabulario de L^+_{zfc} sea interpretado de modo estandar, el predicado de L^+_{zfc}

$$\mathrm{Sent}_{L^+zfc}(v) \wedge \forall g(\mathrm{As}_{L^+zfc}(g; M) \rightarrow \mathrm{Sat}_{L^+zfc}(g; v; M))$$

|que abrevio T v| ser a tal que

$$zfc^+ \vdash T\ulcorner\varphi\urcorner \leftrightarrow (\varphi)$$

para toda φ de L^+_{zfc}, donde $(\varphi) = \varphi$. Por lo tanto, zfc^+ probar a todas las instancias del Esquema-T dadas por oraciones de su propio lenguaje y, en virtud del teorema de inde nibilidad de la verdad de Tarski, ser a inconsistente.

>Implica esto que se debe aceptar la tesis del pesimismo semantico, esto es, la idea de que hay lenguajes para los cuales no es posible dar una de nicion de verdad? En 1944 Tarski sostiene que

> It should be noticed that these terms \object-language" and \metalanguage" have only a relative sense. If, for instance, we become interested in the notion of truth applying to sentences, not of our original object-language, but of its meta-language, the latter becomes automatically the object-language of our discussion; and in order to de ne truth for this language, we have to go to a new meta-language|so to speak, to a meta-language of a higher level. In this way we arrive at a whole hierarchy of languages. (Tarski, 1944, p. 350)

Luego, es posible dar una de nicion de verdad para un lenguaje cualquiera en la medida en se encuentre un lenguaje de nivel superior o, como tambien suele decir Tarski, un lenguaje esencialmente mas rico, que haga las veces de metalenguaje. Dado que Tarski ofrece sus de niciones de verdad absoluta en el marco de la teor a general de clases, traduce esta riqueza esencial para este caso particular en la idea de ordenes superiores. Un lenguaje de orden superior a otro |v.g., un lenguaje de segundo orden con respecto a uno de primer orden| contiene variables y cuanti cadores que var an sobre una coleccion que contiene entre sus miembros a la clase de objetos de los cuales `habla' el lenguaje de orden inferior y, por esta razon, es capaz de dar una de nicion de verdad para este ultimo. En 1933 Tarski concluye que no es posible dar una de nicion de verdad absoluta para el lenguaje de la teor a general de clases pues, al contener todos los ordenes, no existe un lenguaje de orden mayor desde el cual dar la de nicion.

La situacion para L^{+}_{zfc} y zfc^{+} parece ser analoga. Si bien las de niciones de verdad en zfc^{+} no recurren a variables de distinto orden sino a conjuntos que contienen otros conjuntos, para poder dar una de nicion de verdad absoluta para un lenguaje L en zfc^{+} se precisa ahora que esta teor a pruebe la existencia de un conjunto isomor co al conjunto dado por la ontolog a de la interpretacion pretendida de L. As interpreto preliminarmente la idea de riqueza esencial para el caso particular de las de niciones dadas desde la teor a de conjuntos. Dado que la ontolog a de zfc^{+} contiene todos los conjuntos, entre los cuales no se encuentra ningun conjunto isomor co al conjunto de todos los conjuntos pues este no existe, no es posible dar una de nicion de verdad absoluta para L^{+}_{zfc}.

No obstante, existen otros caminos a explorar. Por un lado, el metodo axiomatico, en el que Tarski (1933, 1944) mismo incursiona. Por otro, interpretaciones alternativas razonables de la idea de riqueza esencial, que permitan trabajar con entidades diferentes a los conjuntos. Exploro primero esta ultima v a.

2.3.2. Jerarqu as semanticas

Raul Orayen (2003) propone relajar el requisito de la teor a de modelos de acuerdo con el cual los conjuntos son las unicas entidades que pueden dar lugar a dominios e interpretaciones de lenguajes de primer orden, para poder contar con una interpretacion canonica de L_{zfc}. Con este objetivo introduce la nocion de conjunto de segundo tipo o, preferentemente, clase. En este apartado exploro la propuesta de Orayen.[11]

La metateor a, una teor a de clases, ya no sera zfc^{+} sino mas poderosa. Sean L_{tc_0} otro nombre para L^{+}_{zfc}, tc_0 otro nombre para zfc^{+}, L_{tc_1} el resultado de incorporar una constante de individuo c_0 a L_{tc_0} y tc_1 la teor a de primer orden formulada en L_{tc_1} que cuenta con los axiomas de zfc^{+} tal como aparecen en esta teor a mas estos mismos axiomas relativizados al predicado v 2 c_0.

En un sentido bastante claro, tc_1 es esencialmente mas rica que tc_0 ya que, si bien no prueba la existencia del conjunto de todas las entidades de las cuales L_{tc_0} naturalmente habla |i.e., todos los conjuntos| s prueba la existencia de una coleccion c_0 llamada `clase', que las contiene a todas. Ademas, en virtud del axioma no relativizado de separacion, tc_1 es capaz de probar la existencia de una coleccion que contiene todos y exactamente aquellos pares ordenados hx; yi de miembros de c_0 tales que x 2 y, esto es,

[11]*Una v a alternativa pero semejante consiste en permitir modelos constituidos no ya por entidades de tipo conjuntista sino por pluralidades, colecciones que, a diferencia de aquellas, no dan lugar a nuevas entidades diferentes de los miembros que las componen. Veanse Boolos (1984, 1985), Rayo & Uzquiano (1999) y Uzquiano (2003). Para explorarla ser a necesario presentar el lenguaje y la teor a de* las pluralidades, lo cual me llevar a demasiado lejos del punto central de esta tesis.

tc_1 es capaz de probar la existencia de la interpretacion estandar de L^+_{zfc}.[12] Asimismo, es posible de nir en tc_1 la nocion de asignacion sobre esta interpretacion y, por tanto, las nociones de satisfaccion y verdad absoluta para oraciones de L^+_{zfc} exactamente como en las de niciones 2.6, 2.7 y 2.8. La de nicion de verdad resultante es no solo formalmente correcta sino tambien materialmente adecuada.

La pregunta que surge naturalmente ahora es si acaso se puede de nir verdad absoluta para oraciones de L_{tc_1} . Dada la nueva interpretacion propuesta de la idea de riqueza esencial, lo que se precisa es una metateor a capaz de probar la existencia de una coleccion de todas las clases que pertenecen a la ontolog a pretendida de L_{tc_1} . Puesto que la existencia de una clase con estas caracter sticas lleva a un absurdo en la teor a de clases tc_1, la metateor a debera postular un nuevo tipo de entidades, las hiperclases. Sea tc_2 un sistema formulado en el lenguaje L_{tc_2} , que resulta de expandir L_{tc_1} con una nueva constante de individuo c_1 para la hiperclase de todas las clases, y cuenta con los axiomas de tc_1 relativizados a v 2 c_1 mas una copia de los axiomas de zfc^+ sin relativizar. Al igual que antes, tc_2 es capaz de de nir la interpretacion estandar de L_{tc_1} y las nociones de asignacion, satisfaccion y verdad adecuada y correctamente para este lenguaje.

La iteracion de este proceso da lugar a una jerarqu a de lenguajes L_{tc_0} ; L_{tc_1} ; L_{tc_2} ; : : : , donde cada miembro de la jerarqu a es el lenguaje objeto del que le sigue y cada lenguaje sucesor es el metalenguaje de su predecesor, y una jerarqu a de teor as tc_0, tc_1; tc_2; : : : , donde cada una funciona como metateor a desde la cual de nir verdad para oraciones del lenguaje de la teor a que la precede. De este modo, es posible de nir verdad absoluta para las oraciones de cualquier lenguaje en la jerarqu a. El proceso puede iterarse trans nitamente, hasta que la notacion para numeros ordinales a disposicion lo permita (cf. Halbach (1995)).

Por supuesto, esta construccion genera las inquietudes que suelen plantearse al-rededor de las jerarqu as, la mas importante de las cuales es quizas como de nir verdad para el lenguaje en el cual se construye la jerarqu a misma, si es que es (y parece ser) un lenguaje formal |i.e., la union de los lenguajes de cada uno de los niveles|. De no ser posible, esto implicar a que la tesis de la generalidad absoluta, esto es, la posibilidad de hablar acerca de todo como en \Todo es identico a s mismo", es falsa. No me adelanto ac en estas cuestiones, que me llevaran demasiado lejos del objetivo de esta seccion (cf. Rayo & Gabriel Uzquiano (2006a)).

[12] ***La siguiente instancia del axioma de separacion o comprension restringida da lugar a la interpretacion canonica de*** 2 ***en*** L^+_{zfc}***:***

9x8y(y 2 x \$ y 2 c^2_0 ^ 8z; w(y = hz; wi ! z 2 w))

Otra duda que despierta la jerarqu a introducida es cual es la diferencia, si es que existe, entre un conjunto, una clase, una hiperclase, etc. Todas estas entidades `colectivas' obedecen axiomas analogos. El cambio de nombre parece responder exclusivamente a la necesidad de dar una de nicion de verdad para los lenguajes de cada una de estas teor as, es puramente ad hoc (cf. Boolos (1984)). No me queda claro que esto sea realmente un problema.

2.3.3. Jerarqu as axiomaticas

El enfoque axiomatico |el camino que sigue Tarski para ofrecer una nocion de verdad para la teor a general de clases o, en este caso, para zfc^{+}| evita los problemas que he se~nalado para el enfoque semantico, aunque abandona el proyecto de dar una de - nicion formalmente correcta, i.e., expl cita, del predicado veritativo. Hay dos formas de proceder. Una primera opcion que se encuentra ya en Tarski (1933, x5) consiste en to-mar como axiomas todas las instancias del Esquema T Tipeado para oraciones de L^{+}_{zfc}, aunque ac presento un esquema de teor a para cualquier lenguaje L que no contenga el predicado T . Una segunda opcion es tomar como axiomas clausulas semejantes a las de la de nicion recursiva de verdad 2.8 para L_{zfc}, dejando de lado los modelos y empleando

Sat como un s mbolo de predicado diadico primitivo. A continuacion exploro ambas v as en este orden.

Sea th una teor a de primer orden cualquiera formulada en L capaz de codi car su propia sintaxis que axiomatice (parte de) el conjunto de oraciones verdaderas de L bajo su interpretacion pretendida.

De nicion 2.10 (tb(th)). tb(th) L[fT g extiende th mediante todas las instancias del Esquema-T dadas por oraciones ' 2 L.

tb(th) (por Tarski-biconditionals sobre th) es una teor a desentrecomilladora de la verdad, porque sus axiomas estan dados exclusivamente por instancias del Esquema-T que, como se vera en el cap tulo 4, es un principio de desentrecomillacion. Las instancias del Esquema-T en tb(th) garantizan automaticamente la adecuacion material de esta teor a como una de nicion de verdad, aunque no la correccion formal. Ahora, para dar un concepto de verdad aplicable a oraciones del lenguaje de tb(th) es preciso iterar el proceso: incorporar un nuevo predicado monadico al lenguaje para expresar verdad en el lenguaje de tb(th) y nuevos axiomas, semejantes al Esquema-T pero ahora para oraciones ' del lenguaje de tb(th). As , se obtiene una jerarqu a de lenguajes y otra de teor as axiomaticas de la verdad, que puede extenderse, al igual que las jerarqu as anteriores, a niveles trans nitos.

Tambien es posible dar una version mas completa de esta axiomatizacion mediante bicondicionales uniformes.[13]

De nicion 2.11 (utb(th)). utb(th) $L \cup \{T\}$ que extiende th mediante todas las instancias de

$$\forall t_1 \dots t_n (T \ulcorner \varphi(\dot{t}_1, \dots, \dot{t}_n) \urcorner \leftrightarrow \varphi(t_1, \dots, t_n)) \qquad \text{(Esquema-T Uniforme)}$$

donde $\varphi \in L$ tiene n variables libres.

utb(th) (por Uniform Tarski-biconditionals sobre th) tambien es considerada una teor a desentrecomilladora. De acuerdo con Tarski (1933), las teor as cuyos axiomas estan dados meramente por instancias formales del Esquema T Tipeado, ya sean unifor-mes o no, son altamente incompletas, porque no son capaces de probar ciertos principios generales como los de consistencia y completitud introducidos en el apartado 2.2.2 (cf. Halbach (2011, teorema 7.6)). Si bien es claro que tb(th) prueba todas las instancias de

$$\neg T(\ulcorner\varphi\urcorner) \vee \neg T(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)$$

con $\varphi \in L$, no es capaz de probar el principio general de consistencia dado por

$$\forall x(Sent_L(x) \to \neg T(x) \vee \neg T(\dot{\neg} x)) \tag{2.6}$$

y lo mismo con respecto a otros principios generales que intuitivamente gobiernan el predicado de verdad. Esto evidencia que el requisito de adecuacion material para una teor a de la verdad es solo una condicion m nima para Tarski, no es su ciente como podr a en principio esperarse.

Tarski considera la posibilidad de agregar este y otros principios generales como axiomas a tb(th) (y, correspondientemente, a cada teor a de la jerarqu a), pero rapi-damente la descarta por considerarla ad hoc. Desde su punto de vista, el unico criterio razonable para una axiomatizacion del predicado de verdad es la categoricidad, i.e., que el sistema caracterice un vocamente la extension de T : si se agrega a la teor a una copia de los axiomas para T pero esta vez para T', deber a poder probarse dentro del sistema que T y T' son coextensionales. Lamentablemente, Tarski advierte, esto no es posible. El teorema de Beth implica que si un predicado es categoricamente axiomatizable sobre una teor a, es posible tambien dar una de nicion expl cita de este en aquella (cf. Chang & Keisler (1990, p. 90 y ss)), lo cual contradir a el teorema 2.9.

[13] Para los detalles sobre la notacion empleada en la formulacion del Esquema-T Uniforme, vease el apartado 1.2.3.

Por estas razones Tarski pre ere de nir el predicado de verdad a axiomatizarlo. Sin embargo, sus razones en contra del abordaje axiomatico no pueden ser concluyentes. De serlo, se aplicar an a cualquier teor a incompleta en el sentido de G•odel, como a la aritmetica de Peano o a la teor a de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Ninguna de estas dos ofrece caracterizaciones categoricas de las propiedades de los numeros naturales o los conjuntos de los cuales hablan, respectivamente, como indican los teoremas de incompletitud de G•odel (vease el apartado 1.2.7). Como sostiene Halbach,

> The impossibility of a categorical axiomatization should not keep one from studying axiomatic theories of truth, any more than the impossibility of a complete axiomatization of arithmetic or of set theory should keep one from studying axiomatic systems for integers or sets. (Halbach, 2011, p. 23)

Una segunda opcion axiomatica que las de niciones tarskianas mismas sugieren consiste en tomar directamente las clausulas recursivas o composicionales de las de niciones de satisfaccion y transformarlas en axiomas, dando lugar a una teor a de la verdad composicional. Como una axiomatizacion de estas caracter sticas depende esencialmente de la sintaxis del lenguaje objeto, ilustro este camino mediante ejemplos: primero con L^{+}_{zfc} y luego con L^{+}_{pa}.

De nicion 2.12 (ct(zfc^{+})). Sea ct(zfc^{+}) la teor a formulada en la expansion de L^{+}_{zfc} con un predicado diadico Sat y uno monadico T que extiende zfc^{+} con los axiomas

ct(zfc^{+})1 8t; s8g(F orm$_{L^{+}zfc}$ (t=̣s) ! (Sat(g; t=̣s) \$ g(t) = g(s)))

ct(zfc^{+})2 8t; s8g(F orm$_{L^{+}zfc}$ (t2̣s) ! (Sat(g; t2̣s) \$ g(t) 2 g(s)))

ct(zfc^{+})3 8x(F orm$_{L^{+}zfc}$ (x) ! 8g(Sat(g; x) \$:Sat(g; :̣x)))

ct(zfc^{+})4 8x; y(F orm$_{L^{+}zfc}$ (x!̣y) ! 8g(Sat(g; x!̣y) \$ (Sat(g; x) ! Sat(g; y))))

ct(zfc^{+})5 8x; y(F orm$_{L^{+}zfc}$ (8̣xy) ! 8g(Sat(g; 8̣xy) \$ 8g^{0}(8z(V ar(z) ^ z 6= x ! g^{0}(z) = g(y)) ! Sat(g^{0}; y))))

ct(zfc^{+})6 8x(T x \$ Sent$_{L^{+}zfc}$ (x) ^ 8gSat(g; x))

donde expresiones de la forma 8g' abrevian 8v(As$_{L^{+}zfc}$ (v) ! ') y As$_{L^{+}zfc}$ (v) de ne el conjunto al cual pertenecen todas y solo aquellas funciones que asignan conjuntos a los terminos de L^{+}_{zfc} tal que `?' tiene por imagen siempre al conjunto vac o y f t_1 : : : t_n, donde f es un s mbolo de funcion del lenguaje y t_1; : : : ; t_n son terminos, recibe la imagen de la n-tupla dada por lo que es asignado a t_1; : : : ; t_n a traves de la funcion de nida por f.

Procediendo por induccion sobre la complejidad de ' se puede probar que la teor a ct(zfc^{+}) (por Compositional Truth sobre zfc^{+}) implica todas las instancias del Esquema-T para L^{+}_{zfc}. Asimismo, es capaz de probar muchos de los principios generales que Tarski requiere, v.g., el principio de consistencia dado por (2.6) a partir de ct(zfc^{+})3 y ct(zfc^{+})6. Al igual que en el caso de tb(zfc^{+}), es posible iterar esta axiomatizacion agregando un nuevo predicado de satisfaccion y un nuevo predicado de verdad, ahora para formulas y oraciones del lenguaje de ct(zfc^{+}), y luego incorporando a esta teor a axiomas analogos, ahora relativizados a formulas y oraciones del lenguaje de ct(zfc^{+}). Llevar esto a cabo reiteradas veces da lugar nuevamente a una jerarqu a de lenguajes, teor as y axiomatizaciones del predicado de verdad, que puede extenderse a niveles trans nitos (cf. Halbach (2011, cap. 9)). Naturalmente, estas axiomatizaciones tampoco seran completas o categoricas, en virtud del primer teorema de incompletitud de G•odel.

El requisito de correccion formal que Tarski impone a las de niciones de verdad tiene por objeto dar una garant a automatica de consistencia al concepto de nido. Pe-ro, como se~nala Etchemendy (1988), esto no es necesario, en tanto dar una de nicion expl cita no es el unico modo de garantizar consistencia. Si el predicado de verdad no es introducido expl citamente, har falta dar una prueba de su consistencia aparte. Esto es efectivamente lo que hace Tarski (1933, x5, teorema III) mediante un argumento por compacidad cuando introduce un predicado de verdad como un primitivo en la meta-teor a, dando lugar a una teor a del estilo de tb(zfc^{+}). Esta prueba de consistencia tarskiana puede modi carse levemente para probar la consistencia de tb(th). La con-sistencia de ct(zfc^{+}) tambien puede establecerse, pero su demostracion es un tanto mas compleja (cf. Halbach (2011, teorema 8.42)).

Como tambien es posible codi car las expresiones de cualquier lenguaje de primer orden con numeros, L_{pa} es capaz de hablar de ellos y de nir ciertas propiedades recursivas suyas, y pa de representar una cantidad considerable de estas propiedades (vease el apartado 1.2.3), tambien es posible axiomatizar las clausulas recursivas tarskianas sobre pa^{+}. Dado que, ademas, L^{+}_{pa} contiene nombres para cada uno de los individuos del dominio de su modelo pretendido, se puede prescindir del predicado de satisfaccion y las asignaciones, y trabajar unicamente con el de verdad y el auxilio de la funcion sustitucion (vease el apartado 1.2.3). Por ejemplo, en lugar de 8gSat(g; p'q) se puede escribir 8tT p'q(t; pvq) o, directamente, 8tT p'(t.)q, si ' contiene una unica variable libre v. Recuerdese que L_T extiende L^{+}_{pa} con T y pat es el resultado de formular pa^{+} en L_T
(vease el apartado 1.2.4).

De nicion 2.13 (ct(pa⁺)). ct(pa⁺) L_T es la teor a que extiende pat con los si-guientes axiomas:[14]

ct(pa⁺)1 8t; s(T (t=.s) $ t = s)

ct(pa⁺)2 8x(Sent$_{L+pa}$ (x) ! (T :.x $:T x))

ct(pa⁺)3 8x; y(Sent$_{L+pa}$ (x!.y) ! (T (x!.y) $ (T x ! T y)))

ct(pa⁺)4 8x; v(Sent$_{L+pa}$ (8.vx) ! (T 8.vx $ 8tT x(t=v)))

Este sistema tambien puede iterarse hasta cualquier ordinal para el cual se dis-ponga de notacion en L⁺$_{pa}$ (vease el apartado 1.4). Las teor as de la jerarqu a resultante se conocen como `teor as de la verdad rami cada' (Rami ed Truth). Sea L<$_0$ otro nom-bre para L⁺$_{pa}$ y, para cada 0 < $_0$, sea L< el resultado de expandir L⁺$_{pa}$ mediante los nuevos predicados monadicos T para cada < . pat< es el resultado de for-mular pa⁺ en L< , con todas instancias del axioma esquema de induccion dadas por las formulas de este lenguaje. Como antes, si $_0$, Sent$_{L<}$ (v) representa en pa⁺ el conjunto de oraciones de L< . Sin embargo, para la formulacion de las teor as que siguen va a ser preciso a veces cuanti car sobre < $_0$, lo cual es posible dado que existe una codi cacion recursiva de los ordinales hasta $_0$. Por eso trabajo en su lugar con un predicado diadico Sent$_{L<}$ (v) := Sent$_L$(; v).

De nicion 2.14 (rt<). Sea rt<$_0$ otro nombre para pa⁺, rt<$_1$ otro para ct(pa⁺), reemplazando las ocurrencias de T por T$_0$ y, para todo otro $_0$, sea rt< la teor a formulada en L< que extiende pat< con los siguientes axiomas para cada < < :

rt< 1 8t; s(T (t=.s) $ t = s)

rt< 2 8x(Sent$_{L<}$ (x) ! (T :.x $:T x))

rt< 3 8x; y(Sent$_{L<}$ (x!.y) ! (T (x!.y) $ (T x ! T y)))

rt< 4 8x; v(Sent$_{L<}$ (8.vx) ! (T 8.vx $ 8tT x(t=v))))

rt< 5 8t(Sent$_{L<}$ (t) ! (T (T. t) $ T t))

rt< 6 t (Sent L$_<$ (t) !(T (T t) $T t))
8 8 .

Si > 1, los axiomas rt< 1-rt< 4 son simplemente generalizaciones de los axio-mas de ct(pa⁺) para expresiones de L< y sus predicados de verdad. rt< 5 completa el axioma rt< 1 al lidiar con las nuevas formulas atomicas del lenguaje. El axioma rt< 6,

[14] *En algunas partes de la literatura esta teor a aparece bajo el nombre de t(pa).*

en cambio, no tiene analogo en ct(pa^{+}) sino que establece la acumulatividad de los pre-dicados de verdad: si < < $_{0}$, T y T coinciden en todas las oraciones de L $_{+1}$ y, si es un ordinal l mite, T es la union de todos los predicados de nivel inferior. Notese que en este axioma no se cuanti ca sobre los sub ndices de los predicados de verdad, ya que esto no es posible, sino sobre los s mbolos cuyos sub ndices son menores a un ordinal dado , que conforman un conjunto recursivo bajo ciertas codi caciones naturales de los predicados de la jerarqu a con numeros naturales.

Si $_{0}$ y ' 2 L< , rt< $_{+1}$ prueba todas las instancias del esquema

T (p'q) $ '

satisfaciendo el requisito de adecuacion material de Tarski para oraciones de L< . Las clausulas composicionales implican tambien los principios de consistencia y completitud y otros principios generales deseables a para cada uno de los predicados de verdad del lenguaje de la teor a.

Hay entonces in nitas teor as a disposicion, una por cada ordinal $_{0}$. Las mas naturales parecen ser aquellas dadas por !, que contiene todos los niveles nitos; $_{0}$, porque pa^{+} es capaz de probar instancias del principio de induccion trans nita (IT) para (los codigos de los) ordinales menores a $_{0}$ ($_{0}$, vease el apartado 1.4); y $_{0}$, porque una vez que se avanza hasta $_{0}$ mas instancias de (IT) son demostrables, con lo cual se puede iterar la teor a mas alla, que a su vez dar lugar a nuevas instancias de (IT), etc. Este proceso alcanza un punto jo en $_{0}$: rt< $_{0}$ no prueba instancias de (IT) trans nita para segmentos de ordinales mas grandes que $_{0}$.

En consecuencia, la distincion tarskiana entre lenguaje objeto y metalenguaje, al trabajar unicamente con teor as de verdad tipeada, desemboca inevitablemente en jerarqu as o en lenguajes formales para los cuales no es posible dar una de nicion de verdad a la Tarski, esto es, en el pesimismo semantico.

3

Teor as de la verdad no tipeadas

> \So one often hears that the surest way of keeping a language paradox-free is to impose an absolute ban on all self-reference. \This may be using a cannon against a y," it is said, \but at least it stops the y.""
>
> { Stephen Yablo, `Paradox without Self-Reference'

Si bien las nociones tarskianas resultaron de extrema utilidad y constituyeron una clara mejora de la situacion en la cual se encontraban previamente las investigaciones en torno a la verdad, la distincion entre lenguaje y metalenguaje, la imposibilidad de utilizar un predicado de verdad para adscribir verdad a oraciones que contienen ya este predicado y, en consecuencia, la enorme brecha entre el predicado veritativo del lenguaje natural y las nociones tarskianas, dieron lugar a una extensa serie de cr ticas e intentos por dar de niciones o teor as de verdad que superen las di cultades del abordaje tipeado de Tarski, aunque sin apartarse de su metodolog a formal.

Naturalmente, si se quiere abandonar la distincion entre lenguaje y metalenguaje es preciso tomar ciertas medidas para evitar caer en las hipotesis del teorema de inde - nibilidad de la verdad de Tarski y, por ende, en trivialidad. Grosso modo, las teor as de verdad no tipeada disponibles en la literatura han tomado alternativamente dos caminos: o bien debilitar la logica, i.e., abandonar la logica clasica, o bien restringir signi cativa-mente las instancias del Esquema-T, si bien no unicamente a oraciones que no contienen el predicado veritativo.

En este cap tulo exploro algunas de las teor as no tipeadas mas salientes de la literatura, aquellas que son relevantes para esta investigacion (vease el apartado 5.3), todas ellas inspiradas en el trabajo de Tarski. En 3.1 presento las teor as semanticas paracompletas de Punto Fijo de Kripke, junto con dos axiomatizaciones clasicas. La seccion 3.2 considera la teor a semantica clasica de Leitgeb basada en su nocion de dependencia. En 3.3 presento la teor a axiomatica clasica Friedman-Sheard. Finalmente, en 3.4, introduzco tres teor as de la verdad cuya logica subyacente es paraconsistente: una teor a formulada sobre la logica paraconsistente basica, la teor a de Graham Priest y la teor a de David Ripley.

3.1. Las teor as de Punto Fijo de Kripke

Aunque vago y problematico, el lenguaje natural, al contener un unico predicado de verdad aplicable a oraciones que ya lo contienen, presenta ciertos usos deseables del pre-dicado veritativo que no es posible replicar con predicados tarskianos. En otras palabras, las nociones formales tipeadas de verdad dejan de lado ciertas caracter sticas del lengua-je cotidiano, algunas de las cuales son necesarias para ciertos propositos. Por ejemplo, no es posible utilizar un predicado tarskiano para a rmar que todas las oraciones de la forma \Si A entonces A" son verdaderas, pero esto es perfectamente posible e inofensivo en el lenguaje natural. Aun mas, ningun predicado de verdad de la jerarqu a de Tarski puede expresar la idea de que todos los teoremas de cada metateor a de esta misma jerarqu a son verdaderos, lo cual, si la jerarqu a es correcta, es ciertamente deseable.

Por otro lado, Kripke (1975) se~nala que la asignacion sintactica de niveles de verdad a una oracion, el hecho de que deba usarse un predicado con el ndice correcto segun el caso, sabiendolo de antemano, imposibilita las adscripciones ciegas de verdad. Se carece por tanto de predicados de verdad para decir que ciertos enunciados, de los cuales no se conoce su formulacion expl cita, son verdaderos. El ejemplo famoso de Kripke concierne a Jones y a Nixon. Supongase que Jones a rma el siguiente y unico enunciado sobre Watergate:

La mayor parte de las a rmaciones de Nixon sobre Watergate son falsas.

mientras que Nixon dice la misma cantidad de enunciados verdaderos que falsos sobre Watergate mas el que sigue:

Todo lo que Jones dice sobre Watergate es verdadero.

Si bien no hay nada intr nsecamente problematico con cada una de estas oracio-nes, puestas en conjunto llevan a una contradiccion en el marco de la logica clasica. Ambas son perfectamente gramaticales y es solo a causa de las particularmente desfavo-rables circunstancias emp ricas que juntas llevan a paradojas. Para evitar este problema Jones o Nixon deber an haber averiguado primero cuales son las aserciones hechas por el otro acerca de Watergate, asignado niveles a cada uno de los predicados de verdad que ocurrieran en ellas y luego elegir en nivel apropiado de su propia asercion, lo cual es absurdo. De acuerdo con Kripke (1975, p. 696),

> This means that in some sense a statement should be allowed to seek its own level, high enough to say what it intends to say. It should not have an intrinsic level xed in advance, as in the Tarski hierarchy.

Kripke no fue el primero en criticar el enfoque tarskiano, pero s , simultaneamente con Robert L. Martin & Peter W. Woodru (1975), en ofrecer una teor a formal en la cual las di cultades se~naladas fueran superadas. En ambos casos, se ofrecen modelos para un lenguaje formal semanticamente cerrado, que contiene su propio predicado veritativo, esto es, un unico predicado aplicable tambien a oraciones que lo contienen,. Me centro exclusivamente en las teor as de Kripke que, a pesar de haber sido in uenciadas por la de Martin & Woodru (cf. Kripke (1975, p. 699)), la incluyen y son mejor conocidas.

La estrategia kripkeana para evadir las hipotesis del teorema de Tarski (teorema 2.9) consiste, por un lado, en abandonar la logica clasica por una paracompleta, donde falla el principio de Tercero Excluido, permitiendo que ciertas oraciones de los lenguajes formales para los que se desea de nir verdad, v.g., las paradojicas, no sean verdaderas ni falsas sino que carezcan de valor de verdad. Por otro lado, Kripke modi ca levemente la Convencion T (de nicion 2.1): en lugar de satisfacer las instancias del Esquema-T como condicion de adecuacion material, valida las reglas

$$\frac{'}{T\ p'q} \quad \text{(T-Intro)} \qquad\qquad \frac{T\ p'q}{'} \quad \text{(T-Elim)}$$

tomadas en conjunto, para la introduccion y eliminacion del predicado veritativo. La concepcion kripkeana de la verdad puede resumirse en la siguiente a rmacion: \We may say that we are entitled to assert (or deny) of a sentence that it is true precisely under the circumstances when we can assert (or deny) the sentence itself." (Kripke, 1975, p. 701)

Las reglas T-Intro y T-Elim, tambien llamadas `reglas de captura' y `liberacion', son equivalentes al Esquema-T en logica clasica pero, como se vera mas adelante en esta seccion, no lo implican en ciertas logicas paracompletas adoptadas por Kripke, como k3 y b3 (de niciones 3.3 y 3.5), donde falla el metateorema de la deduccion.[1] Tanto el Esquema-T como las reglas T-Intro y T-Elim son denominados `principios de verdad

[1]*Esto es, no siempre es el caso de que, si ; ' $_{k3}$ ', entonces $_{k3}$ ' ! ', y lo mismo para b3.*

transparente' o, directamente, `de transparencia', porque permiten `ver' la oracion de la cual se predica verdad `a traves' del predicado. Tambien suele referirse a ellos como `principios de equivalencia': en ambos casos, la oracion de la cual se predica verdad y su predicacion son equivalentes, aunque en un caso esta equivalencia se expresa en el lenguaje objeto mientras que en el otro se expresa en el metalenguaje. A diferencia del enfoque tarskiano, el kripkeano permite instancias de estos principios generadas por oraciones en las cuales T mismo ocurre y sus teor as son, en consecuencia, teor as libres de tipos.

En lo que resta de esta seccion presento en detalle dos de los tres caminos que Kripke recorri para ilustrar esta idea, segun las necesidades posteriores de la presente investigacion. En ambos casos, el objetivo de Kripke es extender el modelo estandar del lenguaje de la aritmetica a un modelo del lenguaje ampliado mediante un predicado monadico T para expresar verdad que satisfaga las reglas T-Intro y T-Elim. El resultado es una familia de modelos para este lenguaje ampliado, razon por la cual se llama a las teor as kripkeanas `semanticas', en contraste con abordajes axiomaticos.[2]

En 3.1.1 presento las dos logicas paracompletas sobre las cuales Kripke llevo a cabo cada una de las teor as semanticas que introduzco y cuyas propiedades exploro en 3.1.2. Posteriormente, en 3.1.3, presento tambien dos teor as axiomaticas inspira-das en las teor as semanticas de Kripke: kf, por Kripke-Feferman, una axiomatizacion mas o menos directa de una de las teor as semanticas de Kripke en logica clasica, en 3.1.3.1, y putb, por Positive Uniform Tarski Biconditionals, una subteor a de kf dada exclusivamente por instancias del Esquema-T Uniforme, en 3.1.3.2.

3.1.1. Logicas paracompletas

El objetivo es extender N^+, el modelo estandar de L^+_{pa} (que hace las veces de modelo base, provee los `hechos no semanticos' del mundo y, a la vez, provee la teor a de la sintaxis necesaria para tener un predicado de verdad en el lenguaje, i.e., nombres para las expresiones y ciertos predicados sintacticos como los introducidos en el apartado 1.2.3), a un modelo de todo L_T en el cual una oracion ' 2 L_T pertenezca a la extension de T si y solo si ' es verdadera en el modelo.[3] Como, por el teorema de inde nibilidad de Tarski, esto no es posible para modelos y esquemas de valuacion clasicos, Kripke elige modelos no clasicos que llama `parciales' o `paracompletos' y esquemas de valuacion no clasicos en su lugar.

[2] ***Este cali cativo no debe confundirse con el adjetivo homonimo que Tarski utiliza para remarcar que sus teor as son de corte correspondentista,*** i.e.***, entienden a la verdad como un tipo de relacion entre el lenguaje y el mundo, de alguna manera. Vease la introduccion al cap tulo 2.***

[3] ***A decir verdad, Kripke (1975***) no es tan espec co al introducir el lenguaje para el cual de ne verdad, pero este detalle no afecta en nada el esp ritu de la presentacion.

De nicion 3.1 (Modelos no clasicos). M es un modelo no clasico de un lenguaje de primer orden L sii se comporta como un modelo clasico con respecto a las constantes de individuo y s mbolos de funcion de L y el predicado de identidad, mientras que, para cada predicado n-adico R del lenguaje distinto de =, $R^M = hR^{M+}; R^M$ i, donde
$R^{M+}; R^M$ jMj^n y $R^M \setminus R^{M+}$ = ?.

Mientras que en un modelo clasico M cada predicado R de L recibe unicamente un subconjunto R^M de n-tuplas del dominio como su interpretacion, que usualmente se interpreta como la extension de R, mientras que su complemento sobre jMj^n es la antiextension, en los modelos no clasicos recibe un par ordenado de subconjuntos de jMj^n, hR^{M+}; R^M i. Desde el punto de vista de las logicas paracompletas, R^{M+} es la extension de R y R^M su antiextension, que puede no ser el complemento de R^{M+} sobre conjunto de n-tuplas de elementos del dominio.[4] Por esta razon la logica paracompleta ve los modelos no clasicos como modelos parciales. Si bien no es posible que R^{M+} y R^M tengan miembros en comun, i.e., que un objeto o tupla de objetos del dominio del modelo pertenezca tanto a la extension como a la antiextension de un predicado, su union podr a no agotar el dominio; podr a haber objetos o tuplas de objetos que no pertenezcan ni a la extension ni a la antiextension de un predicado.

Dado un modelo parcial M, no existe un unico modo de asignar valores de verdad a las oraciones de L. Kripke considera tres esquemas de valuacion diferentes: Kleene fuerte, Kleene debil y el esquema supervaluacionista, cada uno de los cuales va a dar lugar a diferentes modelos de verdad transparente para L_T . Por esta razon se puede decir que Kripke no propone una unica teor a semantica, una unica familia de modelos, sino un metodo general para obtener teor as semanticas de la verdad. En funcion de esta investigacion, solo presento las familias basadas en los esquemas de Kleene fuerte y Kleene debil.[5]

De nicion 3.2 (Kleene fuerte). El esquema de valuacion Kleene fuerte sk para un lenguaje de primer orden L es el conjunto de funciones valuacion $v_{sk}{}^M$: L ! f1; 0; $\frac{1}{2}$ g para cada modelo no clasico M de L tales que[6]

$$v_{sk}{}^M(t = s) = \begin{cases} 1 & \text{si } t^M = s^M \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

[4] *En otros abordajes paracompletos tambien la relacion de identidad puede contar con una extension y una antiextension no exhaustivas. En esta investigacion bloqueo esta posibilidad para simpli car la presentacion.*

[5] *Para una presentacion mas detallada de los tres esquemas de valuacion y de las teor as de Kripke, vease Paula Teijeiro & Damian Szmuc (2014).*

[6] *Utilizo una clausula sustitucional para los cuanti cadores porque en los modelos con los cuales trabajo, i.e., extensiones de N^+, todos los objetos del dominio tienen un nombre en L_T .* Estrictamente hablando deber a haber introducido asignaciones en este caso, pero lo evito para facilitar la lectura.

$v_{sk}{}^{M}(Rt_1; : : : ; t_n) =$ $^{8}1$ si $ht_1{}^{M}; : : : ; t_n{}^{M}i$ 2 R^{M+}

>0 si $^{h}t_1{}^{M}; : : : ; t_n{}^{M}$ i 2 R^{M}

$>$

$<\frac{1}{}$

$_2$ en caso contrario

:

- $v_{sk}{}^{M}(:') = 1$ $v_{sk}{}^{M}(')$
- $v_{sk}{}^{M}('\ !\ \ ) = max(1$ $v_{sk}{}^{M}('); v_{sk}{}^{M}(\ ))$
- $v_{sk}{}^{M}(8v') = minfv_{sk}{}^{M}('[t=x]) :$ t es un termino cerradog

La logica basada en modelos no clasicos y el esquema de valuacion sk que inter-preta en valor 1 como verdadero, 0 como falso y $\frac{1}{2}$ como ni verdadero ni falso se conoce como k3.

De nicion 3.3 (k3). Si L es un lenguaje de primer orden, L es un conjunto de oraciones y ' 2 L una oracion, ' es consecuencia logica de en k3 ($_{k3}$ ') sii no existe un modelo no clasico M de L tal que $v_{sk}{}^{M}(\ ) = 1$ (o, alternativamente, M $_{k3}$) y $v_{sk}{}^{M}(')$ 6= 1 (o M 2_{k3} ').

Luego, si una oracion no es ni verdadera ni falsa en un modelo, tampoco lo sera su negacion; y si un condicional tiene como antecedente y como consecuente oraciones cuyo valor de verdad no es clasico, el valor del condicional tampoco es clasico. Una interpreta-cion usualmente considerada natural del valor de verdad $\frac{1}{2}$ en k3 es la indeterminacion o falta de informacion. Kripke lo entiende como un tipo especial de vac o de verdad.

Una de las consecuencias mas salientes de adoptar k3 es que diversas reglas y principios validos en logica clasica resultan invalidos. Por ejemplo, como se quer a, algunas instancias del principio de Tercero Excluido

$$' \_ :' \qquad \text{(Tercero Excluido)}$$

reciben valor $\frac{1}{2}$ en algunos modelos parciales sobre sk y, por ende, no son verdaderas. Pero la falla de Tercero Excluido trae tambien consigo ciertas consecuencias que pueden resultar indeseables. Por ejemplo, la regla de introduccion del condicional

$$; '= \quad) \quad =' ! \quad : \qquad (I!)$$

o metateorema de la deduccion, ya no vale en k3. V.g., ' $_{k3}$ ', porque todo modelo en el cual ' es verdadera es tambien un modelo en el cual ' es verdadera, pero, a la vez, 2_{k3} ' ! ', i.e., el condicional de k3 no satisface identidad

' ! '

(Identidad)

porque si en una valuacion ' recibe valor $\frac{1}{2}$, de acuerdo con la de nicion 3.2, el valor del condicional ' ! ' tambien es $\frac{1}{2}$, i.e., no es verdadero de acuerdo con esa valuacion.

De nicion 3.4 (Kleene debil). El esquema de valuacion Kleene debil wk para un lenguaje de primer orden L es el conjunto de funciones valuacion v_{wk}^{M} : L ! f1; 0; $\frac{1}{2}$ g para cada modelo no clasico M de L tales que[7]

$$v_{wk}^{M}(t = s) = \begin{cases} 1 & \text{si } t^{M} = s^{M} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$v_{wk}^{M}(Rt_1; : : : ; t_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \langle t_1^{M}; : : : ; t_n^{M}\rangle \in R^{M+} \\ 0 & \text{si } \langle t_1^{M}; : : : ; t_n^{M}\rangle \in R^{M-} \\ \frac{1}{2} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $v_{wk}^{M}(:') = 1 \quad v_{wk}^{M}(')$

$$v_{wk}^{M}(' \; ! \;) = \begin{cases} \max(1 & v_{wk}^{M}('); v_{wk}^{M}( )) \text{ si } v_{wk}^{M}('); v_{wk}^{M}( ) \in f1; 0g \\ \frac{1}{2} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$v_{wk}^{M}(v') = \begin{cases} \min f v_{wk}^{M}('[t=x]) : t \text{ es un termino cerrado} g & \text{si } v_{wk}^{M}('(t)) \in f1; 0g \text{ para todo } t \\ \frac{1}{2} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La logica cuya nocion de consecuencia esta de nida en terminos de modelos no clasicos y el esquema de valuacion wk e interpreta los valores 1; 0 y $\frac{1}{2}$ como k3 se conoce como b3.

De nicion 3.5 (b3). Si L es un lenguaje de primer oden, L es un conjunto de oraciones y ' 2 L una oracion, ' es consecuencia logica de en b3 ($_{b3}$ ') sii no existe un modelo no clasico M de L tal que v_{wk}^{M}( ) = 1 (o M $_{b3}$) y v_{wk}^{M}(') 6= 1 (o M 2_{b3} ').

Si bien la negacion se comporta igual que en k3, el condicional y el cuanti cador universal son un tanto diferentes: basta que una formula contenga una subformula sin valor de verdad para que la formula original tambien carezca de valor de verdad. La interpretacion mas natural de $\frac{1}{2}$ en b3 es quizas `es un sinsentido', un modo alternativo a la falta de informacion de tener un vac o de verdad.

[7] *Al igual que en* sk*, me tomo la licencia de emplear una clausula sustitucional para los cuanti cadores* para no complicar la presentacion.

En b3 el Tercero Excluido, I! e Identidad tampoco valen. Aun mas, falla tambien la regla de introduccion del cuanti cador existencial:

$$\frac{'[t=v]}{9v'} \qquad \text{(I9)}$$

De la de nicion 3.4 y la de nibilidad del cuanti cador existencial en terminos del universal y la negacion (9v' := :8v:') se sigue que una formula de la forma 9v' adquiere valor 1 en un modelo M de acuerdo con wk si y solo si existe un termino t tal que $v_{wk}{}^{M}$('[t=v]) = 1 y para ningun termino t sucede que $v_{wk}{}^{M}$('[t=v]) = $\frac{1}{2}$. Luego, si en un modelo parcial M $v_{wk}{}^{M}$('[t=v]) = 1 y $v_{wk}{}^{M}$('[s=v]) = $\frac{1}{2}$, $v_{wk}{}^{M}$(9v') 6= 1; la regla I9 no es valida.

3.1.2. Modelos de punto jo

Los modelos no clasicos abren en principio la posibilidad lidiar con las oraciones problematicas de L_T no asignandoles ningun valor de verdad clasico, pero no indican cuales son estas oraciones ni si es posible un modelo de verdad transparente, i.e., donde valgan T-Intro y T-Elim. Es preciso se~nalar al menos un modelo en el cual este sea el caso.

Como L_T contiene exclusivamente un predicado diferente de =, T , este es el unico predicado que admite una interpretacion parcial en un modelo parcial de L_T . Luego, solo formulas que contengan T podran obtener un valor de verdad no clasico de acuerdo con los esquemas sk y wk: la no clasicidad esta restringida a formulas que contienen el predicado veritativo. En efecto, en los modelos que Kripke considera, el vocabulario de L_T que pertenece a L^{+}_{pa} es interpretado de acuerdo con N^{+}. Si !, sea hN^{+}; i el modelo parcial que extiende N^{+} a L_T asignando a T como su extension y el conjunto de formulas tales que su negacion pertenece a como su antiextension.

Para ambos esquemas de valuacion sk y wk Kripke muestra que algunos ! son tales que #(') 2 si y solo si ' recibe valor 1 en hN^{+}; i, i.e., que existen modelos hN^{+}; i en los cuales valen las reglas T-Intro y T-Elim. Para probar la existencia de tales conjuntos introduce operadores $_{ev}$ llamados `salto', para cada esquema de valuacion ev, v.g., sk y wk.

De nicion 3.6 (Operadores salto). Si ev es un esquema de valuacion para L_T , $_{ev}$ es una funcion que mapea subconjuntos de ! en subconjuntos de ! de modo tal que, si !,

$$^{ev}(\ ) := f \quad \#(') \, 2 \, L_T \ : v_{ev}^{hN^{+}; \ i}(') = 1 \quad g \ : \qquad (3.1)$$

Los conjuntos que Kripke quiere obtener son puntos jos del operador salto.

De nicion 3.7 (Modelos de punto jo). hN^{+}; i es un modelo de punto jo de L_T sobre el esquema de valuacion ev sii $_{ev}$( ) = .

Proposicion 3.8 (Kripke). hN^{+}; i es un modelo de punto jo de L_T sobre ev sii, para toda oracion ' 2 L_T ,

$$v_{ev}^{hN_{+}; i}(T p'q) = 1 , v_{ev}^{hN_{+}; i}(') = 1:$$

Por esta razon el enfoque kripkeano se conoce como `concepcion de la verdad como un punto jo'.

Corolario 3.9. Las reglas T-Intro y T-Elim preservan verdad en todos los modelos de punto jo de L_T sobre algun esquema de valuacion.

Esto hace de los modelos de punto jo modelos de verdad transparente, y de la teor a kripkeana a la cual pertenecen una teor a de la verdad transparente, porque su predicado de verdad lo es.

La existencia de puntos jos de $_{sk}$ y $_{wk}$ queda garantizada por el hecho de que ambas son funciones monotonamente crecientes: si !, $_{sk}$( ) $_{sk}$( ) y $_{wk}$( ) $_{wk}$( ).[8] Luego, si, para algun , $_{sk}$( ) ($_{wk}$( )), la secuencia dada por todas las iteraciones de $_{sk}$ ($_{wk}$) sobre , i.e.,

$$h ;\ _{sk}( );\ ^{2}_{sk}( ); : : : ;\ _{sk}( ); : : : i;$$

$$(h ;\ _{wk}( );\ ^{2}_{wk}( ); : : : ;\ _{wk}( ); : : : i)$$

donde, para cada ordinal , $_{sk}$( ) ($_{wk}$( )) es el conjunto que resulta de iterar veces el operador $_{sk}$ ($_{wk}$) sobre , ser a monotonamente creciente. Como solo hay una cantidad enumerable de oraciones de L_T , para algun , $_{sk}$( ) = $_{sk}^{+1}$( ) ($_{wk}$( ) = $_{wk}^{+1}$( )), esto es, la secuencia alcanzar a un punto jo.

Teorema 3.10 (Kripke). Existen conjuntos ! tales que $_{sk}$( ) = ; y otros con-juntos ! tales que $_{wk}$( ) = .[9]

Naturalmente, la existencia de puntos jos para los operadores salto permanece sujeta a la existencia de conjuntos ! tales que $_{sk}$( ) ($_{wk}$( )). El conjunto mas peque~no que satisface estas condiciones es ?. Los puntos jos de las secuencias

$$h?;\ _{sk}(?);\ _{sk}^{2}(?); : : : ;\ _{sk}(?); : : : i \tag{3.2}$$

[8] *Vease Kripke (1975, p. 703) para una prueba.*
[9] *Cf. Kripke (1975).*

y

$$h?; \; _{wk}(?); \; _{wk}{}^{2}(?); : : : ; \; _{wk}(?); : : : i \quad (3.3)$$

se conocen como `puntos jos m nimos' de $_{sk}$ y $_{wk}$.

Estas secuencias pueden entenderse como dando lugar a secuencias de modelos parciales $hN^{+}; _{sk}(?)i$ $(hN^{+}; _{wk}(?)i)$ de L_T . Al inicio de cada una de estas secuencias tanto la extension como la antiextension del predicado de verdad estan vac as. En el segundo lugar en las secuencias se produce la primera aplicacion de $_{sk}$ ($_{wk}$), e ingresan a la extension de T todas las oraciones que reciben valor 1 en $hN^{+}; ?i$ de acuerdo con k3 (b3) (y a la antiextension las que reciben valor 0), entre ellas, todas las oraciones de $L^{+}{}_{pa}$ que son verdaderas en N^{+}, v.g., 0 = 0. En el paso siguiente, se suman aquellas que son verdaderas en $hN^{+}; _{sk}(?)i$ $(hN^{+}; _{wk}(?)i)$ de acuerdo con k3 (b3), por ejemplo, T p0 = 0q. En el proximo paso ingresa, v.g., T pT p0 = 0qq, etc.

Como se~nala Kripke (1975, p. 701),

> There is no reason to suppose that all statements involving `true' will become decided in this way, but most will. Indeed, our suggestion is that the \grounded" sentences can be characterized as those which eventually get a truth value in this process.

Kripke adjudica el concepto de groundedness o fundacion a Hans G. Herzberger (1970).[10] Intuitivamente, las oraciones fundadas son aquellas cuya verdad o falsedad depende exclusivamente de la verdad o falsedad de oraciones que no contienen predicados semanti-cos, directa o indirectamente. Efectivamente, en los puntos jos m nimos solo aquellas oraciones de $L^{+}{}_{pa}$ que, o predican verdad de oraciones de $L^{+}{}_{pa}$, o de estas ultimas, o de estas ultimas, etc., ingresan a la extension o a la antiextension del predicado veritativo, adquieren un valor de verdad clasico. Los modelos resultantes son, por tanto, modelos de una verdad superveniente sobre los `hechos' no semanticos.

Por su parte, la oracion del mentiroso :T l, que se obtiene aplicando el lema de diagonalizacion fuerte (teorema 1.8) a :T x, esto es,

$$N^{+} \quad l = p{:}T\,lq \quad (3.4)$$

jamas entrar ni en la extension ni en la antiextension de T sino que recibira siempre el valor $\frac{1}{2}$ en cada modelo $hN^{+}; _{sk}(?)i$ $(hN^{+}; _{wk}(?)i)$; y lo mismo vale para la oracion del honesto, que se obtiene tambien aplicando el lema de diagonalizacion fuerte ahora a T x, i.e.,

$$N^{+} \quad h = pT\,hq:$$

[10]Quien lo llama `groundlesness'.

Las oraciones del mentiroso y del honesto son consideradas infundadas (ungrounded). Su valor de verdad depende, no del de las oraciones de L_{pa}, sino de s mismas.

De nicion 3.11 (ev-fundacion). ' 2 L_T esta ev-fundada sii ' pertenece al punto jo m nimo de $_{ev}$.

El punto jo m nimo parece ser la materializacion perfecta de la metafora krip-keana del nivel de una oracion y de como debe permitirse que cada oracion encuentre su propio nivel. Por `nivel de una oracion' puede entenderse el primer ordinal en la se-cuencia (3.2) o (3.3) en el cual ingresa a la extension o a la antiextension del predicado veritativo. Y este nivel dependera enteramente del modelo que se est expandiendo |en este caso hN$^+$; ?i, y no de la estructura sintactica o gramatical de la oracion. Como sostiene Michael Kremer (1988, p. 237),

> Associated with this explication of the notion of the \level" of a senten-ce is the idea that Kripke's construction of the minimal xed point has provided us with an alternative hierarchy of languages to that provided by the \orthodox approach". The Tarskian hierarchy of object-language, meta-language, meta-meta-language, . . . is to be replaced by the ordinal sequence [hN$^+$; ?i; hN$^+$; $_{sk}$(?)i; : : : ; hN$^+$; $_{sk}$(?)i].

En las clasicas palabras del mismo Kripke (1975, p. 80), un tanto mas pesimistas, \The ghost of the Tarski hierarchy is still with us."

No obstante, los puntos jos generados por ? para cada operador, los respectivos puntos jos m nimos, no son los unicos puntos jos de $_{sk}$ ni de $_{wk}$, sino que existen otros, sobre los cuales no voy a entrar en detalle (cf. Kripke (1975)). Naturalmente, en estos puntos jos `mas grandes' no solo oraciones fundadas entraran en la extension o antiextension del predicado veritativo. Pero ninguna de las que ingresen sera paradojica, como el mentiroso, porque las expresiones paradojicas son precisamente aquellas que bloquean la posibilidad de alcanzar puntos jos, aquellas que no pueden ser ni verdaderas ni falsas. Si se comenzara una secuencia de iteraciones de un operador salto con un conjunto que tuviera a :T l como miembro, v.g., f:T lg, jamas se alcanzar a un punto jo, porque :T l pasar a de la extension a la antiextension de T o viceversa en cada

paso; la secuencia no ser a monotona, ya que f:T lg * $_{sk}$(f:T lg) ($_{wk}$(f:T lg)). No hay un modelo de punto jo en el cual el mentiroso adquiera un valor de verdad clasico. Aquellas oraciones que no ingresan ni a la extension ni a la antiextension del predicado de verdad en ningun modelo de punto jo dado por un esquema de valuacion ev suelen identi carse como ev-paradojicas.

Si bien Kripke (1975, p. 712, nota 29) admite que el punto jo m nimo \is singled out as natural in many respects" y ciertos ejemplos motivacionales al comienzo de su art culo favorecen el modelo de punto jo m nimo, todos los modelos de punto jo satis-facen la condicion de adecuacion material kripkeana, i.e., el principio de transparencia dado por las reglas T-Intro y T-Elim. Aun mas, de acuerdo con Kremer (1988, p. 241),

> the xed point conception of truth is at the heart of Kripke's paper. Other notions|groundedness, the ordinal construction of the minimal xed point, the intrinsic xed points|are best seen as products of his investigation into the existence and properties of xed points, which he thinks of as languages containing their own truth predicates.

Las teor as kripkeanas de la verdad no estan dadas por el modelo de punto jo m nimo exclusivamente sino por la clase de todos los modelos de punto jo para cada operador salto.

Como anticipe, el Esquema-T no es verdadero en ninguno de los modelos de punto jo. Esto se debe a la falla de Identidad. Si bien ninguna de sus instancias resulta falsa, algunas adquieren valor $\frac{1}{2}$ en todos estos modelos. V.g., como la oracion del mentiroso

:T I en (3.4) jamas pertenece ni a la extension ni a la antiextension del predicado de verdad, tanto ella como su predicacion de verdad, T p:T Iq, adquieren siempre valor $\frac{1}{2}$. Por las condiciones de evaluacion de condicionales en las de niciones 3.2 y 3.4, lo mismo sucede con las formulas T p:T Iq ! :T I y :T I ! T p:T Iq, tanto en sk como wk. Luego, por la interde nibilidad de las conectivas proposicionales, el bicondicional

T p:T Iq $:T I;

instancia del Esquema-T dada por :T I, vale $\frac{1}{2}$ en todos los modelos de punto jo de Kripke. Sin embargo, en cada modelo de punto jo hN^{+}; i las instancias del Esquema-T dadas por oraciones que reciben algun valor clasico de verdad s son verdaderas, esto es,

$v_{sk}^{hN_{+}; i}$(T p'q \$ ') = 1 , ' 2 o :' 2 :

Y otro tanto para wk.

Las teor as paracompletas de la verdad que Hartry Field desarrolla en (2002, 2003, 2005, 2007, 2008) |foco de atencion de buena parte de las publicaciones actuales en teor as no clasicas de la verdad| tienen como uno de sus objetivos principales superar esta di cultad, enriquecer el lenguaje L_T con un condicional que valide identidad con el cual formular el Esquema-T; que permita de nir un nuevo bicondicional que resulte verdadero tambien cuando las formulas que se encuentran a derecha e izquierda reciban ambas valor de verdad $\frac{1}{2}$ y, de este modo, cumplir con la Convencion T de Tarski. El resultado es una serie de modelos altamente complejos pero que logran acomodar el Esquema-T, las reglas T-Intro y T-Elim y un tercer principio de transparencia conocido como `principio de intersustitutividad' o `principio de transparencia', que Field y J.C. Beall pre eren por sobre los otros:[11]

$$\frac{: : : ' : : :}{: : : T\ p'q : : :} \qquad \text{(Intersustitutividad)}$$

donde la doble linea indica que la regla puede aplicarse tomando como premisa la formula que se encuentra por arriba y la que esta por debajo como conclusion o viceversa, y : : : ' : : : indica que ' ocurre como subformula. Informalmente, si dos oraciones B y C son identicas excepto en que (en algun contexto no opaco) B contiene la subformula A mientras que C contiene \`A' es verdadera" en su lugar, entonces B implica C y viceversa (cf. Field (2008, p. 12)). En virtud de T-Intro y T-Elim, Intersustitutividad resulta valido tambien en los modelos de punto jo de Kripke.

Proposicion 3.12. Las reglas que constituyen el principio de Intersustitutividad preservan verdad en todos los modelos de punto jo sobre algun esquema de valuacion.

Demostracion. Pruebo que, si M es un modelo de punto jo sobre ev (sk o wk), $v_{ev}{}^{M}(')$ = $v_{ev}{}^{M}(T\ p'q)$ para toda oracion ' 2 L_T . Como todas las conectivas de L_T aplica-bles a oraciones son composicionales, esto es su ciente para establecer la correccion de Intersustitutividad en M.

La proposicion 3.8 garantiza que $v_{ev}{}^{M}(') = v_{ev}{}^{M}(T\ p'q)$ si $v_{ev}{}^{M}(') = 1$. Sea M = hN^{+}; i. Si $v_{ev}{}^{M}(') = 0$, como = $_{ev}$( ), la de nicion 3.1 garantiza que ' 2 f' 2 L_T : :' 2 g, esto es, que ' pertenece a la antiextension de T en hN^{+}; i y, por ende, $v_{ev}{}^{M}(T\ p'q) = 0$. Finalmente, si $v_{ev}{}^{M}(') = \frac{1}{2}$, entonces, nuevamente por la de nicion 3.1, ' no pertenece ni a la extension ni a la antiextension de T en el modelo y, en consecuencia, $v_{ev}{}^{M}(T\ p'q) = \frac{1}{2}$ tambien. □

Si bien las logicas k3 y b3 son completamente axiomatizables (cf. Kremer (1988)), los conjuntos de oraciones que resultan verdaderas en cada modelo de punto jo sobre cada esquema no son axiomatizables. Por un lado, presuponen el modelo estandar de L^{+}_{pa}, N^{+}, esto es, las oraciones verdaderas en N^{+} son verdaderas en todos los modelos

[11] *Para una exposicion detallada, vease tambien Lucas Rosenblatt & Federico Pailos (2014).*

de punto jo, lo cual introduce complejidad $^{1}_{1}$ (vease el apartado 1.2.5).[12] Si una teor a consistente axiomatizase estos conjuntos de modo acabado, deber a ser capaz de probar todas las verdades de la aritmetica, lo cual no es posible por los teoremas de incompletitud de G•odel (teoremas 1.12 y 1.13). Pero, ademas, el predicado veritativo agrega asimismo complejidad: las extensiones de T en los modelos de punto jo de Kripke son $^{1}_{1}$. Sin embargo, ciertas axiomatizaciones parciales son posibles, como se vera en el apartado que resta de esta seccion.

Las teor as kripkeanas de la verdad no solo inspiraron a nuevas teor as semanticas paracompletas y versiones axiomaticas sino que in uyeron en practicamente todas las investigaciones formales sobre la verdad en el ambito de la logica loso ca. Casos obvios son la teor a de la dependencia de Leitgeb, que introduzco en la seccion 3.2, la teor a de la revision (cf. Herzberger (1982a,b), Anil Gupta (1982), Nuel D. Belnap (1982) y Gupta & Belnap (1993)),para la cual lamentablemente no hay lugar en esta tesis,[13] y quizas tambien las teor as de la verdad dialete stas que ocupan la seccion 3.4.

3.1.3. Contrapartes axiomaticas

3.1.3.1. Kripke-Feferman

La teor a kf que presento en este apartado se debe a William Reinhardt (1986) y a Feferman (1991).[14] Si bien suele decirse que es una axiomatizacion de la clase de modelos de punto jo sobre sk en k3, esto no es estrictamente cierto. Lo naturalmente esperable de una axiomatizacion de una familia de modelos parciales bajo k3 es que se lleve a cabo sobre un calculo correcto y completo con respecto a k3. Sin embargo, kf esta formulada sobre un calculo clasico. Como consecuencia, no es correcta con respecto a la familia de modelos de punto jo en k3, v.g., kf prueba que T l _ :T l, pero esta oracion no recibe valor 1 en ninguno de estos modelos,[15] aunque la identidad entre l y p:T lq tambien vale en kf, por ser una extension de q^{+}, donde

$$q^{+} ` l = p{:}T\, lq \tag{3.5}$$

por el lema diagonal fuerte aplicado a :T l.

[12] *Esto es, el conjunto de oraciones de* L^{+}_{pa} *verdaderas en* N^{+} *solo puede ser de nido mediante una formula del lenguaje de la aritmetica de segundo orden que sea* $^{1}_{1}$*,* i.e.*, conste de una formula de primer orden precedida por un cuanti cador universal o existencial de segundo orden. Esto queda claro en parte a traves del teorema de la inde nibilidad de la verdad de Tarski (teorema 2.9), que muestra que ninguna formula de la jerarqu a aritmetica, esto es, de* L^{+}_{pa}*, es capaz de de nir el conjunto de verdades de este mismo lenguaje.*

[13] *Para una exposicion detallada vease Lavinia Picollo & Natalia Buacar (2014).*

[14] *Feferman la denomina* `Ref(pa)'.

[15] *Para una axiomatizacion de la familia de modelos de punto jo sobre* sk *en* k3*,* pkf *(por* Paracomplete Kripke-Feferman*), vease Halbach & Leon Horsten (2006).*

kf es una axiomatizacion, no de la familia de modelos de punto jo sobre sk en k3 sino de su clausura. La clausura de un modelo parcial M es el modelo clasico M^0 que asigna a las letras de predicado del lenguaje la misma extension que M. La diferencia entre M y M^0 es que M asigna a cada predicado una antiextension que puede no ser el complemento de la extension sobre le dominio del modelo, mientras que en M^0 este siempre es el caso; M^0 pone en la antiextension de cada predicado todo lo que M pon a mas aquello que no estaba ni en la extension ni en la antiextension. Supongase, por ejemplo, que en un modelo parcial hN^+; i de punto jo ' no pertenece ni a la extension ni a la antiextension de T . Luego, $v_{sk}^{hN_+; i}$(T p'q) 6= 1 y $v_{sk}^{hN_+; i}$(:T p'q) 6= 1. Sin embargo, en la clausura de hN^+; i, ' pertenecera a la antiextension de T , con lo cual :T p'q sera verdadera. Notese que la clausura de un modelo de punto jo no es ya ella misma un modelo de punto jo, porque eso es imposible por el teorema de inde nibilidad de la verdad de Tarski.

De nicion 3.13 (kf). Sea kf L_T la teor a que extiende pat con los siguientes axiomas:

kf1 8t; s(T (t=.s) $ t = s)

kf2 8x(Sent$_{L_T}$ (x) ! (T :.:.x $ T x))

kf3 8x; y(Sent$_{L_T}$ (x!.y) ! (T (x!.y) $ (:T :.x ! T y)))

kf4 8x; y(Sent$_{L_T}$ (x!.y) ! (T :.(x!.y) $ (:T x ! T :.y)))

kf5 8x; v(Sent$_{L_T}$ (8.vx) ! (T 8.vx $ 8tT x(t=v))))

kf6 8x; v(Sent$_{L_T}$ (8.vx) ! (T :.8.vx $ 9t:.T x(t=v)))

kf7 8t(Sent$_{L_T}$ (t) ! (T T. t $ T t))

kf8 8t(Sent$_{L_T}$ (t) ! (T :.T. t $ T :.t))

cons 8x(Sent$_{L_T}$ (x) ! :(T x ^ T :.x))

El primer axioma es comun a las axiomatizaciones tarskianas. Si bien kf2 valida una version interna de la ley de Doble Negacion, al no haber un axioma que establezca la conmutatividad del predicado veritativo con la negacion, como en el caso de, v.g., ct(pa^+) o $rt_<$, es preciso desglosar los axiomas para el condicional y el cuanti cador universal en un principio positivo y uno negativo, como sucede en los axiomas kf3 kf6. Los axiomas kf7 y kf8 establecen la iterabilidad del predicado de verdad, mientras que cons bloquea la posibilidad de que una oracion y su negacion sean ambas verdaderas.

Teorema 3.14 ((Feferman, Reinhardt)). hN^+; i es la clausura de un modelo de punto jo bajo k3 sii hN^+; i kf.[16]

[16]***Vease*** ***Feferman (1991***) para una prueba.

Este teorema no solo establece que kf es correcta con respecto a la clase de modelos de punto jo clausurados sino tambien que kf es completa con respecto a esta clase, si se tienen en cuenta unicamente modelos de la forma hN^{+}; i, i.e., extensiones de N^{+}. La propiedad de kf que el teorema 3.14 establece suele llamarse `N^{+}-categoricidad' de kf con respecto a la clase de clausuras de los modelos de punto jo bajo k3: los modelos de kf estandares con respecto a L^{+}_{pa} son exactamente los modelos pertenecientes a esta clase.

Corolario 3.15. kf es !-consistente.[17]

La propiedad de !-consistencia resulta deseable para teor as de la verdad formuladas sobre la aritmetica, donde esta opera como teor a de la sintaxis. Grosso modo, mientras que el predicado veritativo no requiere mas objetos sintacticos que los que la aritmetica provee, una teor a !-inconsistente prueba que estos objetos deben existir; en otras palabras, contiene teoremas falsos (cf. Leitgeb (2007), Barrio & Picollo (2013)).

Hay tambien una relacion mas o menos directa entre kf y la familia de modelos de punto jo sobre sk en k3. Si bien la logica externa de kf, esto es, el conjunto de teoremas de esta teor a, esta cerrado bajo logica clasica, su logica interna, el conjunto de oraciones de las cuales kf prueba que son verdaderas, obedece los principios de k3: la logica interna de kf es correcta con respecto a la familia de modelos parciales de punto jo sobre sk en k3.

Proposicion 3.16. Si kf ` T p'q y M es un modelo de punto jo sobre sk, M $_{k3}$ '.

Si bien varios autores son partidarios de kf (cf. McGee (1991), Scott Soames (1999)), esta teor a tiene al menos una caracter stica que suele considerarse indeseable: sus logicas externa e interna no coinciden. Como la logica externa, al ser clasica, es mas amplia que la interna; existen oraciones que kf prueba pero que son declaradas no verdaderas por la misma teor a. kf prueba todas las instancias de

T p'q ! ' (T-Out)

donde ' es una oracion de L_T , i.e., la direccion de izquierda a derecha de los bicondicio-nales que conforman el Esquema-T (cf. Cantini (1996, p. 54, Teorema 8.8(i))). Luego, kf prueba T p:T lq ! :T l o, lo que es lo mismo (vease (3.5)), T l ! :T l. En consecuen-cia, kf ` :T l, es decir, kf prueba la oracion del mentiroso y, a la vez, que esta no es verdadera.

[17] *Vease la de nicion 1.2.*

Como se~nalan Halbach & Horsten (2006), basta con abandonar cons para evitar este problema.[18] De hecho, McGee es un defensor de kf sin este axioma. Sin embargo, en el cap tulo 5 argumento que, al contrario, T-Out es un principio altamente deseable, al menos desde una perspectiva de acionista. Por otro lado, cons permite probar el siguiente principio general intuitivo:

$$8x; y(\mathrm{Sent}_{LT} (x!.y) ! (T (x!.y) ! (T x ! T y)) \qquad \text{(imp)}$$

una version interna de la regla Modus Ponens o de eliminacion del condicional

$$' ! \qquad \text{(E!)}$$

$$\frac{'}{\quad}$$

que vale tanto en k3 como en la logica clasica. (imp) no es demostrable en kf - cons.

El siguiente resultado establece una relacion entre kf y $\mathrm{rt}_{<\,0}$ (vease la de nicion 2.14) en terminos de su poder de prueba.

Teorema 3.17 (Halbach). kf es relativamente interpretable en $\mathrm{rt}_{<\,0}$ y viceversa.[19]

3.1.3.2. Verdad Positiva

Algo que las oraciones que dan lugar a paradojas semanticas tienen en comun es que en ellas el predicado de verdad se encuentra de alguna manera negado. En efecto, si se restringe el Esquema-T Uniforme a formulas en las cuales esto no sucede, se obtiene una teor a no solo consistente sino !-consistente, putb (cf. Cantini (1989), Halbach (2009)).

La teor a desentrecomilladora resultante es mucho mas abarcativa que utb(pa^+) porque incluye instancias del Esquema-T Uniforme dadas no solo por todas y cada una de las oraciones de L^+_{pa} sino tambien por muchas oraciones en las cuales T ocurre, como T p0 = 0q y 8x(Bew_{pa^+} (x) ! Tx). putb es una teor a de la verdad en la cual el predicado veritativo no esta tipeado: puede y de hecho se aplica a oraciones que ya lo contienen. A diferencia de las teor as semanticas de punto jo de Kripke, putb no abandona el ambito de la logica clasica. Para sortear las hipotesis del teorema de Tarski (teorema 2.9), relaja el requisito de que todas las instancias del Esquema-T se sigan de los axiomas de la teor a. Si bien, desde cierto punto de vista, el predicado de verdad resultante es parcial o incompleto, putb constituye una mejora con respecto a las versiones axiomaticas tipeadas, si lo que se desea es un unico predicado de verdad autoaplicable y no una jerarqu a

[18] ***En cuyo caso habr a que agregar el axioma*** 8x(T x ! Sent_{LT} (x)) ***para preservar la*** N^+***-categoricidad de la teor a.***

[19] ***Vease la de nicion 1.1 y Halbach (2011,*** x15.3).

con in nitos predicados y sus sub ndices. Alternativamente, putb puede verse como una teor a de la verdad completa para el sublenguaje de L_T que comprende exclusivamente formulas donde el predicado de verdad ocurre positivamente. En palabras de Leitgeb (2005, p. 155-156),

> knowing that there is a correct and adequate de nition of truth for L^{+}_{pa}, and knowing that there is no such de nition for L_T , we might still be looking for a formally correct de nition of truth that is applicable to a class of sentences with L^{+}_{pa} ((L_T , such that the de nition is materially adequate with respect to the members of .

Es preciso tener cuidado al identi car los casos en los cuales el predicado de verdad ocurre negado en una formula, porque L_T cuenta con conectivas que pueden utilizarse para de nir negaciones, como !.

De nicion 3.18 (T -positividad). Una formula ' 2 L_T es T -positiva sii la suma de s mbolos de negacion bajo cuyo alcance cada aparicion de T ocurre sumada a la cantidad de veces que esa aparicion ocurre en el antecedente de un condicional es par.[20]

De nicion 3.19 (putb). putb L_T es la teor a que extiende pat mediante las ins-tancias del Esquema-T Uniforme

$$8t_1 : : : t_n(T\ p'(\dot{t}_1; : : : ; \dot{t}_n)q\ \$\ '(t_1; : : : ; t_n))$$

donde ' es una formula T -positiva de L_T con exactamente n variables libres.

Notese que, como todas las formulas de L^{+}_{pa} son T -positivas, utb putb. putb tambien puede ser entendida como una axiomatizacion de la familia de las clausuras de los modelos de punto jo sobre sk en k3, en tanto es una subteor a de kf.

Proposicion 3.20 (Cantini). Todas las instancias del Esquema-T Uniforme dadas por formulas T -positivas de L_T son teoremas de kf.[21]

En consecuencia, kf tambien puede verse como una teor a de la verdad libre de tipos que sortea las hipotesis del teorema de Tarski relajando la adecuacion material pero preservando la logica clasica.

Corolario 3.21. putb es !-consistente.

[20] ***La de nicion de Halbach (2009, p. 788, de nicion 2.1) concierne unicamente a los s mbolos de nega-cion, porque el lenguaje con el cual trabaja no contiene condicionales sino disyunciones y conjunciones como unicas conectivas diadicas. Su de nicion es equivalente a la m a en virtud de la de nibilidad del condicional mediante la negacion y la disyuncion.***

[21] ***Vease, v.g., Cantini (1989***, lema 3.2(ii)).

Demostracion. Por el corolario 3.15 y la proposicion anterior. □

Corolario 3.22. putb + T-Out es !-consistente.

Demostracion. Por el corolario 3.15, la proposicion anterior y el hecho de que kf prueba todas las instancias de T-Out. □

No obstante, a diferencia de kf, putb no es N^+-categorica con respecto a los mo-delos clausurados de punto jo sobre sk. putb tiene modelos de la forma hN^+; i donde contiene unicamente oraciones T -positivas, pero ninguno de estos modelos pertenece a la clase se~nalada.

Al ser una subteor a sencilla y no N^+-categorica de kf, podr a pensarse que putb es menos poderosa que kf en cuanto a su capacidad de prueba. Sin embargo, la sencillez de putb no guarda relacion con su poder de prueba. putb es mucho mas poderosa que utb(pa^+) e igualmente poderosa que kf.

Teorema 3.23 (Halbach). kf es relativamente interpretable en putb.[22]

Como putb es a la vez una subteor a de kf, tambien es relativamente interpre-table en ella, lo cual muestra que tienen exactamente el mismo poder de prueba.

Corolario 3.24. putb es relativamente interpretable en $rt_{<\,0}$ y en kf y viceversa.

Demostracion. Por el teorema 3.17 y el corolario 3.23. □

Estos resultados no signi can que putb sea una teor a composicional de la verdad. Si bien es capaz de de nir los predicados de verdad de kf y $rt_{<\,0}$ y probar, para ellos, los principios generales que constituyen los axiomas de estas teor as, putb no es capaz de probar ningun principio general no trivial para su propio predicado de verdad.[23]

§

Kripke no solo mostr como contar con un predicado de verdad transparente y, a la vez, trascender la separacion tarskiana entre lenguaje objeto y metalenguaje abandonando la logica clasica sino que tambien inspiro teor as no tipeadas de la verdad que, si bien no ofrecen predicados de verdad completamente transparentes, estan dadas en el marco de la logica clasica, como kf y putb. Asimismo, sus teor as semanticas fueron fuente de inspiracion del concepto de dependencia de Leitgeb y la teor a de la verdad a la cual dio lugar, que presento en la siguiente seccion.

[22]*Vease (Halbach, 2009, teorema 5.1).* [23]*Vease Halbach (2009, x6).*

3.2. La dependencia de Leitgeb

Trabajando dentro de los l mites de la logica clasica, Leitgeb (2005, p. 156, sus italicas) se pregunta \What kinds of sentences with truth predicate may be inserted plausibly and consistently into the T-scheme?" Como evidencia putb en el apartado anterior, es posible insertar al menos algunas oraciones que contienen el predicado veritativo en el Esquema-T sin caer en contradicciones, esto es, la restriccion tarskiana que recomienda tomar unicamente aquellas instancias de este principio dadas por oraciones en las cuales el predicado veritativo no ocurre no es necesaria para evitar inconsistencias. Pero quizas es posible adoptar aun mas instancias del Esquema-T que las T -positivas, o adoptar un conjunto diferente de instancias que est mejor motivado.

Con este objetivo, Leitgeb desarrolla la nocion de dependencia. Grosso modo, una oracion de L^{+}_{pa} no depende de nada, mientras que las oraciones que contienen T dependen del conjunto de oraciones de las cuales predican verdad. Por ejemplo, T p0 = 0q depende del conjunto que contiene la oracion 0 = 0, T pT p0 = 0qq del conjunto que contiene la oracion T p0 = 0q y :T l en (3.5) depende del conjunto que la tiene a ella misma por elemento. La propuesta de Leitgeb consiste en tomar unicamente aquellas oraciones cuya verdad o falsedad dependa, directa o indirectamente |como T p0 = 0q o T pT p0 = 0qq, respectivamente|, de la verdad o falsedad de las oraciones de L^{+}_{pa}.

En esta seccion presento primero los resultados limitativos de McGee a la busque-da de criterios plausibles de seleccion de instancias seguras del Esquema-T, que llevan a Leitgeb al desarrollo de su nocion de dependencia. En 3.2.2 introduzco las de niciones formales de dependencia, autodependencia, d-fundacion y otras nociones asociadas, pa-ra las cuales pruebo diversos resultados que seran de utilidad en el apartado 3.2.3 que sigue. Ah presento en primer lugar la teor a semantica de Leitgeb, esto es, el modelo de L_T donde las instancias del Esquema-T estan restringidas a oraciones d-fundadas, y, posteriormente, tres modelos adicionales de L_T cuyo criterio de restriccion es mas permisivo que la d-fundacion. Estos resultados seran de suma utilidad en el cap tulo 8, para establecer la consistencia de las teor as formales de la verdad que introduzco ah .

3.2.1. Un resultado limitativo de McGee

Una opcion prima facie natural para restringir el Esquema-T es tomar simplemente todas aquellas instancias que son consistentes. Sea T el conjunto de instancias del Esquema-T generadas por miembros de L_T , i.e.,

T := fT p'q $ ' : ' 2
g

El conjunto ideal ser a entonces aquel que diera lugar a un conjunto de instancias del Esquema-T maximal consistente. Lamentablemente, McGee (1992a) mostr que esta no es una v a razonable.

Teorema 3.25 (McGee). Para cada L_T consistente con pat existe un L_T tal que

1. para todo ' 2 , pat [T` ';
2. pat [T es consistente;
3. siL_T , pat [T es inconsistente;
4. pat [T es completa con respecto a la negacion.

Luego, toda oracion indecidible en pat es decidible positivamente en alguna teor a desentrecomilladora maximal pat [T y negativamente en otra pat [T ^{0}, i.e., no existe un unico conjunto maximal consistente de instancias del Esquema-T sino una cantidad no numerable de ellos.

Aun mas, esta cantidad no se reduce siquiera restringiendo la atencion a conjuntos tales que pat [T decida positivamente aquellas oraciones ' de L^{+}_{pa} que son verdaderas en N^{+}, pues quedan todav a en libertad las oraciones de L_T que contienen T . Por la proposicion 1.9 aplicada a los predicados T x y :T x, existen dos terminos l_1 y l_2 de L^{+}_{pa} tales que

$$q^{+} \text{ ` } l_1 = pT\, l_2 q \wedge l_2 = p{:}T\, l_1 q \tag{3.6}$$

esto es, dos oraciones T l_2 y :T l_1 tales que la primera dice de la segunda que es verdadera, mientras que la segunda dice de la primera que no lo es. Juntas estas oraciones conforman lo que se conoce como un `ciclo de mentirosos de longitud 2'. A partir de las instancias del Esquema-T para cada una de ellas es posible derivar facilmente una contradiccion, usualmente denominada `paradoja de la postal'. Luego, ningun dado por el teorema 3.25 contiene ambas oraciones. Sin embargo, las instancias del Esquema-T dadas por T l_2 y :T l_1 son consistentes tomadas por separado con cualquier otro conjunto consistente de instancias. Luego, todo conjunto que satisfaga las condiciones 1-4 del teorema 3.25 contiene, por ser maximal, o bien T l_2 o bien :T l_1. Si se adoptara la consistencia maximal como criterio de seleccion de instancias del Esquema-T se deber a tomar decisiones arbitrarias, donde ninguna de las opciones resulta razonable.

Esta es la razon por la cual Leitgeb agrega el cali cativo `plausibly' a su pregunta por las oraciones que pueden consistentemente insertarse en el Esquema-T. Lo que busca es un criterio de seleccion amplio pero mas restrictivo que la consistencia y que, adicio-nalmente, tenga cierta razon de ser, cierto poder explicativo. Su propuesta esta dada en funcion de su nocion de dependencia, que presento a continuacion.

3.2.2. Dependencia, autodependencia y d-fundacion

La nocion de dependencia de Leitgeb tiene claramente visos de la nocion kripkeana de fundacion (vease el apartado 3.1.2). Conceptualmente aquellas oraciones cuya verdad o falsedad depende de la verdad o falsedad de las oraciones de L^{+}_{pa} son precisamente las oraciones fundadas. Como el mismo Kripke sostiene,

> In general, if a sentence [. . .] asserts that (all, some, most, etc.) of the senten-ces of a certain class are true, its truth value can be ascertained if the truth values of the sentences in the class C are ascertained. If some of these sen-tences themselves involve the notion of truth, their truth value in turn must be ascertained by looking at other sentences, and so on. If ultimately this process terminates in sentences not mentioning the concept of truth, so that the truth value of the original statement can be ascertained, we call the ori-ginal sentence grounded; otherwise, ungrounded. (Kripke, 1975, p. 693-694, sus italicas)

Efectivamente, en (1982) Yablo argumenta que la nocion intuitiva de fundacion tiene dos caras. Por un lado, un aspecto ascendente, hereditario, que es capturado por el modo en que Kripke construye sus modelos de punto jo m nimos, i.e., por las iteraciones de los operadores salto sobre el conjunto vac o. Las oraciones de L^{+}_{pa} transmiten su fundacion a las oraciones que predican verdad sobre ellas, que a su vez transmiten su fundacion a las que predican verdad sobre estas ultimas, etc. Pero, por otro lado, la fundacion tiene una cara descendente, dependiente, descripta en la cita de Kripke del parrafo anterior. De acuerdo con Yablo, Kripke dejo esta cara de la fundacion sin explorar y, en consecuencia, ofrece el mismo un abordaje de la dependencia.

Mientras que la nocion de dependencia de Yablo representa simplemente otro angulo desde el cual mirar la fundacion kripkeana, como se~nala Leitgeb, el concepto que el propone tiene marcadas diferencias con estos ultimos, dadas principalmente por cues-tiones conceptuales y por trabajar en logica clasica en lugar de logicas paracompletas, ademas de ciertas divergencias tecnicas (cf. Leitgeb (2005, x5)). Consecuentemente, el conjunto de oraciones fundadas de nido en terminos de la nocion de dependencia de Leitgeb va a divergir de los conjuntos de oraciones fundadas de Kripke y Yablo.[24]

[24]*Vease espec camente Leitgeb (2005, x*5, teorema 21).

Como las oraciones de L_T pueden predicar verdad sobre mas de una expresion,

la dependencia es de nida como una relacion entre oraciones, por un lado, y conjuntos de oraciones, por otro. Intuitivamente, una oracion de L_T depende de un conjunto de oraciones en la medida en que su valor de verdad supervenga sobre la presencia o ausencia de los miembros de este conjunto en la extension del predicado veritativo, es decir, en la medida en que ninguna otro factor excepto la presencia o ausencia de los miembros del conjunto del cual depende en la extension de T pueda afectar su valor de verdad. Por ejemplo, la verdad o falsedad de T p0 = 0q depende de si 0 = 0 es un miembro de la extension de T o no y de nada mas, mientras que la de 8x(Bew$_{pa^+}$ (x) ! T x) depende de si todos y cada uno de los teoremas de pa$^+$ pertenecen a la extension del predicado veritativo.

De nicion 3.26 (Dependencia). Dados una oracion ' 2 L_T y un conjunto L_T , ' depende de sii, para todo L_T ,[25]

hN$^+$; i ' , hN$^+$; \ i ':

Si ' depende de , todo lo que esta por fuera de puede ser agregado o quitado de la extension del predicado de verdad sin afectar el valor de verdad de ' en el modelo. Esto signi ca que cuando se dice que una oracion depende de un conjunto, se dice que todo aquello que es necesario para determinar su valor de verdad esta en este conjunto, nada que pueda afectar su valor de verdad quedo fuera. Pero puede pasar que muchas cosas irrelevantes hayan quedado dentro. De hecho, vale el siguiente resultado.

Proposicion 3.27 (Leitgeb). Sean ' 2 L_T y L_T . Si ' depende de entonces tambien depende de todo conjunto ; en particular, todas las oraciones dependen de L_T .[26]

La proposicion que sigue muestra que agregar a la extension del predicado ve-ritativo oraciones que pertenecen a un conjunto cuya interseccion con otro del cual ' depende es vac a no puede afectar el valor de verdad de esta oracion.

Proposicion 3.28. Sean ' 2 L_T y ; L_T . Si existe un conjunto del cual ' depende tal que \ = ?,

hN$^+$; i ' , hN$^+$; [i ':

[25] *Vease Leitgeb (2005, p. 161, de nicion 1 y lema 2).*

[26] *Vease Leitgeb (2005*, p. 161, lema 3).

Demostracion. Como \ = ?, \ = ([ ) \ . Luego,

hN^{+}; i ' , hN^{+}; \ i ' De nicion 3.26

, hN^{+}; ([ ) \ i '

, hN^{+}; [i ' De nicion 3.26

□

Proposicion 3.29. Sean ' y 2 L_T . Si, para todo L_T , hN^{+}; i ' sii hN^{+}; i ,

entonces, para todoL_T , ' depende de sii depende de .

Demostracion . Por la de nicion 3.26,

' depende de , para todoL_T ; hN^{+}; i ' sii hN^{+}; \ i '

, para todoL_T ; hN^{+}; i sii hN^{+}; \ i

, depende de

□

La nocion de dependencia de Leitgeb es semantica, en tanto queda determinada por lo que es verdadero o falso en el modelo estandar de L^{+}_{pa}, y, por ende, tambien extensional, como muestra esta ultima proposicion: dos oraciones equivalentes en el modelo estandar dependen necesariamente de los mismos conjuntos.

Algunas oraciones tienen un conjunto m nimo del cual dependen, que esta incluido en todos los otros conjuntos de los que dependen, su dependencia esencial.

De nicion 3.30 (Dependencia esencial). Una oracion ' 2 L_T depende esencialmente de L_T sii ' depende de y, para todo L_T del cual ' depende, .

Por ejemplo, :Tl depende esencialmente de f:Tl g y 8x(Sent$_{L_T}$ (x) ! Tx) depende esencialmente de L_T , porque basta con quitar una oracion de L_T de la extension de T para que el valor de verdad de este enunciado var e. Otras oraciones, en cambio, no dependen esencialmente de ningun conjunto, v.g., 8x > 09y(y > x ^ Ty) (cf. Leitgeb (2005, p. 164, lista de ejemplos 1)). Para que esta oracion sea verdadera, no puede exis-tir un codigo a partir del cual ninguna oracion pertenezca a la extension de T , pero no importa cuan grande sea el menor codigo con estas caracter sticas. Luego, esta oracion depende de ! f1; 2; : : : g f2; 3; : : : g : : : , pero no hay un conjunto mas chico del cual depende.

Proposicion 3.31 (Leitgeb). Sean '; oraciones de L_T y ; ; $_i$ L_T , con i 2 !.

1. Si ' 2 L^{+}_{pa}, ' depende esencialmente de ?.
2. Si ' := T t y N^{+} t = p q para alguna 2 L_T , ' depende esencialmente de f g.
3. Si ' depende de , :' tambien depende de .
4. Si ' depende de y de , ' ! depende de [.
5. Si, para cada n 2 !, '[n=v] depende de $_n$, 8v' depende de $S_{i2!}$ $_i$.[27]

Luego, la dependencia obedece cierto tipo de composicionalidad. A partir ella es posible de nir nociones de autodependencia y d-fundacion. La autodependencia es una nocion cercana de alguna manera a la autorreferencia pero, como se vera en los cap tulos 6 y 7, se diferencia de aquella por su caracter semantico. Como el mismo Leitgeb (2005) sugiere, su nocion de dependencia es comparable a pero diferente del concepto de contenido (aboutness) o referencia. Me ocupo de esta cuestion en detalle en el cap tulo 6.

De nicion 3.32 (Autodependencia). ' 2 L_T es autodependiente sii existen oraciones '$_1$; : : : ; '$_n$ 2 L_T tales que, para todo del cual ' depende, '$_1$ 2 ; si 1 i < n, para todo del cual '$_i$ depende, '$_{i+1}$ 2 ; y, para todo de cual '$_n$ depende, ' 2 .

Esta de nicion incluye casos de autodependencia directa e indirecta. Por ejemplo, la oracion :Tl del mentiroso depende esencialmente de f:Tl g, todo conjunto del cual esta oracion depende la tiene como uno de sus miembros y, por ende, es autodependiente. Pero, ademas, si l$_1$ y l$_2$ son como en (3.6), como Tl$_2$ depende esencialmente de f:Tl$_1$g y :Tl$_1$ depende esencialmente de fTl$_2$g, :Tl$_1$ y Tl$_2$ son asimismo autodependientes.[28]

Para de nir fundacion utilizando la nocion de dependencia, lo que llamo `d-fundacion', hay que dar un rodeo. La idea general consiste en que lo fundado es aquello que depende, o bien del conjunto vac o, o bien del conjunto de oraciones que depen-den del conjunto vac o, o bien del conjunto de oraciones que dependen de conjuntos de oraciones que a su vez dependen del conjunto vac o, etc.

De nicion 3.33 ($_{pf}$). Sea $_0$:= ?, $_{+1}$:= f' 2 L_T : ' depende de ^{S} g, para cada ordinal , y, si es un ordinal l mite, := $_<$. Como esta jerarqu a es monotona, i.e., si < entonces , por consideraciones de cardinalidad existe un ordinal m nimo tal que = $_{+1}$. Sea $_{pf}$ este punto jo m nimo.

[27] Vease Leitgeb (2005, p. 162, lista de ejemplos 1 y p. 165, lema 5).

[28] Leitgeb (2005) de ne unicamente la autodependencia (o, como el la denomina, `autorreferencia') directa y exclusivamente para oraciones con dependencia esencial. Extiendo ac su nocion del modo mas natural por cuestiones de necesidad relativas a lo que viene luego.

$_1$ contiene todo lo que depende del conjunto vac o, $_2$ todo lo que depende del conjunto vac o mas todo lo que depende de conjuntos de oraciones que dependen del conjunto vac o, etc. Intuitivamente, $_{pf}$ contiene aquellas oraciones de L_T cuyo valor de verdad esta determinado exclusivamente por el modelo estandar de L^+_{pa}, las oraciones fundadas. La similaridad con Kripke en este punto es clara.

De nicion 3.34 (D-fundacion). ' 2 L_T esta d-fundada sii ' 2 $_{pf}$.

3.2.3. Dependencia y desentrecomillacion

La nocion de dependencia, como quiere Leitgeb, puede utilizarse para discriminar instancias del Esquema-T de modo tal que la teor a resultante sea consistente e, incluso, !-consistente. A continuacion presento una serie de resultados que muestran modos diferentes de discriminar.

Teorema 3.35 (Leitgeb). Existe un unico $_{pf}$ $_{pf}$ tal que $hN^+;$ $_{pf}$ i T $_{pf}$.[29]

El concepto de d-fundacion puede funcionar entonces como criterio de seleccion de instancias consistentes del Esquema-T, dando lugar a la teor a semantica de Leitgeb, el modelo $hN^+;$ $_{pf}$ i. Es innegable que el criterio empleado tiene una gran fuerza intuitiva. Este criterio puede relajarse todav a mas, de dos modos diferentes, obteniendo modelos que validen todav a mas instancias del Esquema-T, generando teor as semanticas mas abarcativas.

Proposicion 3.36. Si L_T es un conjunto nito de oraciones no autodependientes, existe un L_T tal que $hN^+;$ i T ($_{pf}$ [ ).

Demostracion. Asumo que \ $_{pf}$ = ? (de haber oraciones en la interseccion, quedar an automaticamente cubiertas por el teorema 3.35). Sea f : ! ! tal que, si ' L_T es la interseccion de todos los subconjuntos de L_T de los cuales ' depende,

f(') := 80 2 \ g si ' \ = ?

<max f( ) : ' + 1 en cualquier otro caso

f existe porque, por un lado, debe haber oraciones en tales que algun conjunto del cual dependen no contenga otras oraciones de . De lo contrario, habr a autodependencia dado que es nito. Por otro lado, como no hay autodependencia, directa o indirecta, y es nito, siempre es posible ordenar los miembros de de acuerdo con la relacion de dependencia comenzando por aquellos que no dependen de los otros.

[29]***Vease*** ***Leitgeb (2005***, p. 172, teorema 17) para una prueba.

Si n 2 !, sea $_n$:= f' 2 : f(') = ng. Como es nito, solo un numero nito de estos conjuntos es no vac o. Sea m 2 ! el ultimo numero tal que $_m$ 6= ?. Claramente, = S $_n$ $_{m\ n}$. Si ' 2 no tiene dependencia esencial, sea ' LT tal que ' depende de ' [' y ' \ = ?. Siempre se puede elegir un ' con estas caracter sticas porque es nito. Si ' 2 s tiene dependencia esencial, sea ' = ?.

Por el teorema 3.35, hN$^+$; $_{pf}$ i T $_{pf}$. Sean

$$0 := \quad pf [f' 2 \quad 0 : hN^+; \ pf \ i \ 'g;$$
$$n+1 := \quad n [f' 2 \quad n+1 : hN^+; \ n i \ 'g$$

Se vera que hN$^+$; $_m$i T ($_{pf}$ [ ). Primero, como $_m$ = $_{pf}$ [, donde y, por tanto, \ $_{pf}$ = ?, por la proposicion 3.28, hN$^+$; $_m$i T $_{pf}$. Segundo, si ' 2 , existe un n m tal que ' 2 $_n$. Sea $_1$:= $_{pf}$. Luego,

hN$^+$; $_m$i ' , hN$^+$; $_{n\ 1}$i ' Proposicion 3.28

, hN$^+$; $_n$i T p'q

, hN$^+$; $_m$i T p'q Proposicion 3.28

porque cada ' 2 $_n$ (f(') = n) depende de ' [' (en 3.28), que es disjunto con f' 2 $_{n+1}$: hN$^+$; $_n$ i 'g $_{n+1}$ (en 3.28), ya que, si ' \ $_{n+1}$ 6= ?, f(') > n + 1, lo cual es imposible, y ' \ = ?. □

Proposicion 3.37. Si LT es un conjunto in nito de oraciones, cada una de las cuales depende esencialmente de un conjunto nito y no es autodependiente, existe un LT tal que hN$^+$; i T ($_{pf}$ [ ).[30]

Demostracion. Sea := f'$_1$; '$_2$; : : : g. Nuevamente, asumo que \ $_{pf}$ = ?. Para cada n 2 !, sean $_n$ el conjunto del cual '$_n$ depende esencialmente, $_n$:= f'$_1$; : : : ; '$_n$g y

$_n$:= f ! : $_{pf}$ $_{pf}$ [$\bigcup_{i\ n}$ ($_i$ [f'$_i$g) y hN$^+$; i T p'q \$ ', si ' 2 $_n$g

Cada $_n$ es nito, porque S$_{i\ n}$ ($_i$ [f'$_i$ g) lo es. Ademas, se vera que para cada n 2 ! existen $_1$; : : : ; $_n$ tales que $_1$ $_2$ $_n$ donde $_i$ 2 $_i$ para cada 1 i n.

Primero, por la proposicion 3.36, para cada n 2 ! hay un modelo hN$^+$; i en el cual $_{pf}$ y T ($_{pf}$ [$_n$) es verdadera. Para cada 1 i n, sea

$$_i := \quad \ (\ pf [\bigcup_{k\ i} (\ k [f'kg)):$$

[30]Este resultado fue probado en colaboracion con Thomas Schindler.

Luego, para cada i n, i i+1. Y, como por la proposicion 3.29 cada ' 2 i depende de pf [S k i(k [f'kg), hN+; ¡i T i, con lo cual i 2 i.

De no recursivamente un arbol A como un conjunto de secuencias formadas a partir de miembros de f?g [S n2! n del siguiente modo:

1. h?i 2 A.
2. Si h 0; 1; : : : ; ni 2 A y nn+1 2 n+1, h 0; 1; : : : ; n; n+1i 2 A.
3. Nada mas esta en A.

Notese que, para cada n 2 !, A contiene una secuencia h 0; 1; : : : ; ni de longitud n.

Ademas, para cada secuencia tal, ? = 0 1 n y i 2 i, si 0 < i n, con lo cual todos los elementos de las secuencias estan conectados a traves de ?. Y, como cada i es nito pero tiene al menos un elemento, A es un arbol in nito de rami cacion nita |esto es, cada nodo pertenece a un numero nito de secuencias|. Luego, por el lema de K•onig, debe haber en A una secuencia in nita 01n : : : con i 2 i para todo i > 0.[31]

Sea := n2! n. Se vera que hN+; i T (pf [ ). Como, para cada n 2 !, pf \ n S = pf , pf \ = pf y, por la proposicion 3.28, hN+; i T pf .

Dada una 'i 2 , sea m > i el menor numero natural tal que, para todo k m, k no contiene miembros de i que no estuvieran ya en m. m existe porque i es siempre nito y las secuencias de j con j 2 ! son monotonas. Como i < m y m 2 m, hN+; mi T p'iq $ 'i. Dado el m que se eligio, la proposicion 3.28 implica que hN+; i T p'iq $ 'i. □

Si ningun miembro de es autodependiente y es, o bien nito, o bien tal que cada uno de sus elementos depende esencialmente de un conjunto nito de oraciones, es posible extender el conjunto pf de instancias aceptables del Esquema-T mediante los miembros de . Ademas, el modelo resultante es un modelo de T-Out.

Corolario 3.38. Sean y como en la proposicion anterior. Para toda oracion ' de LT , hN+; i T p'q ! '.

Demostracion. La prueba es trivial, en especial si ' 2 (pf [ ). Si ' 2= (pf [ ), como pf [, ' 2= . Por tanto, hN+; i :T p'q, esto es, hN+; i T p'q ! '. □

[31] *El lema de K•onig establece que si A es un grafo conectado (para cualesquiera dos nodos hay un camino que los conecta) con in nitos vertices, cada uno de los cuales pertenece a un numero nito de secuencias, entonces A* contiene una secuencia in nita.

§

Leitgeb ha logrado poner en terminos precisos la idea de dependencia y, con ella, la de fundacion, independientemente de su teor a semantica de la verdad, a diferencia de Kripke (vease el apartado 3.1.2), quien extrae el conjunto de oraciones fundadas de sus modelos de punto jo m nimos. Luego, mostr como es posible restringir el Esquema-T a instancias fundadas sin dar lugar a contradicciones ni consecuencias contraintuitivas, construyendo un modelo de L_T que extiende N^+ en el cual estas instancias resultan validas. Basandome en estos resultados, mostre que tambien es posible construir modelos en los cuales se validen aun mas instancias del Esquema-T, delimitadas tambien en funcion de la nocion de dependencia pero ya no solo por la nocion de fundacion.

Para saber si una oracion depende de un conjunto de expresiones es preciso recu-rrir al valor de verdad de esta u otras expresiones en el modelo estandar de la aritmetica. Por eso, al igual que las nociones de verdad de Kripke, la nocion de Leitgeb dada por el modelo $hN^+; {}_{pf}$ i es altamente compleja. En efecto, Philip Welch (2014) ha probado que es $^1{}_1$, eso es, solo puede ser de nida por una formula que comienza con un cuanti cador universal de segundo orden seguido de una formula de primer orden, o con expresiones aun mas complejas y, plausiblemente, lo mismo se aplica a los modelos que se obtienen mediante las proposiciones 3.36 y 3.37. No obstante, al igual que para los modelos de Kripke, existen axiomatizaciones parciales de $hN^+; {}_{pf}$ i, en las cuales no entro en detalle (cf. Schindler (2014a)). En la seccion que sigue presento una teor a axiomatica clasica que es independiente de toda construccion semantica.

3.3. Friedman-Sheard

La teor a fs que presento en esta seccion se debe originalmente a Harvey Friedman & Michael Sheard (1987), quienes ofrecieron una axiomatizacion signi cativamente dife-rente a la que ac introduzco. Esta se debe a Halbach (1994, 2011), quien hizo famosa la teor a.

fs consiste en una generalizacion de la teor a de la verdad composicional ct(pa$^+$) a oraciones de todo L_T , esto es, relativiza las clausulas composicionales, ya no al predi-cado $Sent_{L^+pa}$ sino ahora a $Sent_{LT}$. Como los axiomas resultantes no dicen nada acerca de la verdad de oraciones atomicas de la forma de T p'q y adoptar las instancias del Esquema-T para estas oraciones llevar a inmediatamente a contradiccion a traves de la oracion del mentiroso :T l en (3.5), fs cuenta con dos reglas especiales de introduccion y eliminacion del predicado, semejantes a T-Intro y T-Elim pero mucho mas restrictivas.

De nicion 3.39 (fs). Sea fs L_T la teor a que extiende pat con los siguientes axiomas:

fs1 t; s(T (t=s) $t = s)

8 .

fs2 8x($Sent_{LT}$ (x) ! (T :.x $:T x))

fs3 8x; y($Sent_{LT}$ (x!.y) ! (T (x!.y) $ (T x ! T y)))

fs4 8x; v($Sent_{LT}$ (8.vx) ! (T 8.vx $ 8tT x(t=v)))

y esta cerrada por las siguientes metareglas:

fs ` ' ) fs ` T p'q (nec)

fs ` T p'q ) fs ` ' (conec)

La regla nec se diferencia de T-Intro en que, para poder deducir T p'q a partir de ', esta oracion no puede ser meramente una premisa, no basta con que est hipoteti-camente asertada en un razonamiento, sino que es necesario que haya sido demostrada, que sea un teorema, que su asercion sea categorica. Y, a la inversa, lo mismo sucede con conec. Luego, de suponer que la oracion :T l del mentiroso es verdadera, i.e., que T l, no puede deducirse que :T l ni viceversa; fs es consistente.

Teorema 3.40 (Friedman & Sheard). fs es consistente.[32]

A pesar del atractivo intuitivo que poseen los axiomas y las reglas de fs, la teor a es, lamentablemente, incorrecta, lo cual ha llevado a algunos a rechazarla (cf. Leitgeb (2007), Barrio & Picollo (2013)).

Proposicion 3.41 (Friedman & Sheard). fs es !-inconsistente.

Demostracion. Sea f un s mbolo de funcion diadica que representa en q^+ la funcion recursiva que asigna a cada par hn; #(')i la formula que resulta de iterar n veces el predicado T a ', i.e., en q^+

f(0; p'q) := p'q

f(Sx; p'q) := pT num(f(x; p'q)) q

Aplicando el lema diagonal fuerte a :8xT f(x; y), se obtiene la oracion de McGee, que dice que no toda iteracion de T sobre ella misma es verdadera, i.e.,

q^+ ` m = p:8xT f(x; m)q (3.7)

[32]***Vease*** ***[Halbach (1994](#))*** para una prueba.

Este enunciado es una suerte de !-mentiroso que, bajo ciertos principios para la verdad como los que valida fs lleva a !-inconsistencias, a la paradoja de McGee (cf. McGee (1985)). Razonando en fs, supongase que 8xT f(x; m). Luego, por un lado, 8xT f(x + 1; m) y, por otro, T f(0; m) o, lo que es lo mismo, T p:8xT f(x; m)q. De esto ultimo, junto con los axiomas fs2 y fs4, se sigue que :8xT f(x + 1; m), una contradiccion. En consecuencia, el supuesto inicial es incorrecto; se debe concluir que :8xT f(x; m) es un teorema. Aplicando nec y el axioma fs3 ! veces sobre este teorema, en virtud de (3.7)

se tiene que T f(0; m), T f(1; m), T f(2; m), etc, i.e., una !-inconsistencia. □

A diferencia de kf, como establece el axioma fs2, a rmar la falsedad de una oracion ' en fs (T p:'q) es equivalente a a rmar su no verdad (:T p'q). En consecuencia, las logicas interna y externa de fs s coinciden y, por lo tanto, fs es incompatible con T-Out.

Observacion 3.42. fs + T-Out es inconsistente.

Demostracion. Porque la instancia de T-Out para la oracion :T l del mentiroso, T l ! :T l, implica :T l que, junto con nec, implica a su vez que T l.[33] □

Sin embargo, fs tiene el mismo poder deductivo que $rt_{<!}$, no es tan poderosa como kf o putb, que prueban los mismos enunciados de L^{+}_{pa} que $rt_{<\,0}$.

Teorema 3.43 (Halbach). Si ' es una oracion de L^{+}_{pa},[34]

fs ` ' , $rt_{<!}$ ` ':

Este resultado implica tambien que la incorreccion de fs no afecta las formulas de L^{+}_{pa} sino que viene unicamente por el lado de la verdad, porque $rt_{<!}$ es correcta con respecto a N^{+}.

Como ct(pa^{+}) fs, esta teor a prueba todas las instancias del Esquema-T para oraciones de L^{+}_{pa}. Ademas, por las reglas nec y conec, es capaz tambien de demostrar todas las instancias dadas por oraciones que son veri cables o refutables, v.g., los axiomas mismos y sus negaciones. En consecuencia, es claro que fs no es una teor a tipeada de la verdad, que logra trascender la distincion tarskiana entre lenguaje y metalenguaje permaneciendo en el marco de la logica clasica, aunque tambien cae en !-inconsistencias.

[33] *La incompatibilidad de* nec *y T-Out se conoce como `paradoja de Montague' (cf. Montague (1963)).*
[34] *Vease Halbach (1994)* para una prueba.

3.4. Verdad transparente paraconsistente

Si se desea un predicado de verdad transparente y, por ende, se esta dispuesta a abandonar el ambito de la logica clasica, las logicas paracompletas no son el unico efugio. Las logicas paraconsistentes, si bien no logran evitar que se deriven contradicciones a partir de las oraciones paradojicas, como la oracion del mentiroso, s bloquean el pasaje de una contradiccion a la absoluta trivialidad. Aquellos que pre eren la paraconsistencia a la paracompletitud como logica base para una teor a de la verdad sostienen que no hay nada malo en aceptar ciertas contradicciones, ya que algunas de ellas son verdaderas y, en consecuencia, aceptarlas no lleva a trivialidad. Se los conoce como `dialete stas'.

El texto dialete sta fundamental se debe a Priest (1987), quien introduce la logica paraconsistente lp, por `Logic of Paradox ', originalmente desarrollada de modo independiente por Florencio G. Asenjo y Newton da Costa (en sus tesis doctorales de 1954 y 1963, respectivamente; cf. Asenjo (1966) y da Costa (1974)), ciertas ampliaciones y una teor a de verdad transparente basada en una de estas ampliaciones. Posteriormente, Priest (2006b) y Ripley (2012a,b), entre otros,[35] presentaron sus propias variaciones so-bre lp y teor as transparentes de verdad. En esta seccion introduzco primeramente lp,[36] seguida de una teor a semantica de la verdad transparente formulada sobre ella. Luego presento las variaciones sobre lp de Priest y Ripley y las teor as semanticas de la verdad mas actuales defendidas por ellos en las secciones 3.4.2 y 3.4.3, correspondientemente.[37]

3.4.1. Verdad transparente en la logica paraconsistente basica

3.4.1.1. La logica de las paradojas

La logica lp, al igual que las logicas paracompletas k3 y b3, trabaja con modelos no clasicos. No obstante, la lectura de estos modelos que desde una perspectiva paraconsistente var a de la paracompleta. Dado un predicado n-adico R y un modelo M del lenguaje de primer orden L, R^M = hR^{M+}; R^M i al igual que antes, pero R^{M+} ya no es interpretada como la extension de R en M sino que jMj^n R^M lo es (i.e., el conjunto de n-tuplas de objetos del dominio que no pertenecen a R^M). Del mismo modo, jMj^n R $^{M+}$ es la antiextension de R en lugar de R^M . Desde un punto de vista paraconsistente, la extension y antiextension pueden solaparse |v.g., aquellos objetos del dominio que no pertenezcan ni a R^{M+} ni a R^M estaran tanto en la extension como

[35]*Vease tambien* ***Alan Weir (2005), Walter Carnielli, Marcelo Coniglio, & Joao Marcos (2007) y Beall (2009).***

[36]***Mi presentacion diverge tecnicamente de, por ejemplo, la de Priest (2006b, cap. 5), pero ambas son extensionalmente equivalentes.***

[37]***Para otras teor as como la que introduce Beall en 2009, vease Diego Tajer (2014).***

en la antiextension de R| pero deben agotar todo el dominio del modelo, a diferencia de lo que sucede en las logicas paracompletas. Luego, R^{M+} es meramente el conjunto de objetos del dominio que estan en la extension pero no en la antiextension de R, mientras que R^{M} es el de aquellos objetos que estan en la antiextension pero no en la extension de este predicado. Bajo la lectura paraconsistente, los modelos no clasicos se denominan tambien `modelos paraconsistentes', en lugar de `modelos parciales'.

lp y k3 comparten tambien el mismo esquema de valuacion: Kleene fuerte (vease el apartado 3.1.1). La diferencia entre k3 y lp es que, mientras la primera tiene un unico valor designado, un unico modo de que una oracion sea verdadera en un modelo, la segunda tiene dos: 1 y $\frac{1}{2}$. Del mismo modo, mientras que en k3 el unico valor de falsedad es 0, en lp tanto 0 como $\frac{1}{2}$ lo son. En consecuencia, en lp el valor $\frac{1}{2}$ no signi ca ya `ni verdadero ni falso' sino, al contrario, `verdadero y falso a la vez'. Esto se corresponde con la lectura paraconsistente de los modelos no clasicos. Si $v_{sk}^{M}(Rt_1; : : : ; t_n) = \frac{1}{2}$, $Rt_1; : : : ; t_n$ es verdadera y falsa a la vez, porque $ht^{M}_1; : : : ; t^{M}_n i$ pertenece tanto a la extension como a la antiextension de R.

De nicion 3.44 (lp). Si L es un lenguaje de primer orden, L es un conjunto de oraciones y ' 2 L una oracion, ' es consecuencia logica de en lp ($_{lp}$ ') sii no existe un modelo no clasico M de L tal que v_{sk}^{M}( ) 6= 0 (i.e., M $_{lp}$) y v_{sk}^{M}(') = 0 (o M 2_{lp} ').

Luego, si una oracion es tanto verdadera como falsa en un modelo, lo mismo sucedera con su negacion; y si en un condicional tanto el antecedente como el consecuente reciben valor $\frac{1}{2}$, otro tanto ocurre con el condicional. Como consecuencia, teniendo en cuenta la interde nibilidad de la disyuncion en terminos de la negacion y el condicional, el Tercero Excluido es verdadero en todo modelo paraconsistente en lp. En general, todas las verdades logicas de la logica clasica resultan asimismo verdaderas en lp, aunque a veces tambien falsas.[38] Por otra parte, la regla I! o, lo que es lo mismo, el metateorema de la deduccion, es valida. Ademas, como un enunciado universal cuyas instancias reciben valor mayor o igual a $\frac{1}{2}$ tambien le es asignado un valor mayor o igual a $\frac{1}{2}$, en virtud de la de nibilidad del cuanti cador existencial a partir de la negacion y el cuanti cador universal, la regla I9 tambien es valida en lp.

No obstante, algunas inferencias validas en logica clasica fallan en lp. Como se quer a, la regla Ex falso sequitur quodlibet

$$\frac{' \wedge :'}{\quad} \qquad \text{(EFSQ)}$$

[38] *Para una exposicion detallada vease Asenjo (1966), Priest (1979, 2006a,b, 2008).*

no preserva verdad en los modelos no clasicos bajo sk en lp. Porque si en un modelo M $v_{sk}^{M}(') = \frac{1}{2}$ y $v_{sk}^{M}(\ ) = 0$, ' ^ :' (i.e., :(' ! ')) tambien recibe $\frac{1}{2}$ y, por tanto, M $_{lp}$ '^:', pero M 2_{lp} . Luego, en lp una contradiccion no implica cualquier cosa; en caso de que una contradiccion fuese un teorema de una teor a sobre lp, la teor a no ser a necesariamente trivial.

Algunas otras fallas de reglas clasicas no son tan deseables para algunos defensores de la paraconsistencia. Por ejemplo, la regla E!, el Modus Ponens, resulta invalida en lp. Si en un modelo M $v_{sk}^{M}(') = \frac{1}{2}$ y $v_{sk}^{M}(\ ) = 0$, por el esquema sk para el condicional (de nicion 3.2), $v^{M}('$! $) = \frac{1}{2}$ y, por ende, M $_{lp}$ ' y ' ! , pero M 2_{lp} . Otras reglas intuitivamente validas como el silogismo disyuntivo tambien resultan invalidas en lp.

Al igual que k3 y b3, lp es correcta y completamente axiomatizable mediante diversos calculos alternativos. Dado que en esta seccion deseo considerar la posibilidad de abandonar no solo reglas y principios logicos que conciernen a las constantes logicas sino tambien reglas estructurales, propias exclusivamente de la nocion de consecuencia logica, opto en lo que sigue por calculos de secuentes al estilo de Gerhard Gentzen, donde esto es posible (cf. Greg Restall (2000)). . representa la echa de secuentes.

Con respecto a un calculo de secuentes para lp, cabe destacar la validez de la regla estructural Cut:

$$\frac{\ .\ ';\quad ;\ '\ .\ }{;\ .\ \ ;} \qquad \text{(Cut)}$$

esto es, Cut establece la transitividad de la relacion de consecuencia logica de lp. Finalmente, al igual que en k3 y b3, en lp `=' es un predicado logico que solo admite su interpretacion usual, clasica.[39]

3.4.1.2. Verdad transparente en LP

Para evitar ambig•uedades opto por una presentacion axiomatica de las teor as paraconsistentes de la verdad que quiero considerar en esta investigacion. Naturalmente, los modelos correspondientes a estas teor as continuan jugando un rol central, son un medio para establecer la no trivialidad o consistencia absoluta de los sistemas.[40]

La teor a paraconsistente mas sencilla, lptt (por lp Transparent Truth) (cf. Beall (2009, x1.4)), es la que resulta de cerrar lp junto con cierta teor a de la sintaxis bajo las

39 ***Este no es necesariamente el caso en toda logica paraconsistente. La relacion de identidad tambien admite interpretaciones dialeteicas en algunos sistemas. Vease, por ejemplo, Beall (2013).***

[40] ***Al estar formuladas sobre logicas que permiten que ciertas contradicciones sean (i.e., reciban valor $^{1}_{2}$***), con frecuencia las teor as de la verdad paraconsistentes no son simple pero s absolutamente consistentes.

reglas que constituyen el principio de Intersustitutividad, expresadas ahora en el calculo de secuentes:[41]

; ' .. '; (IS)
; T p'q .. T p'q;

De nicion 3.45 (lptt). lptt L_T es la teor a que extiende un calculo para lp con IS e implica todos los teoremas de pat.[42]

Como el unico predicado involucrado en L^+_{pa} es la identidad, todos los modelos de lptt deben interpretar esta porcion de L_T de modo clasico. La existencia de estos modelos queda garantizada por el teorema 3.10 de Kripke. Nuevamente, si L_T es un conjunto de oraciones, sea hN^+; i el modelo paraconsistente de L_T que extiende N^+ asignando a T el par ordenado h ; f' 2 L_T : :' 2 gi como su interpretacion.

Corolario 3.46. Existen conjuntos de oraciones L_T tales que hN^+; i $_{lp}$ lptt.

Demostracion. Como todo modelo paraconsistente es un modelo de lp y cualquier hN^+; i extiende N^+, resta probar unicamente que existe un tal que las reglas que conforman el principio de IS preservan verdad (i.e., 1 o $\frac{1}{2}$) en hN^+; i. Sea tal que $_{sk}$( ) = (cf. de nicion 3.1). Por la proposicion 3.12, $v_{sk}^{hN+; i}$(T p'q) = $v_{sk}^{hN+; i}$(') para toda oracion ' del lenguaje. □

Luego, todos los modelos no clasicos de punto jo sobre sk son modelos de lptt. En ellos, las oraciones que, desde el punto de vista de la paracompletitud resultaban no ser ni verdaderas ni falsas, ahora son verdaderas y falsas al mismo tiempo, como la oracion :T l del mentiroso; mientras que las expresiones que adquir an valores clasicos de verdad los mantienen.

Corolario 3.47. lptt cuenta entre sus teoremas con todas las instancias del Esquema-T.

Demostracion. Directamente de IS, porque en lp la regla I! es valida. □

3.4.2. La teor a de la verdad de Priest

Si bien algunos paraconsistentes han mostrado cierta simpat a por lptt (cf. Bradley Dowden (1984), Beall (2009, cap. 1)) la mayor a ha argumentado en contra de ella, en

[41] ***Mejor dicho, la intersustitutividad de una oracion y su predicacion de verdad puede probarse a partir de estas reglas.***

[42] ***Si bien el resultado de formular los axiomas de pat sobre lp no es una teor a que contiene todos los teoremas de pat |v.g., porque algunas reglas clasicas no son validas|, Beall (2013) muestra como complementar lp + pat con una serie de reglas para que todas las consecuencias clasicas de pat se sigan tambien. Asumo que lptt cuenta con estos recursos.***

tanto carece de un condicional que satisfaga la regla de Modus Ponens. Suele considerarse que para que una conectiva ! pueda llamarse propiamente `condicional' debe satisfacer tanto Identidad como E!, a diferencia del condicional de lp.

> Any conditional worth its salt [. . .] should satisfy the modus ponens princi-ple [. . .]. This is, indeed, analytically part of what implication is. Yet this principle fails for material implication [!] as we saw. [Modus Ponens] is not, in general, true. Hence, material implication is not the conditional. (Priest, 2006b, p. 83)

Ademas, de acuerdo con Priest, el Esquema T establece el signi cado del pre-dicado veritativo y, por ende, las equivalencias que se empleen en su formulacion no pueden ser meramente materiales sino intensionales; deben satisfacer Modus Ponens pa-ra permitir el uso del predicado veritativo (vease el apartado 5.2), i.e., la inferencia de la predicacion de verdad de una oracion a la oracion misma; y no deben ser contraponibles, esto es, si una oracion ' implica , no debe seguirse necesariamente que : implique :' porque, en palabras del mismo Priest (2006b, p. 79), \There seems to be no reason why, in general, if ' is a dialetheia, T p'q is too. If ' is a dialetheia, T p'q is certainly true, but it might be simply true, and not also false."

En consecuencia, al igual que Field en el caso de las logicas paracompletas, mu-chos paraconsistentes han buscado suplementar lp con nuevos condicionales (cf. Priest (2006b), Beall (2009), Federico Pailos & Lucas Rosenblatt (2014)) que, en principio, di eran del condicional material y, centralmente, satisfagan Modus Ponens y la regla de introduccion del condicional. Lamentablemente, la tarea no es sencilla a causa de paradojas como la de Curry (cf. Haskell B. Curry (1942), Pailos (2014)). Si L es un lenguaje cualquiera de primer orden, sea L el resultado de expandir L con un nuevo operador binario .

Proposicion 3.48. Sea l una extension de lp formulada en L_T donde las siguientes reglas resultan validas:

$$\frac{;\ '\ .\qquad ;}{.\ '\qquad ;} \qquad \text{(I)}$$

$$;\ ';\ '\qquad .\quad ; \qquad \text{(E)}$$

o Modus Ponens para , y

$$\frac{.\ '\quad ('\quad);}{.\ '\quad ;} \qquad \text{(Contr)}$$

o Contraccion para , y sea th lptt una teor a formulada sobre l. Luego, para toda ' 2 L_T , th `$_l$ '.

Demostracion. Sea ' una oracion cualquiera de L_T . Como q^{+} Iptt, en virtud del lema fuerte de diagonalizacion (teorema 1.8) aplicado a T x ' sobre la variable x, existe un termino c de L^{+}_{pa} tal que

$$th \vdash_{I} c = pT c \quad 'q \tag{3.8}$$

T c ' es una oracion que dice de s misma que implica ', una oracion de Curry si '

es una falsedad. Luego, en th (la omito como premisa),

T c ' . T c ' (IS)

T c . T c ' (I)
.T c (T c ')
(Contr)
.T c ' (IS)
.T c

T c ' . T c ' (IS)
T c . T c ' (I)
.T c (T c ')
(Contr)
.T c '

T c; T c ' . ' (E)
(Cut)
.'

□

En consecuencia, un condicional que valide las reglas de introduccion y eliminacion y contraiga sobre Ip no puede convivir con un predicado de verdad que satisfaga las reglas que conforman el IS sin tornar la teor a trivial, algo que ni siquiera una paraconsistente aceptar a. Esta derivacion de trivialidad se conoce como `paradoja de Curry'.

La propuesta de Priest (2006b) consiste entonces en extender Ip con un nuevo condicional que satisface las reglas de introduccion y eliminacion usuales pero no contrae. A continuacion introduzco la logica resultante y en el apartado subsiguiente una teor a de la verdad transparente formulada sobre ella.

3.4.2.1. La logica de Priest

Como se desea que sea un condicional que satisfaga las reglas I y E , no podra ser el condicional material sino que, al contrario, debera tener un caracter intensional. En lugar de clausulas composicionales, Priest utiliza mundos posibles para dar el signi cado de . Luego, los modelos de los lenguajes L cuentan ahora con un conjunto de mundos posibles y una relacion de accesibilidad entre ellos.

De nicion 3.49 (Modelos de Priest). Si M es un modelo no clasico de un lenguaje de primer orden L, M^{P} es un modelo de Priest sii extiende M con un conjunto $W_{M}P$ de mundos posibles y una relacion binaria $R_{M}P$ $W_{M}{}^{2}{}_{P}$ entre mundos posibles, tal que, para todo w 2 $W_{M}P$, existe un w^{0} tal que hw^{0}; wi 2 $R_{M}P$ ($R_{M}P$ es sobreyectiva).

El esquema de valuacion de lp, sk, debera extenderse ahora a formulas que con-tengan el nuevo condicional .

De nicion 3.50 (Esquema de Priest). Sea L un lenguaje de primer orden. El esquema de valuacion de Priest ep para L es el conjunto de funciones valuacion v_{ep}^{M} : L ! f1; 0; $\frac{1}{2}$ g para cada modelo de Priest M de L tales que $v_{ep}^{M}(') = \min f v_{ep}^{w}(') : w\ 2\ W_M g$, donde, para cada w 2 W_M,

$v_{ep}^{w}(t = s)$ = 8 1 si $t^M = s^M$

<0 en caso contrario

w : 8 1 si $ht_1^M; : : : ; t_n^M i\ 2\ R^{M+}$

h i 2

>

>

< 1

2 en caso contrario

:

- $v_{ep}^{w}(:') = 1 \quad v_{ep}^{w}(')$
- $v_{ep}^{w}(' ! \quad) = \max(1 \quad v_{ep}^{w}('); v_{ep}^{w}( ))$

$v_{ep}^{w}(' \quad) \ \frac{1}{2}$ sii, para todo w^0 tal que w R_M w^0, si $v_{ep}^{w_0}(') \ \frac{1}{2}$, $v_{ep}^{w^0}(\quad) \ \frac{1}{2}$

$v_{ep}^{w}(8v') = \min f v_{ep}^{w}('[t=x]) : t$ es un termino cerradog

Notese que para las formulas de L que no contienen el esquema ep se comporta exactamente igual que sk. Notese tambien que la anteultima clausula para las funciones v_{ep}^{w} hace que para cada mundo posible w en un modelo no haya una unica funcion v_{ep}^{w} sino varias. Por ejemplo, si en todo w^0 al cual w accede se cumple que, si $v_{ep}^{w_0}(')$ $\frac{1}{2}$, $v_{ep}^{w_0}( )\ \frac{1}{2}$, entonces $v_{ep}^{w}(' \ )$ puede valer tanto 1 como $\frac{1}{2}$.

La logica basada en modelos de Priest y el esquema de valuacion ep que interpreta los valores de verdad 1; 0 y $\frac{1}{2}$ igual que lp es lo que denomino `logica de Priest', pl.

De nicion 3.51 (pl). Si L es un lenguaje de primer orden, L un conjunto de oraciones y ' 2 L una oracion, ' es consecuencia logica de en pl ($_{pl}$ ') sii no existe un modelo de Priest M de L tal que $v_{ep}^{M}( )$ 6= 0 (o M $_{pl}$) y $v_{ep}^{M}(') = 0$ (o M 2_{pl} ').

Como quer a Priest, las reglas I y E son validas en pl. Para el caso de I , notese que, si ' $_{pl}$, entonces no hay un modelo M de Priest y un mundo w 2 W_M tales que $v_{ep}^{w}(')\ \frac{1}{2}$ y $v_{ep}^{w}( ) = 0$. Luego, para cualquier w 2 W_M, $v_{ep}^{w}(' \ )\ \frac{1}{2}$, i.e., M $_{pl}$ ' para todo modelo M de Priest. Asimismo, si M $_{pl}$ ' ^ ('), para todo $w \; 2 \; W_M$, $v^w_{ep}(')$ $2 \; \frac{1}{2}$ y $v^w_{ep}('$) $2 \; \frac{1}{2}$, con lo cual, para cualquier w^0 tal que wR_Mw^0, $v_{ep}^{w_0}(\;)$ $2 \frac{1}{2}$. Como R_M es sobreyectiva, M $_{pl}$, esto es, vale E .

Adicionalmente, el condicional no es contraponible y Contr resulta invalida.[43] Para ver lo primero, notese que un condicional ' tal que $v^M_{ep}(') = 1$ y $v^M_{ep}($ $) = \frac{1}{2}$ es verdadero en M, mientras que su contraposicion : :' es tal que $v_{ep}{}^M(:\;) = \frac{1}{2}$ y $v_{ep}{}^M(:') = 0$. Luego, por la sobreyectividad de R_M, existen mundos $w; w^0 \; 2 \; W_M$ tales que $wR_M w^0$ y $v^{w^0}_{ep}($: $) = \frac{1}{2}$ y $v^{w^0}_{ep}($:') = 0 y, por ende, $v^w_{ep}($: : ') = 0. En consecuencia, el condicional contrapuesto es falso en M.

Del mismo modo, Contr falla. Supongase que ' y no contienen , y considerese un modelo M de Priest tal que $W_M = fw_1; w_2g$ y $R_M = fhw_1; w_2i; hw_1; w_1ig$.[44] Aun mas, supongase que $v_{ep}{}^{w_1}(') = 0$, $v_{ep}{}^{w_2}(')$ $2 \frac{1}{2}$ y $v_{ep}{}^{w_2}($ $) = 0$. Luego, todo mundo w de M es tal que, si $v_{ep}{}^w(')$ $2 \frac{1}{2}$, entonces $v_{ep}{}^w(')$ $2 \frac{1}{2}$ (w_1 falsi ca el antecedente de este condicional mientras que w_2 veri ca trivialmente el consecuente, porque w_2 no accede a ningun mundo) y, por ende, M $_{pl}$ ' ('). Ahora bien, como $w_1R_Mw_2$, $v_{ep}{}^{w_1}$ (') = 0 y, por tanto, M 2_{pl} ' .

La falla de Contr va a permitir dar en pl una teor a de la verdad que contenga todas las instancias del Esquema T formuladas con un condicional que satisface las reglas I y E sin llevar a trivialidad, como se vera en el apartado que sigue.

3.4.2.2. Verdad transparente en PL

Una de las razones principales por las cuales Priest quiere un condicional intensional que satisfaga las reglas de introduccion y eliminacion usuales es para formular con el el Esquema T en el lenguaje de una logica paraconsistente y, de este modo, poder realizar ciertas inferencias que involucran el predicado veritativo de modo esencial (vease el apartado 5.2 y Priest (2006b, x4.2)). En efecto, Priest no considera el Esquema-T sino el siguiente principio formulado en L_T para cada oracion ' de este lenguaje:

T p'q' (Esquema-T de Priest)

donde 'abrevia (') ^ (') (que a su vez abrevia una formula en la cual ^ no ocurre sino que esta dada en terminos de ! y :).

De nicion 3.52 (pltt). pltt L_T es la teor a que extiende un calculo para pl con todas las instancias del Esquema-T de Priest e implica todos los teoremas de pat.

43 ***Esto es posible porque Priest (2002) prob la no trivialidad de*** pl.

44 ***Notese que R_M es sobreyectiva, como requiere la de nicion 3.49.***

pltt, por Priest Logic Transparent Truth puede ser extra da de Priest (2006b), pero jamas ha sido expl citamente formulada. En consecuencia, tampoco se conoce una prueba de consistencia. No obstante, es sencillo ver como esta teor a evita la paradoja de Curry presentada al comienzo de esta seccion. Como Contr no vale en pl, es claro donde la derivacion de cualquier oracion ' es bloqueada, pero esto no es su ciente para ver como la logica de Priest acomoda el fenomeno de Curry.

Sea ' una falsedad, v.g., 0 6= 0. De acuerdo con (3.8)

$$\text{pltt} \ `_{pl} \ c = \text{p}T \ c \quad \text{'q}$$

Claramente, T c ' no puede ser verdadera en un modelo M de Priest tal que M $_{pl}$ pltt, porque, en ese caso, para todo w 2 W_M, $v_{ep}{}^{w}$(T c ') $\frac{1}{2}$ y, por el Esquema-T de Priest, $v_{ep}{}^{w}$(T c) $\frac{1}{2}$ tambien, con lo cual en todo mundo w que acceda a algun otro $v_{ep}{}^{w}$(') $\frac{1}{2}$, lo cual es imposible. Luego, T c ' debe ser falsa en todo modelo. En efecto, esto es perfectamente posible en los modelos de Priest para pltt (recuerdese que para que una oracion sea falsa en un modelo basta que lo sea en un mundo posible).

Supongase que M es un modelo tal, w_1; w_2 2 W_M, $w_1 R_M w_2$ y w_2 no accede a ningun mundo posible en M. Aun mas, supongase que $v_{ep}{}^{w_2}$ (T c) $\frac{1}{2}$ y $v_{ep}{}^{w_2}$ (') = 0. Esto no es un problema porque, si bien implica que $v_{ep}{}^{w_2}$ (T c ') $\frac{1}{2}$, lo cual queda tambien implicado por el hecho de que w_2 no ve ningun otro mundo, los mundos posibles no obedecen necesariamente Modus Ponens; los modelos lo hacen. Luego, $v_{ep}{}^{w_1}$ (T c ') = 0 y, por tanto, M 2_{pl} T c '.

Finalmente, cabe destacar que pltt valida las reglas T-Intro y T-Elim pero no el principio IS. Si bien esta es una consecuencia deseada por Priest, como se vio en la segunda cita al comienzo de este apartado 3.4.2, tambien es la razon principal por la cual, v.g., Beall (2009) critica la teor a de Priest y opta por desarrollar un condicional intensional alternativo a que valide este principio.

Proposicion 3.53. Mientras que T-Intro y T-Elim son validas en pltt, falla IS, si la teor a es no trivial.

Demostracion. La validez de las reglas T-Intro y T-Elim se sigue inmediatamente del Esquema-T de Priest y E . La falla de IS se debe a la posibilidad de que en el Esquema-T de Priest un lado de la equivalencia obtenga valor 1 en un modelo mientras que el otro valor $\frac{1}{2}$. V.g., si M es un modelo de Priest de pltt, la oracion :T l del mentiroso obtiene valor $\frac{1}{2}$ en M, pero su predicacion de verdad puede valer 1. Luego, la negacion de la primera, ::T l obtiene valor $\frac{1}{2}$ en M y es, por ende, verdadera ah , mientras que la negacion de la segunda, :T p:T lq obtiene valor 0. En consecuencia, la inferencia de

::T I a :T p:T Iq no preserva verdad en M. Pero esta inferencia se sigue del IS:

:T I . :T I (IS)
T p:T Iq . :T I
T p:T Iq::T I.
::T I . :T p:T Iq

□

3.4.3. Abordajes subestructurales y verdad transparente

Un tercer modo de debilitar la logica para evitar las hipotesis del teorema de Tarski (teorema 2.9) y as permitir a incorporacion de un predicado de verdad transparente a una teor a de la sintaxis consiste en abandonar reglas o principios clasicos, no ya concernientes a tales o cuales operadores logicos, como el Tercero Excluido o el EFSQ, sino unicamente a la nocion misma de consecuencia logica, i.e., reglas estructurales. Las logicas resultantes se conocen como `logicas subestructurales'.

Las reglas estructurales basicas de la logica clasica son Re exividad

' . ' (Re ex)

Monoton a .

.
; . ; (Mon)

Contraccion ; '; ' .

; ' . (Contr)

y Transitividad o Cut (vease el apartado 3.4.1.1).

Las logicas subestructurales que se emplean con mas frecuencia en la formulacion de teor as de verdad transparente son aquellas que abandonan o bien Cut o bien Contr. Naturalmente, abandonar la regla de Contraccion presupone que los secuentes no esten dados en terminos de conjuntos sino otro tipo de entidades colectivas a las cuales un objeto pueda pertenecer mas de una vez, v.g., secuencias. En vista al apartado 5.3, considero exclusivamente la logica subestructural intransitiva st, por Strict Tolerant, que rechaza Transitividad pero no Contraccion u otras reglas estructurales como Monoton a o Re exividad;[45] y la teor a de verdad transparente sttt formulada en st.

[45] *Para mas detalles acerca de las logicas subestructurales, veanse Restall (2000) y Francesco Paoli (2002). Para un ejemplo de teor a de la verdad transparente formulada sobre una logica subestructural en la cual no vale Contr, vease Elia Zardini (2011).*

3.4.3.1. Una logica intransitiva

La logica intransitiva que introduzco en este apartado, originalmente desarrollada por Robert van Rooij (2011), trabaja con modelos no clasicos (de nicion 3.1) y los interpreta paraconsistentemente, esto es, si R es un predicado n-adico de un lenguaje de primer orden L y M es un modelo no clasico de M, la extension y la antiextension que M asigna a R no son R^{M+} y R^{M} sino jMj^{n} R^{M} y jMj^{n} R^{M+}, respectivamente (vease el apartado 3.4.1.1). Aun mas, el esquema de valuacion en funcion del cual esta logica esta de nida es el mismo sk. La diferencia entre st y lp (de nicion 3.44) yace en el modo en el cual la nocion de consecuencia logica esta de nida.

De nicion 3.54 (st). Si L es un lenguaje de primer orden, L es un conjunto de oraciones y ' 2 L una oracion, ' es consecuencia logica de en st ($_{st}$ ') sii no existe un modelo no clasico M de L tal que $v_{sk}{}^{M}$( ) = 1 y $v_{sk}{}^{M}$(') = 0 (i.e., M 2_{st} ').

En st tanto 1 como $\frac{1}{2}$ representan verdad, aunque el ultimo valor tambien repre-senta falsedad, pero la nocion de consecuencia logica no esta de nida como preservacion de verdad. De hecho, $_{st}$ no preserva ningun valor de verdad, lo cual permite la falla de transitividad. Lo que debe ocurrir para que un argumento resulte valido en st es que, si las premisas son estricta o absolutamente verdaderas |i.e., valen 1|, la conclusion debe ser tolerantemente verdadera |i.e., puede valer 1 o $\frac{1}{2}$, pero no 0|. En st hay una diferencia sustancial entre la asercion hipotetica de un conjunto de premisas , esto es, $_{st}$: : : y su asercion categorica, i.e., $_{st}$.

Al igual que en lp, todas las verdades logicas de la logica clasica, v.g., el Tercero Excluido, resultan verdaderas en st. Notese que, de acuerdo con la de nicion 3.54, $_{st}$ ' si y solo si ' recibe valor 1 o $\frac{1}{2}$ en todo modelo no clasico. Por ende, ' es una verdad logica de st si y solo si es una verdad logica de lp. Pero, a diferencia de lp, las inferencias de la logica clasica tambien resultan validas en st, porque si existe un modelo no clasico en el cual las premisas de un argumento reciben valor 1 y la conclusion 0, tambien hay un modelo clasico en el cual esto ocurre (cf. Ripley (2012b, lema 1)), razon por la cual sus defensores con frecuencia la consideran una logica clasica.

No obstante, como se~nalan Barrio et al. (forthcoming), st no es logica clasica. La diferencia radica en que algunas metainferencias clasicas fallan en esta logica intransiti-va. Mientras que en un calculo de secuentes las inferencias toman la forma de secuentes, i.e.

.

las metainferencias permiten inferir secuentes de otros secuentes. Por ejemplo, la infe-rencia

; ? . '; (EFSQ)

ahora expresada en forma de secuentes, resulta valida en st porque una contradiccion no recibe valor 1 en ningun modelo no clasico; mientras que la metainferencia corres-pondiente

. ?;

. '; (EFSQ^c)

donde ? no es asertada hipotetica sino categoricamente, es valida en logica clasica pero invalida en st. Porque aunque implique logicamente una contradiccion (en caso en que = ?), puede ocurrir que en algun modelo reciba valor 1 y ? $\frac{1}{2}$. Como ' es cualquier oracion, basta con elegir una falsedad para que la conclusion del EFSQ^c no se siga. Por esta razon y porque st se de ne en terminos de modelos paraconsistentes clasi co esta logica como paraconsistente, aunque estar a dispuesta tambien a asignarle una categor a por fuera de la oposicion paracompleta-paraconsistente.

Asimismo, si bien la regla Modus Ponens

; '; ' ! . ; (E!)

ahora expresada en secuentes, es valida en st, porque solo hay que evaluarla en los casos en los cuales tanto ' como reciben valor 1, su version categorica, de metainferencia

. ';. ' ! ; (E!^{c})

. ; ;

que es valida en logica clasica, resulta invalida en st. Porque, si = ?, es posible un modelo en el cual todos los miembros de reciben valor 1, ' y, por ende, tambien ' ! , reciben valor $\frac{1}{2}$, mientras que valor 0.

Sin embargo, no todas las metainferencias clasicas fallan en st. V.g., la regla de introduccion del condicional

; ' . ;

. ' ! ; (I!)

ahora en terminos de secuentes, es valida, porque, si no hay un modelo en el cual ' valga 1 y 0, de acuerdo con sk el condicional ' ! no vale 0 en ningun modelo tampoco. Luego, st no enfrenta los problemas de las logicas paracompletas como k3 y b3 o las paraconsistentes como lp con respecto a los condicionales: tanto I! como E!, e Identidad, valen.

Usualmente, cuando se ofrece un calculo de secuentes para la logica clasica, no se incluye en la presentacion la regla estructural Cut (cf. Boolos et al. (2007, cap. 14)) porque esta se deriva directamente de las otras reglas. Sin embargo, si se incorporan nuevas reglas o axiomas no logicos Cut puede dejar de valer (cf. Pablo Cobreros, Paul Egre, Ripley & Van Rooij (2013)). Por ende, si se desea permanecer en un sistema clasico, es preciso agregarla como una regla primitiva.

En consecuencia, si se quiere un calculo para st es posible trabajar directamente con un calculo clasico en el cual la regla Cut no haya sido expl citamente agregada (cf. Ripley (2012a)), aunque existen otros calculos de secuentes correctos y completos, dados, por ejemplo, por secuentes de tres lados (cf. Ripley (2012b, x4.2)). En el apartado que sigue presento una teor a de la verdad transparente formulada sobre un calculo clasico sin Cut.

3.4.3.2. Verdad transparente en ST

La falla de transitividad de st permite incorporar a un calculo para esta logica todos los teoremas de pat junto con principios de verdad transparente sin llevar a trivialidad.

De nicion 3.55 (sttt). sttt L_T es la teor a que extiende el calculo de secuentes de la logica clasica (sin Cut) con los secuentes . ' para cada axioma ' de pat y esta cerrada bajo las reglas que conforman el IS.

Como st valida todas los teoremas e inferencias de la logica clasica y q^{+} sttt, sttt, por Strict Tolerant Transparent Truth, prueba la oracion :T I del mentiroso en (3.5):

:T I . :T I (IS) T
. :T I; :T I
. :T I

Ademas, en sttt el mentiroso implica cualquier conjunto de oraciones:

:T I . :T I
(IS) :T I . T I
:T I; :T I .
:T I .

No obstante, nada de esto implica que sttt sea una teor a trivial, eso es, que el secuente vac o ` . ' valga en la teor a, porque esta tiene un modelo no trivial. Si el secuente vac o fuera demostrable en sttt, por la regla estructural Mon, todas las inferencias estar an permitidas en esta teor a.

Proposicion 3.56 (Ripley). Existe un modelo no clasico hN; i de L_T tal que hN; i $_{st}$ sttt.[46]

Es precisamente la falla de Cut la que bloquea que se in era el secuente vac o de los secuentes . :T I y :T I .. En efecto, en los modelos no clasicos hN; i de sttt, $v_{sk}^{hN;\ i}(:T\ I) = \frac{1}{2}$, lo cual explica la validez de los secuentes . :T I y :T I . pero tambien la falla de transitividad.

Corolario 3.57. sttt cuenta entre sus teoremas con todas las instancias del Esquema-T y valida las reglas T-Intro y T-Elim.

Demostracion. Porque el IS es un principio de intersustitutividad, Identidad es una verdad logica de st y esta logica valida Re ex, i.e., es re exiva. □

§

En este cap tulo he mostrado que es perfectamente posible abandonar la distincion tarskiana entre lenguaje y metalenguaje pero que, a la vez, esto tiene sus costos: debe dejarse de lado, o bien la logica clasica, o bien algunas instancias del Esquema-T u otros principios de transparencia. Asimismo, las teor as resultantes pueden ser demasiado complejas, restrictivas, arbitrarias o incorrectas. Por estas razones, no es sencillo optar por una de ellas sin jar primero ciertos objetivos. En los cap tulos que siguen exploro las condiciones que debe cumplir un sistema formal de verdad para poder ser adoptado por de acionistas. Si bien el resultado no es un voco, muchas teor as que ac introduje no son viables desde un punto de vista de acionista y deben ser descartadas, mientras que otras resultan mas o menos exitosas. En el ultimo cap tulo de esta tesis ofrezco diversas teor as de la verdad que, argumento, se adecuan mejor a las demandas del de acionismo que las presentadas en este cap tulo.

[46]*Vease [Ripley (2012a)] para una prueba de un resultado semejante.*

4

La verdad de acionada

\. . . the relevance of a theory of truth may lie in its import regarding the irrelevance of truth."

{ Paul Horwich, Truth

El de acionismo es una postura loso ca en torno a la verdad que aglutina diversas tesis heterogeneas. Esto di culta enormemente su exposicion. Cuando se quiere hablar del de acionismo en terminos generales y no de tal o cual corriente las formulaciones resultan vagas y a veces contradictorias; y a medida en que se adquiere mas claridad y precision se pierde el caracter general de la descripcion. No pretendo exponer ac todas y cada una de las posiciones que se identi can a s mismas con el de acionismo ni discutir todas las tesis que son usualmente asociadas a esta postura sino hacer mas bien lo primero: explorar lo que podr a llamarse `nucleo comun' de hipotesis de acionistas, para luego darle precision y coherencia, y estudiar sus implicancias en relacion a teor as formales de la verdad en el cap tulo siguiente.

Hay al menos una tesis que es de nitoria de la corriente de acionista, i.e., que la expresion `es verdadera' no existe en el lenguaje natural para adscribir una propiedad sustantiva a ciertos los portadores de verdad, v.g., a aquellos que guardan cierta relacion de correspondencia con el mundo, sino que solo cumple roles expresivos de ndole logi-ca, semejantes a los de las conectivas y operadores logicos usuales. Fundamentalmente, permite expresar ciertos conjuntos in nitos de oraciones mediante una unica expresion, su `conjuncion in nita', como, por ejemplo, el conjunto de todos los teoremas de la aritmetica, mediante

Todos los teoremas de la aritmetica son verdaderos. (4.1)

Dentro (y tambien fuera) del de acionismo suele considerarse que la razon por la cual el predicado de verdad es capaz de cumplir estas funciones yace en que predicar verdad de una oracion es simplemente otro modo de a rmar el contenido de la oracion: una oracion y su predicacion de verdad son siempre equivalentes. Esta equivalencia suele expresarse por medio de principios de transparencia como el Esquema T que, en consecuencia, se considera que expresan si no todo al menos parte del signi cado del predicado veritativo.

En este cap tulo doy primero una breve historia heur stica de los or genes del de acionismo: la teor a de la redundancia. Luego, analizo en detalle la funcion expresiva que el de acionismo asigna al predicado de verdad: que la posibilita y en que consiste. Por ultimo, la seccion 4.3 se ocupa de los principios que expresan las caracter sticas del predicado veritativo que le permiten cumplir las funciones que el de acionismo le asigna, esto es, de los principios que expresan el signi cado de la verdad y las principales objeciones que han encontrado en la literatura.

4.1. Breve prehistoria del de acionismo

Hasta comienzos del siglo XX toda investigacion loso ca acerca de la verdad estaba enfocada en la busqueda de una de nicion intensional de esta palabra, de la esencia o la naturaleza del concepto que ella denota. La teor a correspondentista de la verdad era la mas aceptada a pesar de la oscuridad de sus diversas formulaciones. Sin embargo, nada se hab a dicho aun de una supuesta funcion expresiva de corte logico que el predicado de verdad cumplir a en el lenguaje. Este rol comenz a tornarse visible solo despues de que se advirtiera expl citamente que, prima facie, el contenido de una oracion A puede transmitirse igualmente predicando verdad sobre A; que el predicado de verdad no agrega nada al contenido proposicional de una oracion.[1] As surgieron los primeros (pre)de acionistas, hoy llamados `redundantistas', entre ellos Gottlob Frege, Frank P. Ramsey y Alfred J. Ayer. Por ejemplo, de acuerdo con Frege,

> It is also worthy of notice that the sentence `I smell the scent of violets' has the same content as the sentence `it is true that I smell the scent of violets'. So it seems, then, that nothing is added to the thought [proposicion] by my ascribing to it the property of truth. [. . .] The meaning of the word `true' seems to be altogether unique. May we not be dealing here with something which cannot, in the ordinary sense, be called a quality at all? (Frege, 1918-19, p. 88)

[1] ***El contenido proposicional de una oracion puede entenderse informalmente como aquello que la***

oracion comparte con todas las otras que son necesariamente equivalentes a ella.

La idea no es que el predicado de verdad no agrega absolutamente nada a una oracion sobre la cual se predica. Podr a, en algunos casos, agregar algo al sentido de la oracion, enfatizarla, presentarla de otro modo, etc. Lo que se sostiene es que, de alguna manera, la predicacion de verdad no agrega nada al contenido proposicional de la oracion que se dice que es verdadera sino que es equivalente a ella. Llamo a esto `tesis de la redundancia conceptual de la verdad'.

En consecuencia, siguiendo a Frege, el predicado de verdad no parece ser un predi-cado como todos los otros; al no decir nada del objeto al cual se aplica, no puede denotar un concepto ordinario. La tesis segun la cual la verdad directamente no es un concepto o propiedad genuina fue heredada posteriormente por varios defensores del de acionismo (cf. Peter F. Strawson (1949) y Dorothy L. Grover, Joseph L. Camp & Belnap (1975)), mientras que otros adoptaron una version debilitada, como se vera mas adelante. Junto con la tesis de la redundancia conceptual de la verdad, esta idea ubico al de acionismo incipiente en las ant podas del correspondentismo y, en general, de cualquier posicion loso ca que entienda la verdad como una propiedad compleja que debe poder de nirse intensionalmente (y no meramente de manera extensional, como hizo Tarski, cap tulo 2) en terminos de propiedades mas simples, esto es, en terminos de

$$x \text{ es verdadero } \quad {}_{\text{def}}\, P\, x \qquad \text{(SUST)}$$

donde P es una conjuncion de propiedades mas simples y comprensibles que la verdad (v.g., las corrientes coherentista y pragmatista).

Las corrientes que buscan de niciones de verdad en estos terminos son con fre-cuencia llamadas `sustantivistas' o `in acionistas'. El de acionismo redundantista con-sidera esteril esta busqueda, y el problema de la verdad un pseudo problema. Ante las preguntas \>Que propiedades se adscriben a una oracion cuando se dice que es verdade-ra?" o \>Que se esta diciendo de ella?", el de acionismo responde \Ninguna" y \Nada", respectivamente. En palabras de Ramsey (1927, p. 157), \[. . .] there is really no separate problem of truth but merely a linguistic muddle." Como se~nala Gupta (1993), el de a-cionismo es una postura meta loso ca sobre la verdad, que no esta al mismo nivel de las posiciones sustantivistas sino en un metanivel |por ejemplo, el de la idea sostenida por los positivistas logicos segun la cual la verdad es un concepto metaf sico que debe ser eliminado de todo discurso con pretensiones de rigurosidad|.

Precisamente en un intento por mostrar que la predicacion de verdad no agrega en ningun contexto contenido alguno a las oraciones sobre las cuales se predica, Ramsey (1927) fue el primero en poner en evidencia el rol expresivo que el predicado veritativo juega en el lenguaje y su importancia, al hallar contextos en los cuales, si bien aun con-ceptualmente redundante, resulta ineliminable |i.e., mostr que el predicado de verdad no es expresivamente redundante o, en palabras de Hartry Field (1999), expresivamente liviano|.

Como nota Ramsey, cuando el predicado de verdad se aplica a nombres expl citos o trasparentes de oraciones, como en

\La nieve es blanca" es verdadera. (4.2)

es no solo conceptual sino expresivamente redundante; puede ser de alguna manera eliminado (junto con las comillas), porque el contenido de la oracion puede expresarse directamente por medio de la oracion que era objeto de la predicacion, v.g.,

La nieve es blanca.

Su presencia en estos casos se debe exclusivamente a razones retoricas o estil sticas, para enfatizar lo que se quiere decir o presentarlo de un modo alternativo.

No obstante, el predicado de verdad, como cualquier predicado, puede aplicarse a terminos de cualquier tipo sintactico, ya sean variables, constantes o terminos comple-jos, y no solamente a nombres expl citos de oraciones. Llamo `adscripciones singulares de verdad' a aquellas en las cuales la verdad se aplica a terminos cerrados, y `adscripcio-nes generales de verdad' o `generalizaciones' cuando se aplica a terminos abiertos. Por ejemplo, tanto (4.2) como

La equivalencia entre masa y energ a es verdadera. (4.3)

son adscripciones singulares de verdad, mientras que en (4.1), en

Algunas ecuaciones de Maxwell son verdaderas. (4.4)

y, si se entienden las descripciones de nidas a la Russell, en

La formula mas famosa de la f sica es verdadera. (4.5)

las adscripciones son generales. Notese que, al tratarse de oraciones, las variables libres bajo el alcance del predicado de verdad deben estar ligadas por un cuanti cador de uno u otro modo.

Las adscripciones de verdad pueden a su vez clasi carse en expl citas e impl ci-tas, segun el termino al cual se adjunte el predicado veritativo. Si este es un nombre transparente de alguna oracion, la adscripcion de verdad es expl cita, mientras que en el resto de los casos es impl cita. Por ejemplo, (4.2) es una adscripcion expl cita de verdad, mientras que en (4.1), (4.3) y (4.4) las adscripciones son impl citas.

Ramsey nota que en las adscripciones impl citas de verdad ya no hay garant a de que el predicado pueda simplemente ser eliminado y la predicacion reemplazada por las oraciones que son su objeto. Por ejemplo, en

Lo que dice Oscar es verdadero. (4.6)

el predicado veritativo ser a eliminable solo si se supiera que es lo que dice Oscar, en pasado, presente y futuro, lo cual es f sicamente imposible. Sin embargo, Ramsey ar-gumenta, en este caso la verdad es conceptualmente tan redundante como en (4.2). La forma logica de (4.6) esta dada por

Para toda oracion x; si Oscar dice x; entonces x es verdadera: (4.7)

Si el lenguaje permitiera no solo cuanti car sobre posicion nominal |como sobre x en \`Oscar dice x' o \`x es verdadera'| sino tambien en posicion oracional, ser a posible eliminar el predicado veritativo de (4.7) y decir simplemente

Para toda oracion A; si Oscar dice \`A', entonces A: (4.8)

La cuanti cacion proposicional, como suele llamarse a la cuanti cacion sobre posi-cion oracional, podr a entonces tornar completamente eliminable el predicado de verdad. Efectivamente, como se~nale en el apartado 2.2, enriqueciendo previamente el lenguaje con una funcion que, dada una oracion A cualquiera, devuelva un nombre para A |cui-dando de no caer en contradicciones|, es posible introducir el predicado de verdad como un termino de nido. De hecho, en tiempos de Ramsey la logica de segundo orden, que permite cuanti cadores de este tipo, era lo usual, dados los trabajos de Russell y Alfred N. Whitehead en Principia Mathematica (cf. Russell & Whitehead (1910)).

No obstante, ni el espa~nol ni el ingles, ni ningun otro lenguaje natural del que tenga yo conocimiento, son capaces de cuanti car en posicion oracional.[2] Como se~nala Ramsey, estos lenguajes, a diferencia de los lenguajes de segundo orden, requieren de un verbo en el consecuente de (4.8), que es exactamente lo que el predicado de verdad provee. El predicado de verdad no es eliminable en (4.6) porque esta cumpliendo un rol que, al menos en este caso, consiste meramente en suplantar la cuanti cacion proposicional y,

***
[2]*Arthur N. Prior (1971) y Grover et al. (1975) exploran extensiones del ingles con prosentencias, sintagmas semejantes a pronombres pero que a diferencia de estos ocupan el lugar de oraciones, sobre las cuales se puede cuanti car. El resultado es similar a la extension del lenguaje natural con cuanti cadores proposicionales, y el predicado de verdad es eliminable en casos como (4.6).*

por ende, no es de naturaleza conceptual pero s , de alguna manera, logica.[3] Este rol es lo que el de acionismo posteriormente va a identi car como la unica razon, importante por cierto, por la cual es necesario contar con un predicado de verdad en el lenguaje. En palabras de Horwich (1998b, p. 2), \[. . .] the truth predicate exists solely for the sake of a certain logical need." En la seccion que sigue exploro la funcion logica que el de acionismo adscribe a la verdad.

4.2. El rol de la verdad

El primero mencionar el rol logico de la verdad expl citamente fue Quine, para quien justamente la logica de segundo orden no era admisible sino solo la de primer orden, y cuya opinion esta vigente todav a hoy practicamente en toda la comunidad logico- loso ca. Desde su punto de vista, el predicado veritativo es indispensable por su funcion tanto en los lenguajes naturales como en los formales. Sin tomar parte en la disputa acerca de la legitimidad de la logica de segundo orden en tanto logica (cf. Quine (1970), Shapiro (1991)), el de acionismo mantiene que en lenguajes donde la cuanti cacion en posicion oracional no es posible el predicado de verdad cumple un rol logico importante e irremplazable.[4]

En esta seccion argumento que la verdad tiene una funcion basica que lo caracteriza, esto es, ser un mecanismo desentrecomillador, que encapsula pero excede su redundancia conceptual, y que le permite cumplir dos funciones logico-expresivas diferentes, a traves de las cuales pueden explicarse todos los usos conocidos del predicado veritativo, todos los cuales son, asimismo, de naturaleza logico-expresiva, no conceptual. El primer apartado se ocupa de la funcion basica del predicado. 4.2.2 introduce sus dos funciones logico-expresivas y muestra como se derivan de la funcion basica. Finalmente, 4.2.3 examina los tipos de usos que suelen hacerse del predicado de verdad e indica como sus funciones logico-expresivas son capaces de dar cuenta de estos usos.

4.2.1. La verdad como un mecanismo desentrecomillador

El predicado de verdad tiene diversos usos expresivos, algunos de los cuales quizas no hayan sido descubiertos aun. De acuerdo con el de acionismo, se puede dar cuenta

[3] ***Sin entrar en la discusion loso ca sobre que es una constante logica y que no lo es, dados casos positivos claros, como la conjuncion y el cuanti cador universal, y tambien negativos, como la suma u otras operaciones entre numeros naturales, opero meramente por analog a; baso mis juicios de logicidad de la verdad en la cercan a o lejan a conceptual del predicado de verdad con respecto a otras nociones logicas y no logicas.***

[4] ***Veanse Field (2008) y Horwich (1998b)***. Tambien se han identi cado a s mismos como de acionistas Beall, Robert Brandom, Arthur Fine, Grover, Horsten, Stephen Leeds, Michael Williams, Quine, Richard Rorty, entre otros.

de aquellos de los que se tiene conocimiento, incluido el que tiene en el ejemplo de Ramsey en (4.6), por medio de lo que denomino `funcion basica de la verdad'. Esta funcion consiste en lo siguiente: el predicado veritativo transforma una oracion en un termino, sustituye sintacticamente una oracion |A| por otra |`A' es verdadera| donde la oracion original es ahora el objeto de la predicacion, pasa de ocupar una posicion oracional a una nominal, sin alterar sus propiedades semanticas, esto es, salva veritate.[5] Si bien sintacticamente la oracion pasa a ocupar el lugar de un termino, una posicion nominal, desde un punto de vista semantico mantiene su posicion oracional: predicar verdad de una oracion da por resultado un enunciado equivalente a la oracion en cuestion.

Luego, la funcion basica de la verdad garantiza que adscribir verdad a una ora-cion sea un modo sintacticamente alternativo de expresar el contenido de esta ora-cion. Esta idea suele resumirse diciendo que el predicado de verdad es un dispositivo (des)entrecomillador |en terminolog a quineana| o (de)nominalizador |de acuerdo con Horwich, otro exponente fundamental del de acionismo|. Permite el ascenso a un plano ling•u stico, donde las oraciones que antes eran `sujeto' son ahora objeto de discurso. Pero, en palabras de Quine,

> This ascent to a linguistic plane of reference is only a momentary retreat from the world, for the utility of the truth predicate is precisely the cancellation of linguistic reference. The truth predicate is a reminder that, despite a technical ascent to talk of sentences, our eye is on the world. (Quine, 1970, p. 12)

Si bien el predicado de verdad da sintacticamente lugar a un discurso acerca de oraciones, el contenido que transmite no es ling•u stico, no es semanticamente acerca de oraciones, sino que es el de las oraciones mismas. Desde el punto de vista de Horwich (1998b, p. 5), \[. . .] the truth predicate serves merely to restore the structure of a sentence: it acts simply as a de-nominalizer."

Para llevar a cabo su funcion basica, el predicado de verdad no debe ser solo conceptualmente redundante, lo cual le permite no alterar el contenido de una oracion cuando se aplica a ella, sino tambien un predicado, en contraste con, v.g., un operador, para poder efectivamente ascender a un plano ling•u stico. >Para que se necesita un dispositivo con estas caracter sticas?

[5] ***Muchos de acionistas, como Horwich por ejemplo, consideran que la verdad es un predicado que se aplica a proposiciones en lugar de oraciones. Sin embargo, como se~nale en el apartado 2.1.2, emplear oraciones simpli ca tecnicamente la presentacion y deja abierta la posibilidad de entender su predicacion de verdad como hablando de proposiciones a traves de las oraciones que las expresan, como es frecuente, |v.g., en Horwich (1997, 1998b***) mismo.

4.2.2. Las funciones logico-expresivas de la verdad

Su naturaleza (des)entrecomilladora permite al predicado veritativo cumplir dos funciones esenciales que lo convierten en un predicado de suma utilidad, tanto en lenguajes for-males como naturales. En este apartado presento estas dos funciones `logico-expresivas' de la verdad y muestro como dependen directamente de su funcion basica. En el apar-tado siguiente exploro los usos expresivos que suelen adjudicarse a la verdad y se~nalo de que manera estan basados en sus funciones logico-expresivas.

4.2.2.1. Primera funcion

La funcion basica de la verdad garantiza por s sola que todas las adscripciones expl citas, esto es, de la forma

`A' es verdadera. (4.9)

sean equivalentes a la oracion A. Pero tambien, junto con las leyes de la identidad, garantiza que toda adscripcion singular de verdad simpliciter, esto es, toda oracion de la forma

a es verdadera. (4.10)

donde a podr a no ser el nombre transparente de una oracion, sea equivalente a A, provisto que `a' denote A |i.e., que a =`A'|. Por ejemplo, (4.3) expresa el mismo contenido que

> La energ a en reposo de un cuerpo es el producto de su masa por la velocidad de la luz al cuadrado. (4.11)

porque el termino `la equivalencia entre masa y energ a' denota esta oracion.

La primera funcion logico-expresiva de la verdad consiste entonces en posibilitar la expresion del contenido de una oracion aplicandose unicamente a un nombre no trans-parente de esa oracion. Sin la ayuda del predicado veritativo no es posible transmitir el contenido de una oracion contando exclusivamente con un nombre no transparente para ella. Por ejemplo, no es gramatical decir `la equivalencia entre masa y energ a' para transmitir el contenido de (4.11). Pero anteponer el predicado de verdad, que, como dir a Ramsey, provee el verbo necesario para restablecer la gramaticalidad de la expresion, el nombre de la oracion es su ciente para expresar su contenido, sin la necesidad de articular la oracion misma.[6] El predicado veritativo esta ejerciendo esta funcion, v.g., en (4.3).

4.2.2.2. Segunda funcion

La segunda funcion logico-expresiva de la verdad consiste en posibilitar la expresion del contenido de oraciones cuanti cando sobre ellas. El predicado de verdad, como ya not Ramsey, permite de alguna manera cuanti car sobre posicion oracional, emular la cuanti cacion proposicional. Esta es su funcion mas importante, por tornarlo irrempla-zable en lenguajes coloquiales y en los lenguajes formales mas usados.

Como se~nala Quine (1970), se puede generalizar sobre `Tom' en \Tom es identico a Tom" simplemente diciendo \Todo es identico a s mismo" o \Algo es identico a s mismo", porque los cuanti cadores del lenguaje natural permiten cuanti car sobre posicion nominal. Cualquier oracion B que contenga una ocurrencia de un nombre a puede generalizarse sobre a recurriendo a los cuanti cadores usuales del lenguaje. Ahora bien, si A es, no un nombre, sino una suboracion en B, i.e., no ocurre en posicion nominal sino oracional, los cuanti cadores de los cuales se dispone en el lenguaje natural y en los lenguajes de primer orden no permiten generalizar B sobre A.

Por ejemplo, no es posible generalizar sobre \La nieve es blanca" en

Si Oscar dice \La nieve es blanca", entonces la nieve es blanca. (4.12)

porque, como se~nala Ramsey (1927), (4.8) el resultado no ser a gramatical. El predicado de verdad permite remediar esta situacion a traves de su funcion basica, esto es, ubicando la suboracion \La nieve es blanca" en posicion nominal, reescribiendo (4.12) como

Si Oscar dice \La nieve es blanca", entonces \La nieve es blanca" es verdadera.

sobre lo cual los cuanti cadores de los cuales se dispone s permiten cuanti car, obte-niendo las oraciones (4.6) o (4.7), y \Algo de lo que dice Oscar es verdadero", segun el cuanti cador que se quiera utilizar.

En general, dada una oracion B y una suboracion A de B, el predicado veritativo permite `cuanti car sobre A' en B, reemplazando primero A por \`A' es verdadera" en B y luego generalizando sobre el nombre `A', exactamente como en \Tom es identico a Tom" sobre el nombre `Tom'. En terminos de Ramsey, el predicado de verdad se aplica redundantemente en adscripciones generales pero provee un verbo a la variable sobre

[6] *Tras una larga busqueda, Filip Buekens me sugirio el verbo `articular' para reemplazar la larga frase*

`exhibir una formulacion expl cita de
una oracion'.

la cual se cuanti ca que es gramaticalmente necesario. El ascenso al plano ling•u stico tiene como unico proposito ubicar las oraciones cuyo contenido se quiere transmitir en posicion de objeto, para poder as cuanti car sobre ellas. Esta capacidad se debe al aspecto entrecomillador de la funcion basica de la verdad. El aspecto inverso de esta funcion, la desentrecomillacion, como tambien nota Quine, garantiza que el ascenso semantico sea inocuo, que no cambie el contenido del discurso a oraciones sino que el foco permanezca en el contenido de las oraciones sobre las cuales se generaliza.

En consecuencia, a traves de su funcion basica el predicado de verdad permite, por ejemplo, expresar el contenido de una oracion recurriendo a una descripcion de nida a la cual la oracion responda, esto es, mediante una adscripcion general de verdad de la forma

Existe una unica oracion que es P y es verdadera. (4.13)

Si la oracion A es la unica que satisface P , (4.13) adscribe verdad a A y, por tanto, la funcion basica de la verdad, junto con las leyes de la identidad y el cuanti cador existencial, garantiza que sea equivalente a A. Por ejemplo, como (4.11) es formula mas famosa de la f sica, (4.5) expresa su contenido gracias a la funcion basica de la verdad. Sin la ayuda del predicado veritativo no es posible transmitir el contenido de una oracion contando exclusivamente con una descripcion de nida de ella; v.g., la oracion \La formula mas famosa de la f sica" no es equivalente a (4.11), ni siquiera es una oracion declarativa.

Asimismo, es posible expresar el contenido de varias oraciones a la vez adscribien-do verdad a todas ellas mediante generalizaciones de la forma

Todas las P s son verdaderas. (4.14)

donde la cuanti cacion sobre oraciones esta relativizada a un predicado P que las oraciones cuyo contenido se quiere expresar satisfacen. V.g., mediante (4.6) se expresa el contenido de todo lo que dice Oscar o, equivalentemente, el de la conjuncion de to-dos sus dicta. Por esta razon generalizaciones de la forma de (4.14) suelen denominarse `conjunciones', la conjuncion de los enunciados que satisfacen P .

Analogamente, la cuanti cacion sobre oraciones posibilita expresar el contenido de al menos una oracion cualquiera entre varias o, si se quiere, de su disyuncion, mediante adscripciones generales de la forma

Algunas P s son verdaderas.

(4.15)

donde P es satisfecho exactamente por estas oraciones. Por ejemplo, (4.4) expresa la dis-yuncion de las leyes de Gauss, Gauss para el campo magnetico, Faraday-Lenz y Ampere generalizada.

Las dos funciones logico-expresivas del predicado de verdad ponen en evidencia su caracter logico-sintactico o logico-ling•u stico. En el apartado siguiente se vera como estas dos funciones dan poder expresivo al predicado de verdad y lo convierten en un dispositivo invaluable, si es que no hablan ya por s solas.

4.2.3. Los usos expresivos de la verdad

Como se vio en el apartado anterior, junto con cierta informacion externa (premisas) y en combinacion con ciertos operadores y leyes logicas, la funcion basica de la verdad garantiza que oraciones donde el predicado de verdad se antepone sintacticamente a cual-quier tipo de termino, y no unicamente a nombres transparentes de oraciones, tambien expresen el contenido de otras oraciones, una o varias a la vez, sus conjunciones o sus disyunciones. Permitiendo expresar el contenido de oraciones conociendo solo nombres no transparentes de ellas o descripciones a las cuales responden, el predicado veritativo sirve una variedad interesante de propositos expresivos en el lenguaje. Aquellos de los cuales se tiene conocimiento hoy pueden agruparse, grosso modo, en usos retoricos y estil sticos, usos epistemicos y usos logicos.

La tesis central del de acionismo actual en su version mas precisa consiste quizas en sostener que todo uso del predicado de verdad, no solo aquellos de los cuales se tiene conocimiento, puede ser explicado en terminos de sus dos funciones logico-expresivas y, por tanto, indirectamente a traves de su funcion basica. Luego, de acuerdo con el de a-cionismo el predicado veritativo tiene unicamente roles logico-expresivos en el lenguaje. Tampoco esta para adscribir una propiedad sustantiva a los portadores de verdad como, por ejemplo, cierta correspondencia con el mundo (no es una relacion entre el lenguaje y el mundo porque, de hecho, no es una relacion), sino para facilitar o posibilitar la expresabilidad del contenido de ciertas oraciones. Luego, un modo de refutar el de acio-nismo es hallar un contexto en el cual la verdad est cumpliendo un rol que no pueda ser explicado en terminos de las funciones presentadas en el apartado anterior.

En este apartado presento los diversos usos o propositos expresivos del predicado veritativo tiene en el lenguaje, algunos de los cuales son indispensables, y los ilustro mediante ejemplos. Luego, en 4.2.3.4, considero ciertas objeciones que se han hecho al de acionismo se~nalando usos del predicado veritativo de los cuales no se podr a dar cuenta a traves de su funcion basica. Como se vera, algunos de estos `contraejemplos' apuntan a un cuarto uso del predicado de verdad.

4.2.3.1. Usos retoricos y estil sticos

Como ya se~nalo Ramsey (1927), ciertas adscripciones de verdad pueden utilizarse con propositos retoricos o estil sticos. Por un lado, las adscripciones singulares expl citas de verdad en (4.9), si bien no agregan nada al contenido de la oracion que es objeto de la predicacion, lo cual queda garantizado por la funcion basica de la verdad, pueden ser utilizadas para dar enfasis a lo que se que quiere expresar.

Por otro, el predicado de verdad tambien puede utilizarse para evitar repeticiones o formulaciones tediosas, mediante adscripciones impl citas de verdad, ya sean singulares o generales. Por ejemplo, si se quieren explorar en un discurso ciertas consecuencias de la equivalencia entre masa y energ a, puede utilizarse frases como \Si la energ a en reposo de un cuerpo es el producto de su masa por la velocidad de la luz al cuadrado, entonces . . . ", pero adicional o alternativamente adscripciones singulares como \Si la equivalencia entre masa y energ a es verdadera, entonces . . . ", o generales, como `Si la formula mas famosa de la f sica es verdadera, entonces . . . ", que son mucho mas breves.

Asimismo, si se desea argumentar a favor de las ecuaciones de Maxwell, parece mucho mas conveniente utilizar frases como \Por lo tanto, todas ecuaciones de Maxwell son verdaderas" que enunciar las cuatro ecuaciones expl citamente despues de `Por lo tanto'; y si se desea argumentar a favor de una de ellas sin saber espec camente cual, puede recurrirse a expresiones como \Por lo tanto, algunas ecuaciones de Maxwell son verdaderas", en lugar de su extensa disyuncion.

En todos estos casos, se recurre a las funciones logico-expresivas de la verdad para garantizar la existencia de formulaciones alternativas equivalentes. Tambien es claro que, en materia de transmision del contenido proposicional (pero no del modo o el sentido), el predicado de verdad resulta totalmente dispensable en estos casos. Los usos retoricos o estil sticos de la verdad son denominados por Grover et al. (1975) `lazy uses of truth'.

4.2.3.2. Usos epistemicos

Decir que el predicado de verdad tiene ciertos propositos epistemicos podr a resultar confuso. El predicado veritativo ciertamente no cumple roles semejantes a los predicados u operadores de conocimiento, creencia, etc. bajo ningun concepto sino que en su funcion `epistemica' se limita a permitir expresar el contenido de una oracion sin conocer o recordar su formulacion expl cita o quizas su contenido mismo. Solo en este sentido puede decirse que la verdad tiene un uso epistemico.

La verdad cumple este proposito mediante adscripciones impl citas de verdad. Por ejemplo, cuando se realizan adscripciones de la forma (4.10), donde a no es un nombre transparente de una oracion A, y no se sabe exactamente que oracion denota a. Esto ultimo implica que la adscripcion de verdad es ciega. Naturalmente, no es una nota sintactica inherente a la adscripcion sino que depende del estado mental de quien la enuncie. La primera funcion logico-expresiva de la verdad garantiza que (4.10) trans-mita el contenido de A aun cuando la persona que la utilice no conozca la relacion de denotacion relevante. V.g., se puede expresar el contenido de (4.11) mediante (4.3) sin recordar o conocer (4.11).

Del mismo modo, adscripciones impl citas generales de verdad tambien pueden ser adscripciones ciegas. Mediante oraciones de la forma (4.13), se puede expresar ciegamente el contenido de una oracion solo con disponer de una descripcion de nida a la cual esta oracion responda. Por ejemplo, supongase que Lorna es una experta en musica nacional, ademas de una persona honesta, y alguien le pregunto en que fecha Charly Garc a saco su primer album solista, pero yo no llegu a escuchar su respuesta. Supongase tambien que despues de este episodio Lorna se va y el resto de las personas presentes, que escucharon la fecha que dijo Lorna, discute todav a cuando es que Charly Garc a saco su primer album. Yo creo en la respuesta de Lorna, cualquiera sea, y puedo, utilizando el predicado de verdad, expresar lo que ella dijo mediante \La respuesta de Lorna es verdadera".

Otras generalizaciones como (4.14) y (4.15) tambien pueden ser ciegas y, en general, cualquier adscripcion impl cita puede serlo. Basta que no se sepa de que oraciones exactamente se esta predicando verdad pero s se conozca una descripcion a la cual to-das estas respondan. Por ejemplo, siguiendo la forma de (4.14), el ejemplo de Ramsey en (4.6) es un modo de expresar todo lo que Oscar dice sin que sea necesario saber que dira ma~nana o que dijo exactamente en el pasado.

En las adscripciones ciegas el predicado de verdad ya no es dispensable para la transmision del contenido. Simplemente no hay otro modo para la persona que no recuerda o conoce la articulacion de una o varias oraciones de transmitir su contenido que mediante nombres no transparentes o descripciones a las cuales las oraciones respondan.

4.2.3.3. Usos logicos

Finalmente, lo que llamo `uso' o `proposito logico' de la verdad suele describirse como la capacidad que el predicado de verdad tiene de permitir expresar varias oraciones a la vez que incluso pueden ser in nitas o, si se quiere, conjunciones y disyunciones posiblemente in nitas. Nuevamente, el cali cativo `logico' podr a ser un abuso terminologico. Las razones quedaran mas claras en el apartado 4.3.3 y en el cap tulo siguiente.

Como se~nala Quine (1970), el cuanti cador universal puede verse como un dis-positivo que permite expresar el contenido de varias, posiblemente in nitas, oraciones a la vez o, en algun sentido, su conjuncion posiblemente in nita. Por ejemplo, \Todo es identico a s mismo" puede entenderse como expresando la `conjuncion in nita' de cada una de sus instancias, i.e., de todas las oraciones de la forma \a es identico a a", donde a es un termino cerrado, mientras que \Todos los humanos son mortales" puede pensarse como la `conjuncion' (no in nita) de todas las oraciones de la forma \m es mortal", donde m es el nombre de un humano. Pero para que el cuanti cador universal permita expresar varias oraciones mediante una unica expresion es necesario que todas las oraciones del conjunto di eran entre s solo en un termino, esto es, debe existir una funcion proposicional A(x) tal que todas ellas se obtengan reemplazando x en A por un nombre. Cuando este no es el caso, el predicado veritativo, combinado con el cuanti cador universal, puede hacer el trabajo mediante expresiones como (4.14), en la medida en que las oraciones que se quiera expresar, si bien no la forma, compartan alguna propiedad expresable en el lenguaje por medio de un predicado P . Las siguientes palabras de Quine se convirtieron en el locus classicus:

> We may a rm the single sentence by just uttering it, unaided by quotation or by the truth predicate; but if we want to a rm some in nite lot of sentences that we can demarcate only by talking about the sentences, then the truth predicate has its use. (Quine, 1970, p. 12, mis italicas)

Si P es satisfecho por un numero in nito de oraciones, la segunda funcion logico-expresiva de la verdad implica que (4.14), esto es,

Todas las P s son verdaderas,

expresa estas in nitas oraciones. Dado que, como se~nale en el apartado 4.2.2.2, las expresiones de esta forma pueden verse como la conjuncion de las formulas que satisfacen el predicado P y estas pueden ser in nitas, suele decirse de este tipo de generalizaciones que expresan o son conjunciones in nitas cuando ese es el caso.

Alternativamente, sin la necesidad de que P se aplique a un numero in nito de enunciados, estas generalizaciones pueden entenderse como la conjuncion in nita de todos los condicionales de la forma \Si P (`A'), entonces A". Y, en general, toda oracion de la forma \Para todo x, B" donde \x es verdadera" ocurra como subformula de B y x est ligada por el cuanti cador del comienzo podra ser vista como la conjuncion in nita de todas las instancias que se obtienen al reemplazar \x es verdadera" por una oracion A del lenguaje, en virtud de la segunda funcion logico-expresiva de la verdad, del mismo modo en que \Todos los humanos son mortales" puede verse como la conjuncion in nita de todas las instancias \si a es humano entonces a es mortal" donde a no es necesariamente ya un nombre de un humano sino cualquier constante de individuo del lenguaje. Pero, al menos en el caso de (4.14), si P se aplica unicamente a un numero nito de enunciados, aunque se entienda que se esta expresando la conjuncion in nita de las expresiones de la forma \Si P (`A'), entonces A", (4.14) es equivalente a la mera conjuncion nita de las oraciones que son P s. Solo cuando P es satisfecho por in nitas expresiones puede decirse que (4.14) expresa una conjuncion in nita, y lo mismo para el caso de los cuanti cadores universales solos.

De modo analogo, el cuanti cador existencial puede ser visto como un dispositivo que permite expresar disyunciones, pero solo es capaz de hacerlo en la medida en que los `disyuntos' di eran entre s exclusivamente en un termino. El predicado veritativo puede pensarse entonces como un complemento del cuanti cador existencial que, al permitir cuanti car sobre oraciones, habilita la expresion de nuevas disyunciones posiblemente in nitas, v.g., a traves de expresiones como (4.15), esto es,

Algunas P s son verdaderas.

en la medida en que los `disyuntos' compartan alguna propiedad expresable en el lenguaje por medio de un predicado P .

Un ejemplo sencillo de una `conjuncion in nita' esta dado por la oracion

Todos los teoremas de la aritmetica son verdaderos. (4.16)

Los teoremas de la aritmetica son in nitos y no comparten su forma logica y, por ende, no pueden expresarse todos a la vez sin la ayuda del predicado veritativo. A traves de la segunda funcion logico-expresiva de este predicado, es posible cuanti car sobre todos y cada uno de los teoremas de la aritmetica predicando verdad sobre ellos y, por ende, expresar el contenido de todos ellos a la vez.

Formulaciones como (4.16) pueden resultar utiles, por ejemplo, a la hora de ex-presar acuerdo con pa o, alternativamente, su correccion. (4.16) puede ser vista tambien como una axiomatizacion nita de pa que, como es sabido, no es nitamente axioma-tizable en L_{pa}. En efecto, como prueban Stephen C. Kleene (1952) y William Craig & Vaught (1958), el predicado de verdad (o la relacion de satisfaccion, a partir de la cual la verdad es de nible) es un dispositivo idoneo para estos nes.[7]

Otros casos de axiomatizabilidad o expresabilidad nita provenientes de la losof a resultan tambien interesantes y desmiti cadores. Por ejemplo, el realismo cient co, la

***

[7]*Por ejemplo, es sencillo probar que pa es nitamente axiomatizable en L_T sobre tb(pa) (vease la de nicion 2.10, apartado 2.3.3) mediante la formula 8x(Bew$_{pa}$(x) ! T x), porque Bew$_{pa}$ debilmente representa el conjunto de teoremas de pa (vease el apartado 1.2.3).*

idea de que hallar la verdad es el objetivo de la ciencia, puede expresarse en los siguientes terminos:

Es deseable que algo sea un teorema de una teor a cient ca si y solo si es verdadero. (4.17)

Este enunciado no esta poniendo como meta de todo proceso cient co un concepto metaf sico oscuro, sino que es meramente la `conjuncion in nita' de todas las expresiones de la forma \Es deseable que `A' sea un teorema de una teor a cient ca si y solo si A". La verdad, a traves de su segunda funcion logico-expresiva, esta permitiendo generalizar sobre A y, por ende, garantiza que (4.17) exprese el contenido deseado. Gracias al predicado veritativo, es posible expresar nitamente el objetivo de la ciencia.

Asimismo, cuando se sostiene que el conocimiento es creencia verdadera justi - cada, `verdadera' no agrega conceptualmente nada a la de nicion de conocimiento sino que esta cumpliendo rol expresivo, esta permitiendo de nir conocimiento mediante una unica oracion,

Se conoce un enunciado si y solo si se lo cree justi cadamente y es verdadero. (4.18)

la `conjuncion in nita' de todas las instancias de \Se conoce `A' si y solo si se cree justi cadamente `A' y A".

Una vez mas, cuando se dice que la verdad es la norma de la asercion, no se adscribe una propiedad metaf sica a lo que leg timamente puede a rmarse; el predicado de verdad esta ah para permitir expresar a la vez todas las instancias de \Es leg timo a rmar `A' solo si A". Si las instancias de la norma de la asercion fueran nitas, la generalizacion no ser a necesaria, porque se podr a tomar simplemente su conjuncion. Pero al ser in nitas, el predicado veritativo y su segunda funcion logico-expresiva se tornan indispensables.

O, cuando se dice, siguiendo a Frege, que dar el signi cado de una oracion es dar sus condiciones de verdad, esto no implica que toda teor a del signi cado dependa necesariamente de una teor a de la verdad, como quieren, v.g., Davidson (1967), Mi-chael Dummett (1978, cap. 14) y Priest (2006b), sino que es simplemente un modo sucinto de expresar todas las instancias de \Dar el signi cado de `A' es identi car bajo que condiciones A", para cada oracion A del lenguaje.

Como un ultimo ejemplo, cuando se de ne consecuencia logica como preservacion de verdad en todo mundo posible, la palabra `verdad' esta para reunir en una unica oracion todas las instancias de \`B' es consecuencia logica de `A' si y solo si en todo mundo posible en el cual A, B". El rol conceptual de la verdad en la de nicion de la nocion de consecuencia logica tiene tanto peso como el del cuanti cador universal (\. . . en todo mundo posible . . . ").

Sin el predicado de verdad, expresar ciertos conjuntos in nitos de oraciones ser a completamente imposible en lenguajes sin cuanti cacion sobre oraciones. No importa que se sepa o recuerde, enumerar todos los miembros de un conjunto in nito esta fuera de las capacidades humanas. Luego, los usos logicos del predicado de verdad son de algun modo mas importantes que los usos epistemicos y retorico-estil sticos, y mucho mas frecuentes tambien en el discurso cient co y loso co. Por esta razon suele identi-carse el rol expresivo de la verdad directamente con la expresabilidad de conjunciones y disyunciones in nitas (cf. Horwich (1998b), Leeds (1978), Quine (1970)). De acuerdo con Horwich,

> the raison d'etre of the truth predicate is to provide a device enabling us to formulate propositions that can be the objects of belief, desire, etc., in cases where the propositions of primary concern are inaccessible|or (what comes to the same thing) to allow us to formulate `in nite conjunctions' [. . .] (Horwich, 1998b, p. 52, mis italicas)

Si bien es comun referirse a expresiones de la forma de (4.14) como `conjuncio-nes in nitas' y, analogamente, a expresiones de la forma de (4.15) como `disyunciones in nitas', como hice en este apartado, en ambos casos la terminolog a puede resultar confundente, en tanto los lenguajes mas usuales, como los naturales o los de primer orden, o incluso los de orden superior, no pueden expresar conjunciones y disyunciones in nitas y, por tanto, no hay posibilidad de contrastar directamente expresiones como (4.16) con la conjuncion in nita de todos los teoremas de la aritmetica, v.g., si son o no equivalentes o bajo que circunstancias podr an serlo. Luego, las frases `conjuncio-nes in nitas' y `disyunciones in nitas' deben entenderse por ahora solo en un sentido metaforico; en el mismo sentido en que podr a decirse que los cuanti cadores univer-sal y existencial expresan conjunciones y disyunciones in nitas, respectivamente. En el cap tulo siguiente, en el apartado 5.2, doy un analisis detallado de la cuestion.

4.2.3.4. Usos insurgentes de la verdad

El de acionismo es una postura facilmente refutable; basta con encontrar un retazo de discurso en el cual el predicado de verdad sea correctamente utilizado pero no est cum-pliendo un rol expresivo explicable en terminos de su naturaleza desentrecomilladora. Naturalmente me re ero a un predicado de verdad dise~nado para aplicarse a oraciones o, si se desea, a proposiciones, pero no a objetos, como en \Jane es una amiga verdadera".

Un ejemplo que suele citarse para refutar ciertas versiones del de acionismo es la predicacion de verdad de oraciones que pertenecen a un lenguaje diferente de aquel en el cual se realiza la predicacion. Por ejemplo, en el marco de esta investigacion yo puedo decir sin incurrir en ningun tipo de error gramatical

Todo lo que Quine dice en Philosophy of Logic es verdadero. (4.19)

aun cuando la copia del libro de Quine en mi biblioteca, la unica a la cual he tenido acceso, esta escrita en ingles. Intuitivamente, (4.19) expresa el contenido de la conjuncion de todas las oraciones de Philosophy of Logic, pero la funcion basica de la verdad no permite concluir esto ultimo. Porque, de acuerdo con lo dicho en el apartado 4.2.1, la expresion `es verdadero' predicada unicamente de una oracion del lenguaje al cual el predicado pertenece, en este caso el castellano, genera una expresion semanticamente equivalente a esta oracion.

Lo que este contraejemplo muestra es simplemente que la descripcion de la funcion basica que di en el apartado 4.2.1 es demasiado acotada; lo que Michael Resnik (1997) denomina `inmanente'. En el lenguaje natural, la (des)entrecomillacion es `trascendente', i.e., alcanza oraciones en principio de cualquier lenguaje. Dada una oracion A cualquiera, ya sea del lenguaje propio o de uno foraneo, el predicado de verdad aplicado a A expresa el contenido de A, lo cual explica porque (4.19) expresa el contenido de todo lo que Quine dice en Philosophy of Logic, del mismo modo en que la funcion basica acotada explica porque (4.11) expresa el contenido de la equivalencia entre masa y energ a de Einstein (formulada en castellano).

Contrario a lo que creen Resnik (1997) y Shapiro (2003), esta extension de la descripcion de la funcion basica de la verdad no altera en nada la naturaleza desentreco-milladora de la verdad sino que meramente ampl a el rango de aplicacion de la operacion sintactica. De acuerdo con Shapiro,

> To say that a sentence is true is tantamount to removing the quotes and asserting the sentences. In order to do that, the given sentence must be in one's own language. (Shapiro, 2003, p. 115, mis italicas),

Pero, justamente, la funcion basica de la verdad garantiza que predicar verdad de una oracion sea equivalente (tantamount) a decir esta oracion, no identico a enunciar la oracion desentrecomillada misma. En esta diferencia radica toda la utilidad del predicado veritativo: expresar el contenido de una oracion sin articularla. Nada de esto implica la segunda oracion en la cita de Shapiro; nada fuerza que el enunciado original deba estar dado en el mismo lenguaje que su predicacion de verdad.

Aun mas, el `contraejemplo' propuesto apunta quizas a un cuarto uso del predicado veritativo explicado en terminos de su funcion basica: expresar el contenido de oraciones formuladas en lenguajes extranjeros mediante expresiones del lenguaje propio sin exhibir una traduccion de estas oraciones.[8] Como nota Graham Priest (2006b, p. 55),

> [. . .] suppose the Pope utters A. We would like to assert [a translation of A to english] (the Pope will, of course, speak in Latin), but we cannot. Instead, we form a noun phrase which refers to A, i.e. `A', and assert [`A' is true].

Al aplicar el predicado de verdad de un lenguaje a una oracion de un lenguaje diferente, no solo se produce un pasaje de la oracion de posicion oracional a posicion nominal sino que tiene lugar un cambio de lenguaje. El predicado de verdad posibilita `intercalar' o `utilizar' oraciones en lenguajes foraneos en medio de un discurso en el propio lenguaje.

Podr a surgir al menos un problema al extender la desentrecomillacion a oraciones de cualquier lenguaje. Es posible que una misma secuencia de s mbolos sea una oracion de dos lenguajes diferentes a la vez, y que en cada uno de ellos signi que dos cosas diferentes. Este tipo de inconvenientes es un fenomeno comun en el lenguaje natural, donde, por ejemplo, la asignacion de nombres a objetos no es inyectiva |v.g., `Rivadavia' es el nombre de una avenida en la ciudad de Buenos Aires y de un ex presidente argentino a la vez|. Como es usual, es el contexto el que provee informacion su ciente para evitar la confusion; pero incluso aquellos casos en los cuales el contexto no logra indicar un vocamente de que oraciones se trata no ponen en riesgo la descripcion de la funcion basica, o al menos no en mayor medida en que los casos de homonimia comprometen el uso de nombres propios en el lenguaje.

No todas las versiones del de acionismo pueden responder al desaf o mencionado simplemente reconociendo que la funcion basica de la verdad tiene un rango mas amplio que el conjunto de oraciones del lenguaje al cual pertenece el predicado de verdad. Field (1994), por ejemplo, sostiene que una oracion A y su predicacion expl cita de verdad son siempre cognitivamente equivalentes. Luego, \a person can meaningfully apply `true' in the pure disquotational sense only to utterances that he has some understanding of" (Field, 1994, p. 250); el rango de la funcion basica de la verdad solo puede extenderse a las oraciones que el individuo que utiliza el predicado comprende, no arbitrariamente a cualquier lenguaje, ni siquiera necesariamente a cualesquiera oraciones del lenguaje propio.[9]

[8] ***Incluso podr a resultar que no exista una traduccion (cf. Shapiro (2003)).***

[9] De hecho, Field sostiene que un individuo podr a entender ciertas oraciones de un lenguaje foraneo y a la vez no comprender otras de su propio lenguaje, en cuyo caso podr a predicar verdad de las primeras pero no de las segundas.

No obstante, Field luego considera la posibilidad incluir en el rango de aplicacion del predicado veritativo oraciones que el individuo potencialmente comprender a, si contara con una buena traduccion de ellas a su propio idiolecto. Esto ser a su ciente para dar cuenta de los usos del predicado de verdad en el lenguaje natural aplicado a oraciones de lenguajes foraneos si hubiera traducciones de cada una de las oraciones de las cuales un individuo puede en principio predicar verdad a su idiolecto y, ademas, esas traducciones fueran cognitivamente equivalentes a las originales, de alguna manera. Shapiro (2003) pone ambas condiciones en duda.[10]

Una segunda objecion que suele hacerse al de acionismo es que su predicado de verdad desentrecomillador no permite decir que ciertas oraciones no son verdaderas en casos en los que no son ni verdaderas ni falsas. Haciendo ciertas concesiones m nimas a las logicas paracompletas,[11] supongase que existen oraciones que no son ni verdaderas ni falsas. Por ejemplo, la oracion del mentiroso dada por

L no es verdadera. (L)

podr a no ser ni verdadera ni falsa, o una oracion en la cual se predique una propiedad vaga (v.g., `ser extensa') de un objeto que no es un caso claramente positivo ni claramente negativo (v.g., esta tesis). Supongase ahora que una persona dice

L es verdadera. (4.20)

De acuerdo con la nocion de verdad de acionista, si L no es ni verdadera ni falsa entonces (4.20) tampoco, porque debe ser equivalente a la primera. Ahora bien, desde otro punto de vista, suele argumentarse, (4.20) es simplemente falsa, porque a rma lo contrario de algo que es cierto, esto es, de la oracion

L no es verdadera. (4.21)

(porque L no es verdadera ni es falsa). La funcion basica de la verdad no solo no explica sino que contradice este segundo uso de la verdad.

Gupta & Belnap (1993) explican esta confusion postulando dos nociones diferentes de verdad aplicables a oraciones declarativas: una debil y una fuerte. De acuerdo con la nocion debil de verdad, la verdad de acionista, toda predicacion de verdad sobre una oracion es equivalente a la oracion que es objeto de la predicacion y, por ende, tienen ambas el mismo estatus semantico. La nocion fuerte, en cambio, al predicarse de

[10] ***Vease Halbach (2003) para una respuesta a Shapiro.***

[11] ***Un caso semejante puede hacerse con respecto a las logicas paraconsistentes. Vease Priest (2006b,*** p. 79).

oraciones que no son verdaderas, ya sea porque son falsas o porque no son ni verdaderas ni falsas, dan lugar a oraciones que son simplemente falsas.

Sin embargo, no me es claro que 4.20 sea en efecto falsa bajo algun punto de vista, ni que haya tal cosa como una nocion fuerte de verdad. Lo que esta verdaderamente operando detras del impulso a tomarla por falsa es que, si L no es ni verdadera ni falsa, no es correcto a rmar que es verdadera, porque no lo es, lo cual no signi ca que sea correcto a rmar que es falsa, porque el mismo razonamiento aplicado a L le asignar a valores clasicos.

Ahora bien, si L no es verdadera, (4.21) s lo es, porque dice precisamente lo que se esta a rmando. Pero (4.21) parece ser identica a L, lo cual llevar a directamente a contradicciones. De acuerdo con Gupta & Belnap, estas contradicciones no tienen lugar porque las oraciones no son identicas. En L se esta empleando una nocion debil de verdad, mientras que en (4.21) opera una nocion fuerte (podr a diferenciarselas, v.g., por medio de sub ndices).

El de acionismo no tiene esta estrategia a su disposicion, pero puede igualmente dar cuenta de la diferencia entre estas dos oraciones, notando que, en lugar de dos nociones de verdad, lo que hay en juego son dos negaciones diferentes: una debil y una fuerte.[12] Ambas negaciones se comportan como es usual cuando niegan expresiones que adquieren valores de verdad clasicos, pero mientras que la primera, al anteponerse a una expresion que no recibe un valor clasico, devuelve una expresion que tampoco recibe un valor clasico, la negacion fuerte devuelve el valor clasico `verdad'. En L, la negacion es debil, lo cual le permite a la oracion no ser ni verdadera ni falsa. Luego, por la funcion basica de la verdad, (4.20) tampoco es ni verdadera ni falsa. Pero (4.21) es verdadera, porque aplica la negacion fuerte a (4.20). Si la negacion ah fuese la debil, la oracion tampoco tendr a un valor clasico, ser a identica a L. Estableciendo una distincion entre estos dos tipos de negaciones, el de acionismo puede explicar perfectamente como se puede a rmar correctamente de oraciones que no son verdaderas o falsas que no son verdaderas.

Finalmente, una tercera objecion que puede hacerse al de acionismo consiste en su prima facie incapacidad de dar cuenta del rol que el predicado veritativo ejerce en expresiones como

Una conjuncion es verdadera si y solo si ambos conyuntos lo son. (4.22)

[12]Priest (2006b, p. 79) da una explicacion similar donde, en lugar de negaciones, hay condicionales in-volucrados, distinguiendo dos tipos de condicionales: el condicional material y el condicional intensional, que introduje en el apartado 3.4.2.

Notese que una explicacion en las l neas de las de (4.17) o (4.18) no esta disponible para esta oracion. Siendo el resultado de generalizar sucesivamente sobre `A' y `B' en

La conjuncion de `A' y `B' es verdadera si y solo si `A' es verdadera y `B' es verdadera.

si se dijera que en (4.22) el predicado veritativo esta permitiendo una conjuncion in nita, deber a concluirse que esta proveyendo los medios para expresar, mediante una unica expresion, todas las oraciones de la forma

A y B si y solo si A y B

lo cual no parece ser el caso.

Efectivamente, el predicado de verdad no esta jugando ningun rol logico-expresivo en (4.22) ni en otros principios semejantes sino que estos, al contrario, colaboran con la expresion del signi cado del predicado veritativo, son anal ticos, i.e., se siguen directa-mente de los principios que jan el signi cado de la verdad, como se vera en el apartado 4.3.4.

Asimismo, contrario a lo que sostienen, v.g., Davidson (1967), Dummett (1978, cap. 14) y Priest (2006b), el predicado veritativo no juega ningun rol expresivo en ora-ciones como

\La nieve es blanca" es verdadera si y solo si la nieve es blanca. (4.23)

sino que esta y otras expresiones semejantes son parte de los principios que jan el sig-ni cado del predicado, a lo cual dedico la seccion siguiente; es gracias a estos y otros principios, el predicado de verdad es capaz de cumplir sus roles logico-expresivos. De acuerdo con estos autores, el predicado en (4.23) cumple un rol: permite dar el signi -cado de la oracion \La nieve es blanca", porque dar el signi cado de una oracion es dar sus condiciones de verdad. Pero como el mismo Priest (2006b, p. 60) admite, \[(4.23)] cannot be considered as simultaneously specifying both the sense of [`La nieve es blanca'] and what it is for [`La nieve es blanca'] to be true." Mientras que Davidson, contrario al de acionismo, sostiene que oraciones como (4.23) no constituyen el signi cado del predicado veritativo, Dummett y Priest entienden la verdad y el signi cado como varia-bles interdependientes. El de acionismo, al contrario, rechaza que la expresion \dar el signi cado de una oracion es dar sus condiciones de verdad" implique la dependencia de toda teor a del signi cado de una teor a de la verdad |de hecho, algunos de acionistas han desarrollado teor as del signi cado en donde este no es el caso (cf. Horwich (1998a), Field (1994))|, como se vio en el apartado anterior.

§

Creo haber mostrado como las dos caracter sticas del predicado de verdad, i.e., su redundancia conceptual y el hecho de ser un predicado, constituyen su naturaleza desentrecomilladora y le permiten cumplir su funcion basica que, a su vez, habilita las funciones logico-expresivas del predicado de verdad. Estas funciones explican todos los usos que se hacen del predicado veritativo tanto en lenguajes formales como coloquiales y, por ende, todos sus roles son logico-expresivos, no conceptuales. El mas importante, aquel en el cual el predicado es irremplazable, es cuando juega un rol logico y, mas particularmente, cuando lo hace para expresar in nitas oraciones a la vez, conjunciones o disyunciones in nitas. Por estas razones puede decirse, prima facie, que el predicado veritativo es semejante a una constante logica. Los matices a esta a rmacion ocupan el apartado 4.3.3 y el cap tulo que sigue.

4.3. El signi cado de la verdad

Si el predicado de verdad existe en el lenguaje exclusivamente para servir ciertos usos expresivos y, ademas, todos estos usos pueden explicarse en terminos de lo que llame `fun-cion basica de la verdad', parece que no hay nada mas que decir acerca de la naturaleza de la verdad que esta capacidad de (des)entrecomillar, de permitir la transformacion de oraciones en terminos sin alterar sus propiedades semanticas. De acuerdo con el de acio-nismo, el signi cado del predicado de verdad es su naturaleza desentrecomilladora, dada por su redundancia conceptual y el hecho de ser un predicado. Como sostienen Gupta (1993) y Horsten (2011), el de acionismo es una dupla de ideas, una de las cuales de-pende de la otra: primero, se posiciona con respecto al signi cado de la verdad; segundo, da cuenta del rol que este predicado juega en las practicas discursivas en virtud de su signi cado.

En esta seccion examino la viabilidad de ciertos principios dise~nados para ex-presar la naturaleza desentrecomilladora de la verdad, los principios de equivalencia o transparencia, para expresar parte o todo el signi cado de este predicado, a la luz de diversas objeciones que se aparecen en la literatura. Estas objeciones conciernen unica-mente a la (in)capacidad de los principios de transparencia de expresar la funcion basica de la verdad; parten de la premisa de que el signi cado del predicado veritativo es su funcion basica, i.e., no son objeciones sustancialistas (correspondentistas, coherentistas, veri cacionistas, etc).

4.3.1. Intension, extension y reglas de uso

Como quedo evidenciado en la seccion anterior, el predicado veritativo funciona como una pieza dentro de un mecanismo, con una forma espec ca (su naturaleza desentre-comilladora) que, precisamente por su forma o signi cado, engrana con otras piezas en este mecanismo, i.e., los operadores logicos (los cuanti cadores, la relacion de identidad, el condicional, la conjuncion, etc.), para permitir la expresabilidad de ciertas cosas que de otro modo no es posible expresar. El predicado de verdad cumple una funcion com-parable a la de los operadores logicos, tiene roles logico-expresivos. De acuerdo con el de acionismo, no es un predicado introducido en el lenguaje para designar un concep-to ordinario, una caracter stica compartida por ciertas oraciones u otros portadores de verdad como quiere la teor a de la verdad por correspondencia, sino por razones logicas, expresivas, semejantes a las razones por las cuales se han introducido cuanti cadores u otras conectivas. El predicado de verdad no establece una relacion entre el lenguaje y el mundo ni la explica; realiza una operacion meramente sintactica.

El hecho de que se trate de un predicado puede resultar enga~noso. Por un lado, la semantica del lenguaje natural apunta a la busqueda de una propiedad o concepto ordinario subyacente, una naturaleza compartida por las cosas verdaderas, como sucede con `es una mesa'. A esto se deben los intentos sustantivistas (correspondentistas, cohe-rentistas, pragmatistas) de dar de niciones expl citas de verdad en terminos de (SUST). Por otro, la semantica formal (v.g., la teor a de modelos originada en Tarski, apartados 2.2.2 y 2.2.3) pretende asignarle una extension como su interpretacion, que puede en-tenderse como la extension de esta propiedad o concepto. En ambos casos, el objetivo es errado.

Si bien algunas de acionistas aun sostienen que la verdad no es un predicado o que el predicado de verdad no expresa un concepto genuino, la posicion mas popular al respecto hoy en d a, lo que Horsten (2011, p. 143) denomina `the misty core of de-ationism', consiste en defender que la verdad es un predicado y expresa un concepto, pero, a diferencia de los predicados ordinarios, este concepto es metaf sicamente liviano (cf. Horsten (2011), Horwich (1998b)); un concepto de acionado, lo cual suele explicarse diciendo que expresa una nocion de ndole logica o quasi logica (cf. Field (1992, p. 322), Field (1999, p. 534)). De acuerdo con Horwich (1998b, p. 5),

> [. . . T]he traditional attempt to discern the essence of truth|to analyse that special quality which all truths supposedly have in common|is just a pseudo-problem based on syntactic overgeneralization. Unlike most other properties, being true is unsusceptible to conceptual or scienti c analysis. No wonder

> that its `underlying nature' has so stubbornly resisted philosophical elaboration; for there is simply no such thing.

La situacion es quizas comparable con la relacion de identidad, que tambien es un predicado, o con el predicado de existencia, ca do en desuso, y volverse mas comprensible a traves de esta comparacion. Al igual que la identidad y el `predicado' de existencia, el proposito del predicado de verdad en el lenguaje no es la expresabilidad de una propiedad que algunos objetos comparten mientras que otros no |en el caso de la identidad y la existencia las propiedades y extensiones correspondientes ser an triviales|, sino cumplir un rol expresivo |la identidad sirve para expresar cuestiones de cardinalidad, o de nir funciones, mientras que la `existencia' permite expresar `disyunciones (posiblemente) in nitas'|. Y al igual que la identidad y la existencia, la verdad es capaz de cumplir este rol a traves de los principios que la gobiernan. Si bien se puso n a las confusiones generadas por el predicado de existencia adoptando en su lugar un operador,[13] esta estrategia no esta disponible para el predicado de verdad. Si se lo reemplazara por un operador, ya no ser a capaz de `transformar' sintacticamente oraciones en terminos sino que estas seguir an ocupando una posicion oracional, esto es, ya no ser a un dispositivo desentrecomillador, no podr a cumplir su funcion basica, y, por ende, ninguna de sus funciones logico-expresivas.

Luego, si la busqueda de la naturaleza profunda de la verdad es esteril, la de su extension es inutil. Contrario a lo que sostiene Barrio (1998, p. 5), i.e. que \[t]odo lo que un de acionista aconseja hacer es jar la extension de la verdad, sin postular ninguna propiedad especial que supuestamente todas las oraciones verdaderas tendr an en comun y que las falsas carecer an", lo relevante no es tampoco la extension del predicado veritativo sino los principios que lo gobiernan y le permiten cumplir sus roles expresivos. Nuevamente, en terminos de Horsten (2011, p. 146),

> So this is what de ationism about truth comes to in the end. We should not aim at describing the nature of truth because there is no such thing. Rather, we should aim at describing the inferential behavior of truth.

Consiguientemente, la naturaleza desentrecomilladora del predicado veritativo, su funcion basica y signi cado, suele expresarse en forma de principios o reglas de verdad transparente o de transparencia. El mas popular es el

`A' es verdadera si y solo si A: (Esquema T)

[13] ***Para un pantallazo general del problema vease Michael Nelson (2012).***

introducido por Tarski (v.g., Williams (1988), Horwich (1998b) adhieren particularmente a este principio de transparencia), pero tambien suele recurrirse a las reglas de inferencia

De A se puede inferir \`A' es verdadera". (Introduccion T)
De \`A' es verdadera" se puede inferir A. (Eliminacion T)

tomadas en conjunto (cf. Horsten (2011)), o al principio de Intersustitutividad (cf. Field (2008, p. 12), Beall (2009)):

Si dos oraciones B y C son identicas excepto en que (en algun contexto no opaco) B contiene la subformula A mientras que C contiene \`A' es verdadera" en su lugar, entonces B implica C y viceversa.

Los tres principios parecen poner igualmente en evidencia las dos notas que caracterizan a un dispositivo desentrecomillador: la equivalencia entre una oracion y su predicacion de verdad, la redundancia o transparencia de la verdad, por un lado, y el pasaje sintactico de posicion oracional a posicion nominal, de oracion a termino, por otro. Contrario a lo que el correspondentismo puede creer y Tarski mismo sostuvo (vease el apartado 2.1), los principios de equivalencia no establecen que la verdad es una relacion entre el lenguaje y el mundo, porque no hay ninguna relacion involucrada sino a lo sumo un bicondicional; establecen meramente la naturaleza desentrecomilladora de la verdad. La extension de la verdad, jada a traves de estos principios, dependera en cada caso de lo que se a rme y niegue, esto es, de cada ciencia o disciplina particular.

Al expresar de alguna manera la naturaleza desentrecomilladora de la verdad, de acuerdo con el de acionismo (algunos de) estos principios dan, al menos, parte del signicado del predicado de verdad. Algunas versiones del de acionismo, hoy llamadas \`minimalismo' (cf. Horwich (1998b)) o \`desentrecomilladorismo' (\`disquotationalism', como las llama Halbach (1999)), sostienen que, de hecho, estos principios agotan el signi cado de la verdad (v.g., Williams (1988), Horwich (1998b), aunque este ultimo pre ere proposiciones como los portadores de verdad). Si su naturaleza desentrecomilladora de ne completamente la verdad y (alguno de) los principios de transparencia expresan esta naturaleza de modo acabado, entonces no parece haber necesidad ni lugar para otros principios para dar el signi cado del predicado veritativo. De acuerdo con Williams (1988, p. 424), por ejemplo, el Esquema T es \just about everything there is to be said about truth". En palabras de Leeds,

> What we have sketched is not a theory of truth|a theory that shows the class of true sentences to be an important subset of the sentences in our language|but a theory of the concept of truth. Leeds (1978, p. 122)

Una objecion obvia que vale la pena explorar preliminarmente es la ya enunciada por el mismo Tarski (vease el apartado 2.1.2): si bien en un plano informal los principios de transparencia pueden resultar inocuos, cuando se asume cierta logica subyacente, como la clasica (pero tambien la intuicionista), llevan directamente a contradicciones, debido a la existencia de oraciones del mentiroso como L en el lenguaje. Si se supone que L es verdadera, la direccion de izquierda a derecha del Esquema T, i.e.[14]

Si \`A' es verdadera, entonces A. (T Out)

Eliminacion T o el principio de intersustitutividad permiten derivar que no lo es; y si se parte en cambio de esto ultimo, la direccion de derecha a izquierda del Esquema T, esto es,

Si A, entonces \`A' es verdadera. (T In)

Eliminacion T o el principio de intersustitutividad permiten derivar que no lo es; y si se parte en cambio de esto ultimo, la direccion de derecha a izquierda del Esquema T, Introduccion T o, nuevamente, el principio de intersustitutividad implican la verdad de L. Luego, en virtud del principio de tercero excluido, es posible derivar una contradiccion, y por la regla Ex falso sequitur quodlibet, cualquier cosa.

En consecuencia, aquellos que consideran que la logica clasica (intuicionista) es la logica \`verdadera' incluso en el contexto de los lenguajes ordinarios deben, o bien tener a la verdad como un concepto inconsistente y, por ende, inutilizable, o bien rechazar que los principios de transparencia sean parte constitutiva del signi cado del predicado veritativo, al menos en su version irrestricta o no tipeada. No obstante, esta no es una posicion demasiado extendida, ni siquiera entre aquellos que favorecen la logica clasica por sobre otras (cf. Horwich (1998b)). Como se~nale en el cap tulo 2 (apartado 2.1.2), no es claro que el lenguaje natural obedezca una logica en particular. Buena parte de la discusion acerca del signi cado y la naturaleza de la verdad suele llevarse a cabo en un plano intuitivo, desde el lenguaje natural, y las paradojas son puestas momentaneamente entre parentesis. En esta seccion me mantendr siempre en este plano, a menos que aclare lo contrario.

4.3.2. El caracter anal tico de los principios de transparencia

Si las instancias del Esquema T expresan al menos parte del signi cado del predicado veritativo, deben ser verdaderas en virtud de este signi cado, esto es, deben ser anal ticas

[14] ***Notese que, al igual que la diferencia entre el Esquema T y el Esquema-T, el guion, ausente en T Out, indica que se trata de la version informal, en castellano, de T-Out, y otro tanto va para T In y su contraparte formal T-In,*** que aparecer en el proximo cap tulo.

y, por tanto, necesarias en algun sentido. Analogamente, las reglas Introduccion T y Eli-minacion T y el principio de intersustitutividad deben preservan verdad necesariamente. Sin embargo, una clasica cr tica a la necesariedad del Esquema T, que se extiende natu-ralmente a la preservacion necesaria de verdad de los otros principios de transparencia, es que, por ejemplo, la verdad de la instancia

\La nieve es blanca" es verdadera si y solo si la nieve es blanca. (4.24)

depende, entre otras cosas, de que `nieve' signi ca nieve. Si, en cambio, signi cara pasto, lo cual es perfectamente posible en virtud de la arbitrariedad del signo, la instancia ser a falsa y, en su lugar, se deber a tener bicondicionales como

\La nieve es blanca" es verdadera si y solo si el pasto es blanco. (4.25)

Luego, (4.24) no puede ser siquiera necesariamente verdadera desde un punto de vista f sico (cf. Putnam (1988)). Para que \La nieve es blanca" sea verdadera no basta con que la nieve sea blanca sino que las palabras que conforman esta oracion deben signi car lo que signi can actualmente y no otra cosa, mostrando que el Esquema T no puede ser parte constitutiva del signi cado de la expresion `es verdadera'. De la misma manera, las reglas Introduccion T y Eliminacion T y el principio de intersustitutividad no pueden expresar parte del signi cado del predicado de verdad en la medida en que no son capaces de preservar verdad necesariamente.

Notese que Tarski no debe enfrentar esta objecion porque las condiciones que impone a toda de nicion de verdad para un lenguaje objeto a traves de la Convencion T (de nicion 2.1) no requieren que estas de niciones impliquen principios de transparencia como el Esquema T sino una version alternativa, el Esquema T Tipeado:

`A' es verdadera si y solo si (A): (Esquema T Tipeado)

donde A pertenece al lenguaje objeto, para el cual se de ne verdad y (A) es la tra-duccion de A al lenguaje en el cual se enuncian las instancias del Esquema T Tipeado, el metalenguaje. Luego, si `nieve' signi cara pasto, la instancia que habr a que aceptar, segun el Esquema T Tipeado, no es (4.24) sino (4.25). Roy T. Cook (2014b, p. 6, nota 8) argumenta erroneamente cuando sostiene que, plausiblemente, como las de niciones tarskianas de verdad son anal ticas (porque toda de nicion lo es), la consecuencia logica preserva analiticidad y el Esquema T se sigue de estas de niciones, este principio es tambien anal tico; porque su ultima premisa es falsa: es el Esquema T Tipeado, no el Esquema T, el que se sigue de las de niciones tarskianas.

El de acionismo podr a en principio extender el Esquema T admitiendo las instancias del Esquema T Tipeado, por ejemplo, dadas por las mismas oraciones que el Esquema T (y otro tanto con Introduccion T y Eliminacion T o el principio de intersustitutividad). En el mundo actual, el Esquema T Tipeado coincidir a completamente con el Esquema T, pero en otros mundos posibles, donde los signi cados de las oraciones a las cuales se les predica verdad var an y el lenguaje objeto di ere del metalenguaje, los principios divergir an. Algunas de acionistas que han favorecido esta posicion argumentan a favor de ella sosteniendo que el predicado de verdad se aplica a oraciones interpretadas, todo principio que regule el comportamiento de este predicado supone un signi cado jo de las oraciones del lenguaje en el cual se esta trabajando que no contengan el predicado de verdad.[15] Si bien la verdad parecer a depender ahora de ciertas relaciones entre las palabras que constituyen las oraciones a las cuales se aplica el predicado y el mundo (v.g., la referencia o denotacion de estas palabras), como quiere la teor a de la correspondencia, la mencion de estas propiedades no es necesaria a menos que no se comprenda el lenguaje objeto: la parte in acionaria no proviene de la verdad sino de esta posible incomprension.

Una consecuencia inmediata de esta postura `semanticalista' es que ya no puede, como suele hacerse y como Davidson (1969) demanda, explicarse la nocion de signi cado en terminos del concepto de verdad.[16] Pero, como argument en el apartado 4.2.3.4, esto no es evidencia concluyente en contra del de acionismo en tanto existen teor as alternativas del signi cado que no estan formuladas en terminos del predicado de verdad.

En cualquier caso, esta medida no es necesaria. Si A es una oracion declarativa eterna (vease el apartado 2.1.2), no se necesita saber nada acerca del signi cado de A o de las palabras o s mbolos que la componen para formular su instancia correspondiente del Esquema T: basta que la oracion que esta entre comillas sea la misma que la que esta desentrecomillada en cada bicondicional. Como se~nala Leeds (1978, p. 122), \[T]o explain the utility of disquotation, we need say nothing about the relations between language and the world", o practicamente nada: tan solo que las comillas (o cualquier otro mecanismo para asignar nombres transparentes a oraciones), al ubicarse al comienzo y al nal de una oracion, dan lugar a nombres para las oraciones que encierran, esto es, un m nimo de sintaxis acerca del lenguaje sobre el cual se trabaja, una relacion de denotacion acotada. Esta relacion, siguiendo a Kripke (1980), ja la referencia de todos los nombres transparentes de oraciones en todo mundo posible, aunque claramente podr a

15 ***Barrio (1998) identi ca al de acionismo que sostiene esta tesis como*** de acionismo semanticalista***. Vease,*** v.g.***, Field (1994).***

16 ***Cf. Dummett (1958-1959), Davidson (1990), Horwich (1998b). Otros losofos tambien han sugerido que la verdad, desde un punto de vista de acionista, no puede utilizarse para explicar la nocion de signi cado porque, en general, al ser conceptualmente redundante, no puede explicar nada (cf. Davidson (1990), Field (1986, 1994)).***

haber sido de otro modo. En palabras de Gupta (1993, p. 81, nota 43), \It is unreasonable to expect a substantial answer to the question `Why are all bachelors males?' but not to the question `Why does `snow' mean snow?'."

Las instancias del Esquema T y los otros principios de transparencia postulados por distintos de acionistas estan dadas por oraciones pertenecientes al mismo lenguaje desde el cual se enuncian los principios, al cual pertenece el predicado de verdad qua predicado, y solo en estas condiciones puede decirse que son necesarias.[17] Si `nieve' signi cara pasto, tambien lo har a del lado derecho del bicondicional en (4.24) que, por ende, seguir a siendo verdadero.[18] Luego, el predicado de verdad es libre de aparecer en de niciones de signi cado pero, si lo hiciera su rol no ser a de ninguna manera conceptual sino logico-expresivo, como argument en la seccion anterior.

Ahora bien, si las instancias de los principios de transparencia se limitan al lenguaje al cual pertenece el predicado de verdad, estos principios no logran capturar la version de la funcion basica de la verdad extendida a oraciones de lenguajes foraneos que menciono en el apartado 4.2.3.4. En este caso, las instancias del Esquema T Tipeado dadas por cada oracion de cada lenguaje traducible al lenguaje coloquial en el cual se enuncia el principio, resultan necesarias. Y, si todas las oraciones de todos los lenguajes `signi cativos', cuyas oraciones pueden en principio ser verdaderas o falsas, son tradu-cibles al castellano (o a cualquiera sea el lenguaje natural desde el cual se enuncian los principios), el Esquema T Tipeado resulta tambien su ciente, provistas las respuestas a las otras objeciones a la tesis minimalista que considero en esta seccion. Pero si esto ultimo no es el caso o, alternativamente, siguiendo a Field (1994, sec. 8) y sacri can-do levemente la gramatica, podr an adoptarse instancias del Esquema T mismo dadas, no ya solamente por oraciones del castellano (o del lenguaje natural en cuestion) sino de todo otro lenguaje (interpretado) existente. Por ejemplo, entre las nuevas instancias ahora se contar a con la siguiente:

\Schnee ist wei " es verdadera si y solo si Schnee ist wei .

Quizas este sea el modo mas el de representar la funcion basica extendida de la verdad, en cuya descripcion ninguna traduccion ha sido mencionada.

17 Notese que es posible que las equivalencias entre oraciones y adscripciones impl citas de verdad sobre ellas ya no tengan el caracter necesario de las instancias del Esquema T, esto es, de las equivalencias entre oraciones y sus adscripciones expl citas. Por ejemplo, es una contingencia que (4.11) sea la formula mas famosa de la f sica y, por ende, la equivalencia entre (4.11) y (4.5) tiene un componente contingente, ya no puede ser necesaria.

18 Barrio (1998) llama `de acionismo sintacticista' al de acionismo explicado en estos terminos.

4.3.3. Principios de transparencia vs de niciones expl citas de verdad

Prima facie, si un principio agota el signi cado de un termino puede decirse que cons-tituye una de nicion, ya sea expl cita o impl cita. Tradicionalmente, se impone como requisito sobre las de niciones, cualesquiera sean, la eliminatividad, i.e., que el de nien-dum resulte eliminable, que la de nicion sea equivalente a una expresion de la forma de (EXP) (vease el apartado 2.1.1), a una de nicion expl cita.

Es evidente que los principios de transparencia enunciados no tienen ellos mismos la forma de una de nicion expl cita. Si bien jan condiciones necesarias y su cientes para la aplicacion del predicado de verdad para cada uno de los objetos en su rango de aplicacion, esto es, cada una de las oraciones del lenguaje para el cual se quiere dar el signi cado de la expresion `es verdadera', no lo hacen de manera general sino a traves de una in nidad de instancias. Por esta razon Tarski (1933) denomina estas instancias meramente `de niciones parciales' (vease el apartado 2.2) del predicado veritativo.

Sin embargo, esto no es su ciente para descartar la existencia de una unica ex-presion, una de nicion normal del predicado de verdad, que sea equivalente o implique, de alguna manera, alguno de los principios de transparencia. Como se~nala Tarski (vease el apartado 2.2), esto puede hacerse facilmente si se dispone de cuanti cadores sobre oraciones, esto es, de cuanti cacion proposicional y cierto operador entrecomillador, simplemente cuanti cando sobre A en el Esquema T, i.e., mediante

Para toda oracion A, `A' es verdadera si y solo si A.

No obstante, como indica Horwich (1998b, p. 25), \the use of substitutional [proposicio-nal] quanti cation does not square with the raison d'^etre of our notion of truth, which is to enable us to do without substitutional quanti cation." De hecho, como se vio en la seccion anterior, el de acionismo sostiene que al menos parte de las razones por las cua-les el predicado veritativo existe en el lenguaje natural (y en ciertos lenguajes formales) es precisamente para emular la cuanti cacion sobre oraciones.

Tras explorar otras (im)posibles alternativas para de nir verdad expl citamente, Horwich (1998b, cap. 5) rechaza la existencia de una de nicion con estas caracter sticas, aunque su razonamiento inductivo no puede ser concluyente. Autores como Halbach & Horsten (2005) y Horsten (2011) han argumentado que el de acionismo se compromete con la inde nibilidad de la verdad de manera expl cita, ya que \[. . .] de ationists have tried to describe the purpose of truth that can only be achieved if truth is available. Or they say that truth would be dispensable if we could use in nite conjunctions or certain forms of quanti cation." (Halbach & Horsten, 2005, p. 204) Si el predicado de verdad es imprescindible, no puede ser expl citamente de nible porque, de lo contrario, ser a eliminable. Luego, concluyen, la verdad de acionista es una nocion primitiva, inde nida (o, agrego, al menos inde nible de manera expl cita).

Hay ciertamente un salto inferencial al pasar de la idea de que el predicado de verdad no ser a necesario si se dispusiera, por ejemplo, de cuanti cacion proposicional, a que el predicado es necesario ahora. No es lo mismo decir que la unica razon de ser del predicado veritativo es emular la cuanti cacion proposicional (mas ciertos usos epistemicos, etc.) que decir que el predicado veritativo es el unico mecanismo disponible para esta funcion en el lenguaje. Es epistemicamente posible que existan mecanismos alternativos aun no descubiertos (por m , al menos) que cumplan esta funcion, al menos en el lenguaje natural.

Lo que s queda claro es que no existe una de nicion expl cita de verdad (en lenguajes sin capacidad de cuanti cacion proposicional) en terminos de nociones clasicamente consistentes, por el teorema de la inde nibilidad de Tarski (teorema 2.9). Luego, aun si una de nicion expl cita del predicado de verdad que implique todas las instan-cias de alguno de los principios de transparencia fuera posible, estar a dada, directa o indirectamente, en terminos de nociones clasicamente inconsistentes para las cuales una de nicion expl cita no es posible, que a su vez habr a que elucidar.

En cualquier caso, como nota Horwich (1998b, p. 25), \there does not have to be any succinct, explanatorily adequate theory of truth", pace Tarski. So pena de caer en circularidades, no todo termino puede introducirse al lenguaje mediante una de nicion expl cita sino que necesariamente algunos deben ser introducidos como primitivos, agregando axiomas o reglas que los regulen, como la relacion de pertenencia en la teor a de conjuntos, o las constantes logicas en sus calculos correspondientes (al menos que se las de na desde un metalenguaje que contenga a su vez su propio conjunto de conectivas logicas, dado lugar al trilema de Fries/M•unchhausen).

Siendo la pertenencia un concepto matematico ordinario, desde un punto de vista tradicional los axiomas de zfc no constituyen una de nicion, no agotan el signi cado de `2', en tanto no son conservativos sobre la logica subyacente y, por ende, no permiten la eliminatividad de las ocurrencias de este termino. Sin embargo, el requisito de eliminatividad suele relajarse cuando se trata de constantes logicas. La tesis segun la cual es posible jar el signi cado de las constantes logicas mediante reglas de introduccion y eliminacion que los gobiernen (algunos sostienen que con las de introduccion basta) sin la necesidad de dar de niciones expl citas, originalmente defendida por Frege (1879) y Gentzen (1934), se conoce como `inferencialismo logico'. Si el predicado veritativo es de naturaleza logica, reglas como Introduccion T y Eliminacion T, o quizas tambien axiomas como el Esquema T o el principio de intersustitutividad, podr an ser su cientes para jar el signi cado de este predicado, a pesar de no permitir su eliminatividad y dar lugar a de niciones en el sentido ordinario.

No obstante, como se~nala Prior (1960/61, 1964), la tesis del inferencialismo logico no puede valer irrestrictamente porque, a diferencia de las de niciones expl citas, no todo conjunto de reglas puede estipularse para jar el signi cado de una conectiva. Prior pone como ejemplo dos reglas que jar an el signi cado de una conectiva binaria llamada `tonk':

De A se puede inferir A tonk B. (Introduccion Tonk)
De A tonk B se puede inferir B. (Eliminacion Tonk)

Aplicando estas reglas sucesivamente, es posible inferir cualquier oracion B a partir de cualquier oracion A, por ejemplo, una contradiccion a partir de una tautolog a. Introduccion Tonk y Eliminacion Tonk no logran asignar un signi cado coherente a `tonk'.

Consecuentemente, Belnap (1962) propone debilitar la tesis del inferencialismo logico, restringiendola a conjuntos conservativos de reglas: la estipulacion de reglas para una conectiva ja su signi cado en la medida en que no permita derivar nuevas oraciones que no contengan la conectiva correspondiente. Como Introduccion Tonk y Eliminacion Tonk generan problemas porque no son conservativas sobre los calculos mas usuales (i.e., aquellos en los que la nocion de consecuencia logica es transitiva, v.g., la logica clasica pero tambien muchas logicas no clasicas, como se vio en el cap tulo 3), Belnap logra evitar el problema se~nalado por Prior. Luego, si los principios de transparencia fueran conservativos sobre el sistema de logica preferido, podr an resultar su cientes para jar el signi cado del predicado veritativo.

Al mismo tiempo, Horsten (1995), Shapiro (1998) y Je rey Ketland (1999) han argumentado que \in one form or another, conservativeness is essential to de ationism" (Shapiro, 1998, p. 497) porque, si los principios de la verdad que se incorporan a una teor a o logica permiten probar nuevas oraciones en el lenguaje de esta teor a o logica, estan agregando contenido semantico, contrario a lo que sostiene el de acionismo.

Lamentablemente, los principios de transparencia no son conservativos sobre bue-na parte de los sistemas logicos y teor as mas utilizadas. Por ejemplo, ninguno de ellos es conservativo sobre la logica clasica (cf. Halbach (2001)), ni siquiera en su version tipeada, restringida a oraciones que no contienen ellas mismas el predicado de verdad. Por la re exividad de la identidad, que vale en logica clasica, se sigue que

Todo es identico a s mismo.

(4.26)

Luego, las instancias de cualquiera de los principios de transparencia correspondientes a las oraciones (4.26) y su negacion implican

\Todo es identico a s mismo" es verdadera.

\No todo es identico a s mismo" no es verdadera.

respectivamente. Por ultimo, estas dos oraciones junto con el principio de indiscernibilidad de los identicos, esto es, que si `dos' objetos son identicos entonces comparten todas sus propiedades, implican que las oraciones (4.26) y su negacion son diferentes entre s , i.e., que existen al menos dos objetos, lo cual no es una verdad logica. La prue-ba de Halbach puede extenderse facilmente a otras logicas elegidas frecuentemente por de acionistas.

Siguiendo a Belnap en su inferencialismo logico debilitado, Cook (2005) muestra que reglas como Introduccion Tonk y Eliminacion Tonk pueden leg timamente jar el signi cado de `tonk' si se adopta una logica subestructural (vease el apartado 3.4.3) en la cual la regla estructural de transitividad o Cut (vease el apartado 3.4.1.1)[19] no vale irrestrictamente. Porque en una logica sin transitividad Introduccion Tonk y Elimina-cion Tonk pueden ser agregadas conservativamente. Ripley (2012a) muestra un resultado semejante para (versiones del calculo de secuentes de) el principio de Intersustitutividad (IS, vease el apartado 3.4.1.2). Luego, pareciera que es preciso adoptar una logica no transitiva u otra donde las reglas sean conservativas para que los principios de transparencia puedan jar el signi cado del predicado de verdad.

Sin embargo, el requisito de conservatividad para la verdad ha sido puesto en duda tanto por de acionistas (cf. Field (1999), Picollo (2010)) como por personas que no se identi can necesariamente con el de acionismo (cf. Halbach (2001)). El contraargumento principal es que el predicado de verdad no es completamente logico,[20] por no ser neutral al topico; precisa una ontolog a espec ca, dada previamente, que es la verdadera responsable de las fallas de conservatividad. Al ser un predicado y no un operador, se aplica sintacticamente a terminos, no a formulas, a diferencia, v.g., de la negacion. Pero no se aplica a cualquier tipo de terminos, como el predicado de identidad, sino solo a aquellos que denotan portadores de verdad, en este caso, oraciones. Los principios de transparencia requieren, como m nimo, de nombres en el lenguaje para cada una de las oraciones del fragmento del lenguaje para el cual se quiera de nir verdad. En otras palabras, para formular principios de verdad es preciso contar con cierta teor a de la sintaxis en la base, que provea un discurso sobre las expresiones de las cuales se predica luego verdad. De acuerdo con, Horsten (2011, p. 65), por ejemplo,

[19] I.e., ***la propiedad de la nocion de consecuencia logica segun la cual, si*** B ***es consecuencia logica de*** A ***y*** C ***de*** B***, implica que*** C ***es consecuencia logica de*** A***, para cualesquiera oraciones*** A, B ***y*** C ***del lenguaje.***

[20] ***Contrario a lo que sostiene Field (1992, 1994, 1999).***

> De ationists sometimes say that truth is a logical notion, or that truth expresses a logical property (Field (1992, p. 322), Field (1999, p. 534)). At least in part, truth indeed is a logical notion. We have seen that, like the rst-order quanti ers, the truth predicate is a tool for expressing generality. [. . .] But this statement of the kind of notion that truth is should be amended. In our framework, the concept of truth is portrayed as a logico-linguistic notion because, in part, truth clearly is a linguistic notion. After all, the bearers of the property of truth are linguistic entities. More in particular, the bearers of truth are meaningful sentences (i.e., interpreted syntactic objects).

Por otra parte, Cook (2014b) muestra, contra Priest (2007), que de haber verdades logicas de la forma \`A' es verdadera" o \`A' no es verdadera" no lo ser an en virtud de su forma o, lo que es lo mismo, no satisfar an el principio de sustitutividad: para toda oracion A, s mbolo no logico a y expresion (posiblemente compleja) b del mismo tipo logico que a,[21] si A es una verdad logica, el resultado de sustituir a por b en A tambien es una verdad logica. Si B es una falsedad logica, `A' y `B' son del mismo tipo logico, con lo cual \`B' es verdadera" tambien deber a ser una verdad logica.

Luego, la verdad no es una nocion propiamente logica sino, como suele decirse, es un dispositivo logico-ling•u stico, y consecuentemente sus toles, podr a decirse, no son plenamente logicos sino quasi logicos o, mas precisamente, logico-expresivos. Al no ser completamente logico sino precisar una sintaxis subyacente, la falla de conservatividad no puede evaluarse sobre el sistema logico elegido sino sobre la teor a de la sintaxis que, como argumentan Halbach (2001) y Picollo (2010), bajo condiciones m nimas es ya capaz, sin la ayuda de ningun principio que gobierne el predicado veritativo, de probar que toda oracion es diferente de su negacion y muchas otras cosas mas.[22] De no dar lugar a trivialidad (por ejemplo, en sus versiones tipeadas), las versiones formales de los principios de transparencia son, hasta donde llega mi conocimiento, conservativas sobre teor as de la sintaxis para los lenguajes correspondientes.

4.3.4. Principios de transparencia vs principios generales

Desde cierto punto de vista, el mismo Tarski consider que, en materia de contenido, el Esquema T era requisito su ciente para jar el signi cado de la verdad, en tanto es el unico principio (junto con el requisito de que solo oraciones pueden formar parte de la

[21] V.g., *si* a *es una constante de individuo,* b *es un termino; si* a *es una letra monadica de predicado,* b *es una formula con una variable libre, etc.*

[22] ***Esta salvedad al requisito de conservatividad es semejante a la quali cation de la cual habla Field (1994, p. 250). Simplemente habr a que reemplazar `cognitivamente equivalente' por `anal ticamente equivalente'.***

extension de la verdad, un principio que establece meramente el rango de aplicacion del predicado) para el predicado veritativo que forma parte de las condiciones de adecuacion material enunciadas en la Convencion T (de nicion 2.1). Pero, como se~nalan Martin Fischer, Halbach, Johannes Stern & J•onne Kriener (2015), esto entra en con icto con el rechazo de Tarski a teor as axiomaticas dadas unicamente por instancias versiones formales del Esquema T (solo para oraciones del lenguaje objeto), como tb o utb
(vease el apartado 2.3.3).

> A theory of truth founded on them would be a highly incomplete system, which would lack the most important and most fruitful general theorems. (Tarski, 1933, p. 257)

esto es, ser a incapaz de probar versiones formales de ciertos principios generales, como (4.22),

Una oracion no es verdadera si y solo si su negacion lo es. (4.27)

y

Una oracion condicional es verdadera si y solo si la verdad de su antecedente implica la verdad de su consecuente. (4.28)

que se siguen directamente de las de niciones tarskianas.

Prima facie, es razonable requerir que estos principios generales se sigan de todo conjunto de expresiones que se precie de agotar el signi cado del predicado veritativo, en tanto resultan intuitivamente verdaderos y su verdad no parece depender de ninguna otra cosa que de la naturaleza del predicado veritativo y ciertas leyes logicas. Como los principios de transparencia en sus versiones formales no implican estos enunciados generales, se deber a concluir que no estar an agotando el signi cado de la verdad.

Sin embargo, hay dos cuestiones a tener en cuenta antes de llegar a esta conclu-sion. Por un lado, que el caracter intuitivo de principios generales como (4.27), (4.22) y (4.28) depende de la logica que se adopte. Si esta es la logica clasica, efectivamente, los principios resultan correctos. Pero si, por ejemplo, se pre ere una logica en la cual el principio de tercero excluido no vale, (4.27) puede no resultar intuitivo ya, porque bajo ciertas condiciones m nimas este principio, junto con los principios de transparencia, implica todas las instancias del tercero excluido. Asimismo, si se opta por una logica donde la regla de introduccion del condicional o el Modus Ponens fallan, (4.28) debe ser rechazado. Luego, lo que s parece razonable es requerir de un conjunto de oraciones que agote el signi cado del predicado veritativo es que implique, bajo cierta logica, los prin-cipios generales de la verdad que resulten correctos de acuerdo con esta logica misma.

V.g., en la vasta mayor a de los casos (4.22) resultar deseable, porque las reglas que regulan el comportamiento de la conjuncion son excepcionalmente cuestionadas.

Dejando de lado los casos en los cuales los principios de transparencia resultan triviales, esto es, permiten probar todas las expresiones del lenguaje (como cuando se toman no tipeados y se adopta la logica clasica), las versiones formales de estos principios no suelen ser su cientes para la derivacion de los principios generales correspondientes. Por ejemplo, como nota Tarski (vease el apartado 2.3.3), tb(pa$^+$) no es capaz de probar

$$8x(Sent_{L^+pa} (x) \ ! \ (:T \ x \ \$ \ :T \ :.x))$$

ni

$$8x(Sent_{L^+pa} (x) \ ! \ (T \ (x\hat{}.y) \ \$ \ (T \ x \ \hat{} \ T \ y)))$$

aunque la logica subyacente a la teor a es clasica. En general, si el sistema no es trivial, la logica subyacente es nitaria y los principios generales no valen previamente a la incorporacion de los principios de transparencia, las versiones formales de estos ultimos no tienen su ciente poder deductivo para implicar los principios generales.

No obstante, esta seccion no se ocupa de las versiones formales de los principios de transparencia y sus propiedades en diferentes sistemas tambien formales, lo cual recien sera objeto del cap tulo siguiente, sino, como se~nale al comienzo, de su formulacion en los lenguajes coloquiales, donde no parece haber tal cosa como una logica subyacente particular, y las inferencias que se llevan a cabo son mas bien informales. En este plano, como nota Horwich (2005), las instancias de los principios de transparencia junto con los principios logicos que se adopten efectivamente implican, aunque tal vez no logicamente, los principios generales correspondientes.

A diferencia de los lenguajes formales que se emplean usualmente, el lenguaje natural no parece ser `compacto',[23] esto es, hay reglas in nitarias cuyas versiones formales resultan invalidas en los lenguajes formales compactos, pero que preservan verdad en el lenguaje coloquial. Por ejemplo, la que Tarski denomina `regla de induccion in nita': dado un predicado monadico P , si todos los objetos del dominio de discurso tienen un nombre en el lenguaje y, para cada termino cerrado t del lenguaje que denota uno de estos objetos, se tiene que t es un P , se puede concluir leg timamente que todos los obje-tos son P s.[24] Como en el lenguaje coloquial las comillas, por ejemplo, proveen nombres para todas las oraciones del lenguaje, un caso especial de la regla de induccion in nita

[23]Por supuesto, esta es meramente una manera de hablar, ya que el lenguaje natural no tiene una semantica precisamente de nida y la propiedad de compacidad correspondiente no puede ni siquiera enunciarse.

[24]En el lenguaje de la aritmetica, donde el dominio pretendido es el conjunto de numeros naturales, la regla se conoce como `regla !': si ' es una formula de L^+_{pa} con una variable libre v, de las in nitas instancias '[n=v] dadas por nada numero natural n puede inferirse 8v'.

es el siguiente: dado un predicado monadico P , a partir de las instancias de \`A' es una P " dadas por cada oracion A del lenguaje, se puede inferir que todas las oraciones del lenguaje son P s.

Junto con, v.g., el principio de Intersustitutividad, la regla de induccion in nita permite, bajo ciertas suposiciones logicas m nimas, derivar el principio general (4.22). Para cualesquiera oraciones del lenguaje A y B,

A y B si y solo si A y B:

y el Esquema T implican

\`A y B' es verdadera si y solo si \`A' es verdadera y \`B' es verdadera.

Aplicando la regla de induccion in nita para dominios de oraciones en la ultima l nea sobre \`A', para cada oracion B del lenguaje se tiene que

Todas las oraciones son tales que su conjuncion con \`B' es verdadera si y solo si ellas son verdaderas y \`B' es verdadera.

Una nueva aplicacion de la regla sobre \`B' da por resultado (4.22), como se quer a.

Los principios generales que gobiernan el predicado veritativo estan de alguna ma-nera contenidos ya en los principios de transparencia. En palabras de Tarski (1933, p. 260), \from the intuitive standpoint the rule of in nite induction seems to be as reliable as the rules normally applied: it always leads from true sentences to true sentences" y, de acuerdo con Horwich (2005, p. 84, nota 14), la regla \enables the general facts about truth to be explained by their instances." Ciertamente, esta regla es empleada con bas-tante frecuencia, al menos en el discurso loso co que compete a esta investigacion. Por ejemplo, cuando se dice que los principios de transparencia dan condiciones necesarias y su cientes para la aplicacion del predicado de verdad a cada uno de los objetos en su rango de aplicacion, se esta pasando de una in nidad de instancias a un unico enunciado general. O, tal vez mas evidentemente, se dice que una generalizacion como

Todas las P s son verdaderas. (4.29)

expresa el contenido de todas las instancias de

Si \`A' es P entonces A.

a la vez y no mas que eso porque, por la funcion basica de la verdad, cada una de estas instancias es equivalente a

Si `A' es P entonces `A' es verdadera. (4.30)

y todas las instancias de (4.30) juntas implican (4.29) a traves de la regla de induccion in nita.

Si bien en un plano informal los principios de transparencia pueden resultar su - cientes para derivar los principios generales deseados para el gobierno del predicado de verdad y, por ende, agotar su signi cado, sus contrapartes formales podr an necesitar ciertos principios complementarios, si la completitud del sistema resultante es uno de los objetivos, como se vera en las secciones siguientes.

4.3.5. El caracter extensional de los principios de transparencia

De acuerdo con la funcion basica de la verdad, su naturaleza desentrecomilladora, la equivalencia entre una oracion y su predicacion expl cita de verdad es de naturaleza meramente extensional. Lo que importa es la preservacion de las propiedades semanticas y no, por ejemplo, del sentido; la transformacion que el predicado de verdad opera es meramente salva veritate. En consecuencia, si el Esquema T captura la naturaleza desen-trecomilladora de la verdad, los bicondicionales que lo constituyen deben ser materiales, lo cual queda quizas ya re ejando en las inferencias de Introduccion T, Eliminacion T y el principio de Intersustitutividad.

Sin embargo, autores como Gupta (1993), Gupta & Belnap (1993) y Priest (2006b) sostienen que para establecer el signi cado de un predicado, como `esta soltera' o `es verdadera', se precisa un bicondicional mas fuerte que el material. Por ejemplo, en

x esta soltera si y solo si x no esta casada

el bicondicional `s y solo si' debe tener cierto estatus de nicional o intensional, porque lo que se pretende con el es jar, no solo la extension, sino la intension del predicado en cuestion. Como el Esquema T captura la naturaleza de la verdad y, por tanto, su signi-cado; como cada una de sus instancias ja las condiciones bajo las cuales el predicado de verdad se aplica a la oracion correspondiente y son, por tanto, de niciones parciales del predicado veritativo, de acuerdo con Gupta & Belnap las equivalencias que lo cons-tituyen no deben ser materiales sino de nicionales. Decir que una oracion es verdadera es, por de nicion, lo mismo que decir la oracion; existe una relacion de sinonimia entre ambas.

Gupta & Belnap (1993, cap. 5) ofrecen una teor a de las de niciones mediante la cual explican que signi ca que una equivalencia sea de nicional, y cuales son sus diferen-cias con respecto a las equivalencias materiales necesarias o anal ticas. No obstante, su teor a de las de niciones esta dise~nada para lidiar con predicados ordinarios, que existen en el lenguaje para expresar un concepto, entre los cuales incluyen a la verdad. De acuer-do con el de acionismo, la naturaleza del predicado veritativo es en cambio mas af n a la de las constantes logicas (para las cuales no es posible dar de niciones en el marco de la teor a de Gupta & Belnap). Como, v.g., la conjuncion, el predicado veritativo admite una de nicion mediante reglas de uso, como Introduccion T y Eliminacion T o, equi-valentemente, el Esquema T o el principio de intersustitutividad. En ambos casos, las reglas que de nen los terminos en cuestion estan expresadas en terminos de equivalencias o inferencias materiales, lo cual es su ciente precisamente por la naturaleza inferencial de los terminos que de nen. El estatus especial que hace que determinadas reglas y no otras constituyan de niciones esta dado por su analiticidad, por la cual argument en el apartado 4.3.2, y por la intencion de quien las enuncia.

Otro tanto puede decirse de la formulacion de Priest del Esquema T por medio de un (bi)condicional (la conjuncion de dos condicionales) no material sino intensio-nal. Priest (2006b, cap. 6) de ne su condicional en terminos de mundos posibles, como mostre en el apartado 3.4.2, pero su intencion no es darle un estatus de nicional sino principalmente imprimirle ciertas propiedades logicas: por un lado, restaurar la validez del Modus Ponens, que el condicional material pierde en la logica sobre la cual Priest trabaja; por otro, obtener un condicional para el cual la regla de contraposicion no valga irrestrictamente.

§

En este cap tulo he argumentado, en primer lugar, que el predicado veritativo cumple unicamente roles logico-expresivos en el lenguaje, todos los cuales pueden expli-carse por medio de su funcion basica o naturaleza desentrecomilladora. En consecuencia, esta naturaleza desentrecomilladora constituye o encapsula el signi cado de la verdad. Ademas, en esta ultima seccion he argumentado que este signi cado puede expresarse por medio de principios de transparencia, i.e., el Esquema T, las inferencias de Intro-duccion T, Eliminacion T o el principio de Intersustitutividad. Estas tesis, sostengo, conforman el nucleo del de acionismo. Si no me equivoco, dif cilmente una persona que se identi ca a s misma con el de acionismo pueda diferir con respecto a ellas.

5

La quasi logica de la verdad

> \Like the logical connectives, the concept of truth is a handmaiden of reasoning."
>
> { Leon Horsten, The Tarskian Turn

Como se~nale en el cap tulo anterior, el predicado veritativo cumple una serie de roles logico-expresivos de suma importancia, algunos de los cuales tienen una utilidad puramente logica.[1] Los usos logicos del predicado veritativo |i.e., la expresion de conjunciones y disyunciones posiblemente in nitas| inducen la formulacion de `logicas' o, mejor dicho, teor as formales de la verdad, dado que se requiere cierta sintaxis en la base, que extiendan la logica preferida con principios o reglas para el gobierno del predicado veritativo que garanticen, primeramente, estos usos logicos y, de ser posible, todos sus usos logico-expresivos. Los sistemas resultantes tendr an cierto estatus logico o quasi logico, porque la verdad cumplir a un rol inferencial en ellos y, por ende, jugar a un papel en el estudio de la validez de argumentos, verdades logicas, falsedades logicas, etc.

>Cuales son estos principios para la verdad capaces de garantizar sus roles logico-expresivos y, en particular, sus usos logicos? Dado que, como mostre en el apartado 4.2, todos los usos del predicado veritativo pueden explicarse a traves de su funcion basica y los principios de transparencia expresan esta funcion, tanto dentro como fuera del de acionismo suele considerarse que toda teor a formal de la verdad cuyo predicado pueda cumplir sus roles logico-expresivos es capaz de derivar versiones formales de (al menos alguno de) estos principios y, viceversa, toda teor a capaz de esto ultimo permite la expresion de conjunciones y disyunciones posiblemente in nitas.

[1] ***Este cap tulo es una ampliacion de un art culo escrito en colaboracion con Thomas Schindler (cf. Picollo & Schindler (2015)).***

No obstante, a causa del teorema de Tarski (teorema 2.9), esto no es posible en el marco de la logica clasica. Muchos teoricos de la verdad que apuntan a la utilidad logica del predicado han, en efecto, adoptado logicas no clasicas, aunque poco se ha dicho acerca del sentido en el cual ciertas adscripciones de verdad de un lenguaje formal ser an capaces de expresar conjunciones o disyunciones posiblemente in nitas y como los principios de transparencia lo garantizar an. Falta una investigacion detallada de las condiciones que deben darse para que el predicado de verdad de un lenguaje formal sea capaz de cumplir sus roles logico-expresivos, bajo cuya luz evaluar si es realmente necesario o su ciente contar con principios de transparencia en la teor a. Si acaso principios mas debiles fuesen su cientes, esta ya no ser a una razon para abandonar la logica clasica. Al a rmar que la unica razon de su existencia esta dada por sus roles logico-expresivos, de los cuales los unicos absolutamente irremplazables son los que tienen usos de ndole logica, una de acionista no deber a sentir demasiado apego por principios formales a menos que sean necesarios para garantizar el rol del predicado de verdad. Y si acaso otros principios en lugar de, o adicionalmente a, los de equivalencia fuesen necesarios, habr a que cuidarse de excluirlos de las teor as formales de la verdad. Una investigacion tal permitir a evaluar que teor as de la verdad son convenientes y cuales no, y cuales lo son mas que otras, desde un punto de vista de acionista.

En este cap tulo llevo precisamente esta investigacion a cabo. Primero doy condiciones generales que toda quasi logica de la verdad debe cumplir. En 5.2 examino en que sentido puede decirse que ciertas adscripciones generales de verdad expresan conjunciones posiblemente in nitas y que principios para la verdad deben valer para garantizarlo; en otras palabras, doy condiciones necesarias y su cientes para posibilitar los usos logicos del predicado veritativo en una teor a formal de la verdad. En 5.3 establezco criterios generales que una teor a de la verdad de acionista debe satisfacer basandome en los resultados de los apartados previos y en otras consideraciones que ah introduzco, y examino diversas teor as formales de la verdad introducidas en los cap tulos 2 y 3 a la luz de estos criterios.

5.1. Condiciones generales sobre una quasi logica de la verdad

Como se~nale, toda quasi logica de la verdad debe estar formulada sobre una teor a base que o cie de teor a de la sintaxis. De ella se espera, no solo que provea nombres para los portadores de verdad, las oraciones del lenguaje, sino posiblemente tambien predicados que expresen ciertas propiedades sintacticas que estos portadores puedan tener, como ser un enunciado condicional o pertenecer a cierta porcion del lenguaje, y funciones sintacticas como aquella que toma una formula y devuelve su negacion. Estos predicados y funciones, junto con otros que se deseen incorporar segun las necesidades particulares, como ser un teorema de tal o cual teor a, son los que permitiran formular generalizaciones en las cuales se adscribe verdad a ciertas oraciones y no a otras. Por ejemplo, si se cuenta con un predicado P que expresa la propiedad de ser una oracion condicional del lenguaje en la cual el antecedente y el consecuente coinciden, el enunciado

Todos los P s son verdaderos.

predica verdad exactamente de aquellas expresiones de la forma \Si A entonces A" y expresa, por tanto, la conjuncion in nita de todas estas oraciones.

Con respecto a los principios para la verdad, como lo que se desea es un predicado quasi logico, que permita expresar conjunciones y disyunciones posiblemente in nitas de oraciones de cualquier lenguaje, incluso de aquellas que contienen ellas mismas el predicado de verdad, el de acionismo |y presuntamente toda persona que quiera una teor a en la cual sea posible hacer uso logico irrestricto del predicado de verdad| suele preferir teor as no tipeadas de la verdad, en las cuales el predicado de verdad no pertenezca en un metalenguaje (como, v.g., el predicado de verdad para el lenguaje de la aritmetica L_{pa} en la de nicion tarskiana 2.4) sino al mismo lenguaje objeto, el lenguaje de la quasi logica resultante. Esto permite iterar el predicado veritativo, esto es, predicar verdad de oraciones que lo contienen, dando lugar a formulas bien formadas del lenguaje, pero no es su ciente. Adicionalmente, los principios que se adopten para el predicado de verdad deben admitir aplicaciones correctas del predicado a oraciones que lo contengan; deben o bien implicar la verdad de oraciones que contengan el predicado veritativo o bien carecer de restricciones a la aplicacion del predicado a oraciones que ya lo contienen. Una teor a de la verdad verdaderamente libre de tipos debe cumplir estas condiciones (cf. Halbach (2011, cap. 10)).

Como se vio en el cap tulo 3, sistemas de ese tipo son ciertamente posibles. Asimismo, al estar formulados sobre la aritmetica, que o cia como teor a de la sintaxis, cuentan con predicados que de nen una amplia variedad de propiedades sintacticas.[2] Siendo esto lo mas comun, al igual que en el cap tulo 3, en este apartado considero exclusivamente teor as de la verdad formuladas en (posibles extensiones de) L_T que extienden la teor a base pa^+ con axiomas o reglas o el modelo base N^+ a modelos de todo L_T (veanse los apartados 1.2.1 y 1.2.4).

[2] ***Se ha probado que una teor a de la sintaxis decente es relativamente interpretable en** pa **y viceversa. Por ejemplo, Halbach y Graham Leigh estan trabajando en teor as naturales de la sintaxis para las cuales prueban este resultado. Por esta razon suele decirse tambien que la verdad es una nocion logico-matematica (cf. Halbach & Horsten (2005), Horsten (2011)).***

Como el resultado es meramente una logica junto con principios para T y una teor a de la sintaxis necesaria para su formulacion, debe entenderse exclusivamente como una base, precisamente una quasi logica sobre la cual debe ser posible formular todo tipo de teor as, v.g., la teor a de conjuntos o cualquier otra cosa. Mientras que los abordajes axiomaticos (por ejemplo, tb(pa^+), utb(pa^+), ct(pa^+) en el apartado 2.3.3, kf y putb en 3.1.3.1 y 3.1.3.2, respectivamente, fs en 3.3 y lptt, pltt y sttt en 3.4) deberan ofrecer axiomas o reglas lo su cientemente exibles como para adaptarse facilmente a cualquier lenguaje de primer orden L L^+_{pa}, las teor as semanticas (v.g., las teor as de Punto Fijo de Kripke y la teor a d-fundada de Leitgeb; en los apartados 3.1.2 y 3.2, correspondientemente) deberan mostrar como extender modelos arbitrarios de L a L_T manteniendo las propiedades deseadas del predicado veritativo.

Halbach & Horsten (2005) argumentan en contra de los abordajes semanticos, se~nalando que su aplicabilidad a un lenguaje interpretado solo es posible en la medida en que la teor a de conjuntos, la metateor a en la cual se obtienen los modelos correspondientes, provea un modelo isomor co a la interpretacion pretendida de este lenguaje. Como no existe tal cosa para L_{zfc}, las teor as semanticas no son aplicables a todos los lenguajes de primer orden. Naturalmente, podr a simplemente tomarse como metateor a una teor a mas poderosa, como la teor a de clases tc_1 en el apartado 2.3.2, aunque esto dar a lugar a jerarqu as, con los inconvenientes que usualmente conllevan.

Otro argumento que proponen en contra de la adecuacion de las teor as semanticas al proyecto de acionista se basa en su tesis, expuesta en el apartado 4.3.3, segun la cual el de acionismo esta comprometido con la ineliminabilidad y, por ende, con la in-de nibilidad expl cita de la verdad |lo cual, como se~nale entonces, no es claro|. Desde su punto de vista, las teor as de la verdad semanticas disponibles proveen de niciones expl citas del predicado veritativo en la metateor a, esto es, la teor a de conjuntos. Si bien no es mi objetivo discutir esto en detalle aca, notese que, v.g., las teor as de Punto Fijo de Kripke (vease el apartado 3.1.2) no permiten la eliminabilidad del predicado de verdad porque, estrictamente hablando, no proveen una de nicion expl cita de T de la forma de T x $ ', donde ' no contiene T , sino que meramente de nen la extension que se le asigna a T en el metalenguaje. Pero el lenguaje a utilizar, que contiene su propio predicado de verdad, es el lenguaje objeto.

Un argumento que considero es concluyente, no necesariamente en contra de los abordajes semanticos sino a favor de los axiomaticos, es el siguiente. Desde el punto de vista de acionista, la verdad es semejante a una constante logica, juega un rol expre-sivo e inferencial en el lenguaje. Luego, como toda logica, la quasi logica de la verdad debe poder ser recursivamente axiomatizable, para poder ser utilizada efectivamente al expresar y razonar (cf. Fischer et al. (2015)). Los abordajes semanticos no anulan nece-sariamente esta posibilidad pero los conjuntos de oraciones que implican y las inferencias que validan suelen no ser recursivamente axiomatizables.

Esto puede deberse, como a veces sucede, al modelo base N^{+}, que o cia de teor a de la sintaxis, cuya complejidad es $^{1}_{1}$ y, por ende, no es axiomatizable en un lenguaje de primer orden, como muestran los resultados de incompletitud de G•odel. No obstante, en buena parte de los casos sucede que los principios que conciernen a la verdad exclusi-vamente introducen aun mas complejidad, como es el caso de los modelos de punto jo de Kripke y el modelo d-fundado de Leitgeb (veanse los apartados 3.1 y 3.2), que son ambos $^{1}_{1}$.

Consecuentemente, estas teor as de la verdad resultan en buena parte inutilizables. Los abordajes axiomaticos no son nes en s mismos; sus contrapartes axiomaticas lo son. Podran servir como heur stica, pero el foco debe estar en el calculo y en su utilizacion, como argumentan Halbach & Horsten (2005).

Asimismo, es claro que la no trivialidad es un requisito fundamental. Adicio-nalmente, como ya mencione, los principios que se adopten para la verdad no pueden exceder la funcion basica de la verdad: aunque sea de manera informal, las consecuen-cias que una teor a de acionista de la verdad tenga con respecto al predicado veritativo deben desprenderse de su funcion basica o, mas precisamente, de los principios de trans-parencia. Incluso podr a argumentarse que, si bien informalmente, todos los principios para la verdad que se sigan en una teor a de acionista deben ser explicables en termi-nos de las instancias de las versiones formales de los principios de transparencia que la teor a misma valide, aunque podr a replicarse que la teor a es simplemente incompleta con respecto a las instancias correctas de los principios de equivalencia relevantes (si es que no prueba su negacion o la logica subyacente es paraconsistente).

En la seccion que sigue dejo momentaneamente de lado estas cuestiones generales para volver a ellas en 5.3, y me ocupo de la pregunta central del cap tulo, puntualmente si acaso en los sistemas introducidos en los cap tulos 2 y 3 o en otros sistemas los usos logicos del predicado veritativo son posibles y, mas generalmente, que condiciones debe cualquier teor a de la verdad satisfacer para garantizar esta posibilidad.

5.2. Expresando conjunciones in nitas mediante generali-zaciones

>Que principios deben valer en una teor a formal de la verdad para que ciertas adscrip-ciones de verdad expresen conjunciones y disyunciones posiblemente in nitas? Como

anticipe, muchos losofos apuntan a versiones formales de los principios de transparencia (cf. Horwich (1998b), Field (1994), Beall (2005) , Field (2008), Horsten (2011)) basandose en un razonamiento como el siguiente: dado que la funcion basica del predica-do de verdad es necesaria y su ciente para garantizar sus funciones logico-expresivas, en las cuales se fundan todos los usos de este predicado, y los principios de transparencia expresan esta funcion basica, los principios de transparencia son necesarios y su cientes para posibilitar todos los usos del predicado veritativo. Por ejemplo, Horwich (1998b, p. 124) sostiene que

> The generalising function of truth is perfectly well ful lled as long as instan-ces of the [Esquema T], understood as material biconditionals, are accepted.

Mas aun, algunos teoricos de la verdad que no se identi can a s mismos con el de-acionismo mantienen tesis semejantes, como Priest (2006b, x 4.2) y Cobreros et al. (2013). En ese caso, la consecuencia inevitable ser a el abandono de la logica clasica o la mutilacion del poder expresivo de la verdad. Pero esto todav a esta por verse.

La idea general mas aceptada sobre como la nocion de verdad permite que cier-tas generalizaciones expresen conjunciones posiblemente in nitas puede resumirse en la siguiente cita de Horwich (1998b, p. 3):

> Consider, for example,
>
> (1) What Oscar said is true.
>
> Here we have something of the form
>
> (2) x is F ,
>
> whose meaning is such that, given further information about the identity of x|given further premises of the form
>
> (3) x =the proposition that p
>
> |we are entitled to infer
>
> (4) p.
>
> And it is from precisely this inferential property that propositions involving truth derive their utility. For it makes them, in certain circumstances, the only appropriate object of our beliefs, suppositions, desires, etc. Suppose, for example, I have great con dence in Oscar's judgment about food; he has just asserted that eels are good but I didn't quite catch the remark. Which

> belief might I reasonably acquire? Well, obviously not that eels are good. Rather what is needed is a proposition from which that one would follow, given identi cation of what Oscar said|a proposition equivalent to
>
> If what Oscar said is that eels are good then eels are good, and if he said that milk is white then milk is white, ... and so on;
>
> and the raison d'etre of the concept of truth is that it supplies us with such a proposition: namely (1).

Luego, el analisis informal de Horwich esta en la misma l nea que el que di en los apartados 4.2.2.2 y 4.2.3.3: una adscripcion general de verdad o generalizacion como (1) es, en virtud de la naturaleza desentrecomilladora de la verdad, de alguna manera equivalente a la conjuncion in nita

^
Si Oscar dijo A entonces A;
A2L

y, por lo tanto, implica |dada una identi cacion de lo que Oscar dijo| aquello a rmado por Oscar, esto es, que las anguilas son ricas. Es esta propiedad inferencial lo que torna utiles a las generalizaciones como (1). Claramente, en el pasaje a un plano formal, i.e., a una teor a formal de la verdad th formulada en (una extension de) L_T , esta explicacion suscita una serie de preguntas importantes que es necesario distinguir:

(a) >En que sentido pueden una generalizacion de la forma

8v('(v) ! T v) (5.1)

y la conjuncion in nita correspondiente

^
('(p q) !) (5.2)
$2L_T$

ser equivalentes, relativamente a una teor a de la verdad? O, alternativamente, >en que sentido puede una generalizacion de la forma de (5.1) expresar una conjuncion in nita?

Notese que ningun lenguaje de primer orden permite conjunciones in nitas, con lo cual la equivalencia, de existir, debe ser de alguna manera externa. Asimismo, hay al menos un sentido claro en el cual las conjunciones in nitas reales, como (5.2), pertenecientes a lenguajes in nitarios (cf. John L. Bell (2012)), di eren de expresiones de la forma de (5.1): como se~nale en el cap tulo 2, mientras que una conjuncion in nita jamas puede contenerse a s misma como conyunto, porque las formulas bien formadas de los lenguajes in nitarios estan de nidas por medio de de niciones recursivas; las oraciones de la forma (5.1) pueden ellas mismas expresar su propio contenido a traves del predicado de verdad, simplemente satisfaciendo '(v). Por ejemplo, \Todas las instancias del Principio del Tercero Excluido son verdaderas" expresa todas las instancias del Principio del Tercero excluido, incluso aquella dada por esta misma oracion. En un lenguaje in nitario, en cambio, no es posible expresar ciertos principios logicos como el Tercero Excluido mediante una unica oracion.

(b) >Que condiciones necesarias y su cientes debe satisfacer una teor a de la verdad para conllevar esta equivalencia? En particular: >presupone esta equivalencia el Esquema-T, esto es,

T p'q $ ' (Esquema-T)

u otros principios de transparencia formales como[3]

8t 1 : : : t (T p '(t; : : : ; t) q $ '(t; : : : ; t)); (Esquema-T Uniforme)
n .1 .n 1 n

las reglas

' / T p'q (T-Intro) T p'q / ' (T-Elim)

o el principio de Intersustitutividad dado por las siguientes reglas?

: : : ' : : : / : : : T p'q : : : (Intersustitutividad)

(c) >De ser posible en algun sentido la equivalencia entre (5.1) y (5.2), implica las propiedades inferenciales de las cuales (5.1) deriva su utilidad, esto es, su capacidad de expresar todas las oraciones que satisfacen el predicado '(v)? >Presuponen estas propiedades inferenciales de las cuales las generalizaciones de la forma de (5.1) obtienen su utilidad la equivalencia en cuestion? En otras palabras, >son necesarios o su cientes los principios que garantizar an la equivalencia entre (5.1) y (5.2) para permitir que el predicado de verdad cumpla sus propositos logicos?

Dejando de lado las reconstrucciones informales de casos particulares dadas por Quine (1970), Horwich (1998b) y Field (2008), entre otros, Halbach (1999) ha sido el unico en intentar elucidar que signi ca en terminos formales que un predicado de verdad permita la expresion de conjunciones in nitas y como es que los principios de

[3] *Vease el apartado 1.2.3 para aclarar detalles sobre la notacion.*

transparencia garantizan esta posibilidad, aunque solo ha respondido estas preguntas para sistemas tipeados dados por instancias del Esquema-T, i.e., para tb (vease el apartado 2.3.3). En el siguiente apartado muestro que el abordaje de Halbach no es facilmente extensible a otras teor as y, en 5.2.2, ofrezco una segunda elucidacion, que resulta en cambio adecuada.

Siendo la verdad, desde un punto de vista de acionista, un predicado cuya existencia se debe exclusivamente a su capacidad de cumplir roles logico-expresivos, de los cuales los mas importantes son de ndole logica, lo que se espera de una `logica' deacionista es que provea un dispositivo que garantice esos roles, que permita expresar conjunciones (y disyunciones) posiblemente in nitas como aquellas enunciadas en el apartado 4.2.3.3, una reglamentacion (en el sentido de Quine) de un cierto fragmento del lenguaje coloquial que no debe necesariamente preservar todas las caracter sticas que el predicado de verdad posee en este lenguaje. Es completamente irrelevante si acaso la verdad es esencialmente desentrecomilladora o si los principios de transparencia jan el signi cado del predicado veritativo para la confeccion de una teor a o quasi logica de la verdad. De hecho, la segunda elucidacion pondra de mani esto que el Esquema-T no es estrictamente ni necesario ni su ciente, conclusion que extraigo en 5.2.3. En consecuencia, las paradojas semanticas no son razon su ciente para el abandono de la logica clasica, al menos desde un punto de vista de acionista.

5.2.1. Primer intento de elucidacion: mismas consecuencias

Halbach (1999) ofrece una respuesta a la primera de las tres interrogantes, la (a), esto es, propone un sentido en el cual un enunciado de la forma (5.1) es capaz de expresar la conjuncion in nita en (5.2), para luego evaluar si acaso las teor as de acionistas desentrecomilladoras son capaces de garantizar esta equivalencia. Para evitar los problemas provenientes de paradojas como el mentiroso, considera exclusivamente predicados '(v) y oraciones que no contienen el predicado veritativo T , y la teor a desentrecomilla-dora tb(th) formulada en L [fT g, donde th es (o contiene) una teor a de la sintaxis formulada en L, un lenguaje de primer orden que no contiene T .

Desde su punto de vista, enunciados de la forma (5.1) expresan la conjuncion in nita correspondiente en (5.2) en una teor a axiomatica de la verdad th^0 formulada sobre una teor a base th siempre y cuando la teor a base junto con los in nitos conyuntos de (5.2) tenga las mismas consecuencias que la teor a de la verdad junto con (5.1). Formalmente, sea th^0 th una teor a axiomatica de la verdad formulada en L [fT g.

De nicion 5.1 (Equivalencia entre generalizaciones y conjunciones in nitas segun Halbach). Una generalizacion de la forma 8x('(x) ! Tx), donde '(v) 2 L, es equivalente a la conjuncion in nita $\bigvee_{2L}$('(p q) !) en th^0 (formulada sobre la teor a base th L) de acuerdo con Halbach sii, para toda 2 L,

$$\text{th} + \text{f'(p q) !} \quad : \quad 2\ \text{Lg`} \quad , \text{th}^0 + 8\text{v('(v) ! Tv)`}$$

Luego, Halbach propone una solucion al problema del caracter externo de la equivalencia entre generalizaciones como (5.1) y sus correspondientes conjunciones in nitas en (5.2) reemplazando esta ultima por el conjunto de sus in nitos conyuntos.

A continuacion, Halbach muestra que, de acuerdo con la de nicion 5.1, la teor a desentrecomilladora tb(th) es su ciente para garantizar la equivalencia de generaliza-ciones dadas por (5.1) y las correspondientes conjunciones in nitas dadas por (5.2), si en '(v) y en T no ocurre.

Proposicion 5.2 (Halbach). Si '(v) 2 L, entonces, para toda oracion 2 L,[4]

$$\text{th} + \text{f'(p q) !} \quad : \quad 2\ \text{Lg`} \quad , \text{tb(th)} + 8\text{v('(v) ! Tv)`}$$

Halbach propone una interpretacion de este resultado en las siguientes l neas:

> I take the result to be an exact formulation of the disquotationalist [minimalista] claim that in nite conjunctions can be expressed in a language containing a truth predicate which is characterized by the Tarskian equivalences. The in nite set '(p q) ! of axioms replaces the in nite conjunction; the-refore it can be avoided in order to introduce a formal system for a language comprising in nite conjunctions. (Halbach, 1999, p. 14)

Si acaso todos los usos de enunciados de la forma (5.1) pueden ser explicados sobre la base de su equivalencia con (5.2) solo puede saberse si se tuviera una lista completa de estos usos; pero al menos puede verse claramente que los mas importantes quedan explicados: si th y th^0 son teor as axiomaticas clasicas, la nocion de consecuencia logica es efectiva (i.e., recursivamente axiomatizable), y se cumple la de nicion 5.1, generali-zaciones como (5.1) constituyen axiomatizaciones nitas del conjunto de conyuntos de (5.2).

No obstante, como respuesta razonable y satisfactoria a la pregunta (a), tiene un alcance limitado, en tanto se aplica exclusivamente a teor as axiomaticas de la verdad en el marco de la logica clasica. Asimismo, permite responder solo parcialmente a la

[4] ***Vease Halbach (1999) para una demostracion. Para evitar formulaciones engorrosas, supongo en esta seccion que*** ' 2 L ***signi ca que*** ' ***es una oracion de*** L.

pregunta (b): da unicamente condiciones su cientes para que una teor a de la verdad clasica garantice la equivalencia entre cierto tipo de generalizaciones y conjunciones in nitas correspondientes, pero no necesarias y debe, por ende, ser completada.

Lamentablemente, la de nicion 5.1 tiene, adicionalmente, consecuencias contra-intuitivas. Notese que, de acuerdo con ella, cualquier teor a de la verdad que permita expresar conjunciones in nitas debe ser conservativa sobre su teor a base. En otras pa-labras, si ' 2 L es una oracion y th^0 th implica ', entonces ' debe ser ya una consecuencia de la teor a base th. Si bien algunos autores han argumentado a favor de la conservatividad de toda teor a de acionista de la verdad, estas ideas enfrentan serias replicas (vease el apartado 4.3.3). Pero aun si toda teor a de acionista debiera efecti-vamente ser conservativa sobre su teor a base, esto no es algo que deba seguirse de un criterio para la expresabilidad de conjunciones in nitas.

En primer lugar, un buen criterio deber a ser aplicable tambien a teor as no de-acionistas o in acionarias de la verdad, para las cuales ningun argumento de conserva-tividad ha sido esbozado. Aquellos que no se identi can con el de acionismo no niegan necesariamente que la verdad cumple roles expresivos de ndole logica, sino que suelen sostener que el predicado veritativo no es meramente un dispositivo logico-ling•u stico. Luego, tiene sentido preguntarse tambien bajo que condiciones una teor a sustantivista de la verdad permite la expresion de conjunciones in nitas.

Segundo, y mas importantemente, si th^0 L[fT g es una teor a de la verdad que permite expresar conjunciones in nitas en L y th^{00} th^0, entonces intuitivamente th^{00} deber a habilitar tambien la expresion de conjunciones in nitas en L. No obstante, la de nicion 5.1 y el requisito de conservatividad que conlleva no lo permiten. Por ejemplo, considerese la teor a (tipeada) de la verdad ct(pa^+). Como indique en el apartado 2.3.3, tb(pa^+) ct(pa^+). De acuerdo con la proposicion 5.2, tb(pa^+) posibilita la expresion de conjunciones in nitas, mientras que ct(pa^+), al no ser conservativa sobre pa^+, no ser a capaz de hacerlo de acuerdo con la de nicion 5.1. Estas di cultades pueden supe-rarse reemplazando la ultima ocurrencia de `th' en la version extendida de la de nicion por `th^0'.

De nicion 5.3 (Equivalencia entre generalizaciones y conjunciones in nitas modi ca-da). Si '(v) 2 L, una generalizacion de la forma 8v('(v) ! T v) es equivalente a la conjuncion in nita 2L('(p q) !) en th de acuerdo con una version modi cada de Halbach sii th + V f '(p q) ! : 2 Lg y th + 8v('(v) ! Tv) tienen las mismas consecuencias en las cuales T no ocurre.

Pero nuevas di cultades emergen. Si bien esta de nicion no implica la conserva-tividad de la teor a de la verdad th sobre su teor a base, todav a es posible encontrar teor as th th^0 tales que th satisface el criterio pero th^0 no. Por ejemplo, las teor as pat + T-Out L$^+_{pa}$ y pat + T-Out L$^+_{pa}$ + :T p q (vease el apartado 1.2.4), donde T-Out es el principio

T p'q ! ' (T-Out)

T-Out L$^+_{pa}$ (que abrevio T-Out) es el principio dado por las instancias de T-Out generadas por oraciones de L$^+_{pa}$, una version tipeada de T-Out, y es una oracion de L$^+_{pa}$ tal que ni ella ni :P rov$_{pa^+}$ (p q) son teoremas de pat+ T-Out +fP rov$_{pa^+}$ (p q) ! : 2 L$^+_{pa}$g. Por un lado, pat+ T-Out satisface la de nicion 5.3.

Lema 5.4. Si pa$^+$ th L$^+_{pa}$, pat + th + T-Out es una extension conservativa de th.

Demostracion. Toda teor a clasica th contiene ya un predicado que satisface T-Out, i.e., la formula x 6= x. Luego, todo modelo de th puede ser expandido a un modelo de T-Out mas las nuevas instancias del axioma esquema de induccion dadas por formulas que contienen T simplemente interpretando el predicado veritativo con el conjunto que se utiliza para interpretar x 6= x, esto es, el conjunto vac o. □

Proposicion 5.5. Si '(v) 2 L$_{pa}^+$, entonces, para toda 2 L$_{pa}^+$,

pat + T-Out +f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g ` , pat + T-Out +8v('(v) ! Tv) `

Demostracion. Como pat+ T-Out tb(pa$^+$), la proposicion 5.2 implica que

pat + T-Out +8v('(v) ! Tv) ` ) tb(pa$^+$) + 8v('(v) ! Tv) `

) pa$^+$ + f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g `
) pat + T-Out +f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g `

Ademas, por el lema 5.4,

pat + T-Out +f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g ` ) pa$^+$ + f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g `

) pat + T-Out +8v('(v) ! Tv) `

porque solo un numero nito de oraciones en f'(p q) ! : 2 L$_{pa}^+$g pueden utilizarse en una prueba de y, claramente, todas ellas se siguen de 8v('(v) ! Tv) junto con las instancias relevantes de T-Out . □

Pero, por otro lado, T-Out +:T p q no satisface la de nicion 5.3, porque

T-Out +:T p q + 8x(Prov$_{pa^+}$ (x) ! Tx) ` :Prov$_{pa^+}$ (p q) mientras que, por hipotesis,

T-Out +:T p q + fP rov(p q) ! : 2 L$^{+}_{pag}$ 0 :Prov$_{pa+}$ (p q)

En consecuencia, hay dos caminos posibles: o bien rechazar la explicacion pro-puesta por Halbach en la de nicion 5.1 y en su version mejorada dada por la de nicion 5.3 del sentido en el cual una adscripcion general de la forma 8v('(v) ! Tv) puede ser equivalente a una conjuncion in nita por ser incorrectas; o bien concluir que las propie-dades inferenciales que hacen utiles a estas generalizaciones en el razonamiento diario no presuponen la equivalencia total entre las generalizaciones y las correspondientes con-junciones in nitas. Para clari car este dilema, propongo una segunda explicacion de la supuesta equivalencia entre generalizaciones y conjunciones in nitas, ahora en terminos de su comportamiento inferencial. El resultado no se aleja demasiado en esp ritu del analisis de Halbach, pero resalta un aspecto importante de la relacion entre una genera-lizacion y la conjuncion in nita a la cual es presuntamente equivalente y permite extraer conclusiones importantes.

5.2.2. Segundo intento de elucidacion: mismo comportamiento infe-rencial

El de acionismo sostiene que el predicado veritativo es un dispositivo quasi logico, com-parable con conectivas y operadores. El uso e incluso el signi cado de una conectiva es comunmente caracterizado por reglas de introduccion y eliminacion (vease el apartado 4.3.3). En el caso de las conjunciones posiblemente in nitas suele adoptarse las siguientes dos reglas:

f i I ' (I) V si i I (E)
i 'i
i : i 2 Ig V i2I ' i V
V 2 2

A continuacion examino cada regla por separado, comenzando por la regla de eliminacion.

5.2.2.1. La propiedad de eliminacion de la verdad

E permite inferir '(p q) ! a partir de V 2L('(p q) !). Como la generalizacion 8 v V('(v) ! Tv) es supuestamente equivalente a la conjuncion in nita, deber a ser posible, por analog a, inferir '(p q) ! a partir de ella, para todo . Dado lo poco controvertido

del caso, propongo este requisito como una primera condicion sobre la expresabilidad de conjunciones in nitas: T es capaz de expresar conjunciones in nitas en th LT (o cualquier lenguaje de primer orden que extienda LT) mediante expresiones de la forma
8v('(v) ! T v) solo si, para todo predicado '(v) y oracion de LT , la siguiente regla vale en th:

8v('(v) ! Tv)
'(p q) ! (ET 1)

A diferencia del apartado anterior, la atencion no esta restringida a oraciones que no contienen el predicado veritativo sino a cualesquiera enunciados del lenguaje de la teor a de la verdad th.

Asumiendo que la teor a de la verdad y su nocion de consecuencia logica subyacente son recursivamente axiomatizables, resulta evidente porque una teor a que satisfaga la condicion ET 1 es util en el razonamiento real o cotidiano: bajo condiciones m nimas |esto es, la transitividad de la relacion de consecuencia logica (vease el apartado 3.4)| ET 1 implica que, relativamente a la teor a de la verdad th, toda conjuncion in nita 2LT ('(p q) !) o, si se quiere, el conjunto de sus conyuntos f '(p q) ! : 2Lg V T , es reducible a o nitamente axiomatizable por la generalizacion correspondiente 8v('(v) ! Tv); si una oracion se sigue del conjunto in nito f'(p q) ! : 2 LT g, entonces tambien se sigue de 8v('(v) ! Tv).

Hasta ahora he hablado de la generalizacion 8v('(v) ! Tv) como expresando la conjuncion in nita V 2LT ('(p q) !), pero, como se~nale en el apartado 4.2.3.3, es igualmente posible las oraciones que son 's, i.e., de la conjuncion de todas las oraciones que satisfacen '(x). Desde este punto de vista, los principios que gobiernen el predicado veritativo de una teor a en la cual sea capaz de expresar conjunciones in nitas deber an permitir la derivacion de todas las 's a partir del supuesto de que todas las 's son verdaderas, provista una identi cacion de las 's |esto es, la generalizacion 8v('(v) ! Tv) debe `capturar' todas las 's. En efecto, si las reglas de introduccion

; '=) =' ! : (I!)

y eliminacion de condicional

' ! (E!)
'

|o metateorema de la deduccion y Modus Ponens, respectivamente| valen en th, la primera condicion es equivalente a la segunda condicion para la expresabilidad de conjunciones in nitas: T es capaz de expresar conjunciones in nitas en th mediante

expresiones de la forma 8v('(v) ! T v) solo si, para todo predicado '(v) y oracion de

LT , la siguiente regla vale en th:

$$\frac{8v('(v) ! Tv); '(p q)}{} \qquad \text{(ET 2)}$$

Antes que ET 1, es precisamente esta propiedad inferencial de la verdad lo que Horwich pretende enfatizar mediante el ejemplo de Oscar. Si se quiere a rmar una o varias oraciones a traves del predicado veritativo, la oracion que se utilice, que contiene este predicado, debe indefectiblemente implicar, relativamente a la teor a de la verdad en la que se est trabajando, por supuesto, todas las oraciones que originalmente se quer an aseverar; de otro modo la asercion yerra el objetivo. Si digo que todo lo que Lorna dijo es verdadero, deseo |provista una identi cacion de lo que Lorna dijo| poder derivar todas las sentencias que Lorna hizo. En palabras de Horwich (1998b, p. 124), \[the generalising] function of truth requires mereley that the generalisations permit us to derive the statements to be generalized [. . .]"

A rmar 8v('(v) ! Tv) implica un compromiso con todas las oraciones que satis-facen el predicado '. Supongase ahora que una de las 's es refutable. Luego, el enunciado que sostiene que todas las 's son verdaderas debe ser asimismo refutable. Por ejemplo, si una de las cosas que Lorna dijo es que es \2+2=5", la a rmacion de que todo lo que Lorna dijo es verdadera debe quedar refutada. Por ende, puede imponerse como una tercera condicion para la expresabilidad de conjunciones in nitas que la a rmacion de que todas las 's son verdaderas sea refutable en el caso en que una de las 's sea ella misma refutable, provisto que se la haya identi cado como una ', i.e: T es capaz de expresar conjunciones in nitas en th mediante expresiones de la forma 8v('(v) ! Tv) solo si, para todo predicado '(v) y oracion de LT , la siguiente regla vale en th:

$$\frac{'(p q); :}{:8v('(v) ! Tv)} \qquad \text{(ET 3)}$$

En un contexto clasico, este tercer requisito sobre la expresabilidad de conjuncio-nes in nitas del predicado de verdad es equivalente al segundo y al primero. No obstante, existen logicas no clasicas donde ese no es el caso; razon por la cual demando el cumpli-miento de las tres condiciones por separado. Juntas, estas tres condiciones expresan lo que denomino `propiedad de eliminacion' del predicado veritativo.

De nicion 5.6 (Propiedad de eliminacion). El predicado de verdad de una teor a th satisface la propiedad de eliminacion sii las reglas ET 1, ET 2 y ET 3 valen en th.

He indicado como traducir de alguna manera la regla de eliminacion de la conjuncion in nitaria E V al lenguaje de la verdad, lo cual da lugar a la propiedad de eliminacion del predicado veritativo. Antes de considerar las reglas de introduccion, examino brevemente las caracter sticas que una teor a de la verdad debe poseer para que su(s) predicado(s) de verdad tenga(n) la propiedad de eliminacion. La primera observacion es poco sorprendente.

Observacion 5.7. Si th es una teor a clasica de la verdad en la cual T-Out (o, equivalentemente, T-Elim) valen, el predicado de verdad de th tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Considerense las siguientes reglas:

Modus Tollens silogismo hipotetico

' ! (MT) ' !

'

!

' ! (SH)

introduccion de la conjuncion (en terminos de las conectivas reales de L_T , i.e., : y !)

'

:(' ! :) (I^)

eliminacion del universal

$$\frac{8v'}{'[t=v]} \quad (E8)$$

introduccion del existencial (en terminos de : y 8)

$$\frac{:'[t=v]}{:8v'} \quad (I9)$$

La siguiente derivacion constituye una prueba de ET 1:

1. 8v('(v) ! Tv)	premisa
2. '(p q) ! T p q	1, E8
3. T p q !	T-Out
4. '(p q) !	2, 3, SH

La siguiente derivacion prueba ET 2:

1.	8v('(v) ! T v)	premisa
2.	'(p q)	premisa
3.	'(p q) ! T p q	1, E8
4.	T p q	2, 3, E!
5.	T p q !	T-Out
6.		4, 5, E!

Por su parte, ET 3 puede obtenerse del siguiente modo:

1.	'(p q)	premisa
2.	:	premisa
3.	T p q !	T-Out
4.	:T p q	2, 3, MT
5.	:('(p q) ! T p q)	1, 4, I^
6.	:8v('(v) ! Tv)	5, I9

□

Luego, en contextos clasicos, T-Out o, equivalentemente, T-Elim, es su ciente para garantizar la propiedad de eliminacion. En contextos no clasicos esto puede variar.

Corolario 5.8. Si th es una teor a de la verdad en la cual valen T-Out, E!, MT, SH, I^, E8 y I9, el predicado de verdad de th tiene la propiedad de eliminacion.

Esta es una consecuencia directa de la prueba de la observacion anterior. Ahora bien, si en lugar de T-Out se cuenta con T-Elim en un contexto no clasico donde los principios no son necesariamente equivalentes, las reglas que se necesitan son otras. Considerese las siguientes metainferencias:

; 8v('(v) ! Tv); '=) ; 8v('(v) ! Tv)=' ! : (I!)

; '=) ; : =:': (contraposicion)

Observacion 5.9. Si th es una teor a de la verdad en la cual valen T-Elim, E!, I^, I! , contraposicion, E8 y I9, el predicado de verdad de th tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. La prueba de ET 2 es identica a la de la observacion 5.7. La siguiente es una derivacion de ET 1:

1.	8v('(v) ! T v)	premisa
2.	'(p q) ! T p q	1, E8
3.	'(p q)	supuesto
4.	T p q	2, 3, E!
5.		4, T-Elim
6.	'(p q) !	2-5, I!

La siguiente derivacion prueba ET 3:

1.	'(p q)	premisa
2.	:	premisa
4.	:T p q	2, T-Elim, contraposicion
5.	:('(p q) ! T p q)	1, 4, I^
6.	:8v('(v) ! Tv)	5, I9

□

Luego, T-Out o T-Elim son condiciones su cientes para que el predicado de verdad de una teor a tenga la propiedad de eliminacion provistas ciertas leyes logicas. De hecho, en la seccion 5.3 muestro que si estos requisitos no se cumplen, aun teor as que contienen T-Out o T-Elim e incluso principios de transparencia completos pueden no contener un predicado veritativo con la propiedad de eliminacion.

Por otro lado, es sencillo ver que bajo condiciones m nimas T-Elim |y, si la regla de introduccion del condicional vale, T-Out tambien| es una condicion necesaria practicamente en todo contexto.

Observacion 5.10. Sea th LT una teor a en la cual, en todos sus modelos, la relacion de identidad se comporte clasicamente,[5] las expresiones condicionales sean verdaderas si tanto el antecedente como el consecuente lo son o el primero obtiene un valor no designado, y los enunciados universales sean verdaderos cuando todas sus instancias lo sean. Si el predicado de verdad de th tiene la propiedad de eliminacion, T-Elim vale en th. Y si I! resulta valida, T-Out vale tambien.

Las condiciones impuestas sobre th son satisfechas en logica clasica pero tambien en muchas logicas no clasicas, como k3, lp, pl y st, aunque no por b3, que viola el segundo requisito impuesto sobre los condicionales (vease el cap tulo 3).

[5] ***Esto es,*** t = t ***obtiene el valor clasico designado*** (i.e.***,*** ***1) en todos los modelos de*** th***, y*** '(t) ***puede inferirse a partir de*** s = t ***y*** '(s)***, para cualquier formula*** '(x) ***y cualesquiera terminos*** s; t***.***

Demostracion. Sea M un modelo de th y sea T p q verdadera en M. Dadas las condiciones impuestas sobre la identidad, condicionales y enunciados universales, p q = p q y 8x(x = p q ! Tx) son verdaderas en M. Luego, por ET 2, es verdadera en M.[6] □

En consecuencia, bajo ciertas condiciones logicas, T-Elim y, en algunos casos tambien T-Out, es una condicion necesaria y su ciente para garantizar que el predicado de verdad tenga la propiedad de eliminacion.

5.2.2.2. La propiedad de introduccion de la verdad

Resta ahora estudiar la posibilidad de de nir, ademas de una propiedad de eliminacion, una propiedad razonable de introduccion del predicado veritativo que se corresponda con la regla de introduccion de la conjuncion in nita I^V. En ese caso podr a decirse que una teor a de la verdad permite la expresion de conjunciones in nitas siempre y cuando su predicado de verdad posea tanto la propiedad de eliminacion como la de introduccion.

Dada la regla de introduccion de la conjuncion in nita, se puede inferir

$$\bigwedge_{2L_T} '(p\ q)\ !$$

a partir de

$$f'(p\ q)\ ! \quad : \quad 2\ L_T\ g$$

De ella podr a extraerse una cuarta condicion para la expresabilidad de conjunciones in nitas: T es capaz de expresar conjunciones posiblemente in nitas en th mediante expresiones de la forma 8v('(v) ! Tv) solo si, para cualquier predicado '(v) 2 L_T , vale la siguiente regla:

$$\frac{f'(p\ q)\ ! \quad : \quad 2\ L_T\ g}{8v(Sent_{L_T}(v)\ \wedge\ '(v)\ !\ Tv)} \qquad (IT\ 1)$$

Notese que es preciso incorporar el predicado $Sent_{L_T}$ en la conclusion porque las premisas solo valen para oraciones de L_T . Si acaso algo que no (codi ca) es una oracion satisface ', no deber a concluirse a partir de f'(p q) ! : 2 L_T g que es verdadero. Esta inferencia podr a conformar la propiedad de introduccion del predicado veritativo.

De nicion 5.11 (Propiedad de introduccion). El predicado de verdad de una teor a th satisface la propiedad de introduccion sii la regla IT 1 vale en th.

[6] ***Notese que, como solo considero teor as formuladas en lenguajes de primer orden, la nocion de consecuencia logica subyacente es siempre efectiva y, por ende, los calculos correspondientes pueden ser y son completos.***

En consecuencia, podr a decirse, respondiendo a la pregunta (a) al comienzo de la seccion, que en una teor a de la verdad th expresiones de la forma 8v('(v) ! T v)

expresan conjunciones in nitas, que 8v('(v) ! T v) es equivalente a 2LT ('(p q) !

), si y solo si '(n) implica en th que $Sent_{LT}$ (n) para todo n 2 ! y T tiene en th tanto la propiedad de eliminacion como la de introduccion. Las siguientes observaciones son practicamente triviales.

Observacion 5.12. Si th es una teor a de la verdad en cuyos modelos un condicional verdadero con antecedente verdadero tiene consecuente asimismo verdadero y valen la regla de induccion in nita

$$\frac{f'(p\ q) :\ 2\ L_T\ g}{8v(Sent_{LT}\ (v)\ !\ '(v))} \qquad \text{(II)}$$

y o bien T-In, esto es, la direccion de derecha a izquierda del Esquema-T

$$!\ T\ p\ q \qquad \text{(T-In)}$$

o bien T-Intro, el predicado veritativo de th tiene la propiedad de introduccion.

Demostracion. Sea M un modelo de th donde todos los miembros de f'(p q) ! :

2 L_T g son verdaderos. Si '(p q) es tambien verdadera, por la condicion impuesta a los condicionales, lo es y, por T-In y nuevamente la condicion sobre los enunciados condicionales, o por T-Intro, T p q es verdadera en M. Una vez mas, por las condiciones sobre los condicionales, esto implica que '(p q) ! T p q. Luego, el conjunto f'(p q) !

T p q : 2 L_T g vale en M el cual, por la regla II, implica 8v($Sent_{LT}$ (v) ^ '(v) ! Tv). □

En consecuencia, provisto que se cumplan algunas propiedades logicas, T-In o T-Intro son principios su cientes para garantizar que el predicado de verdad tenga la propiedad de introduccion. La siguiente observacion muestra que bajo ciertas condicio-nes, T-In o T-Intro tambien son necesarios para esta tarea.

Observacion 5.13. Sea th una teor a de la verdad tal que, en todos sus modelos, la relacion de identidad se comporta clasicamente, los condicionales con antecedente verdadero tienen consecuente verdadero, y los enunciados universales son verdaderos solo si todas sus instancias lo son. Si el predicado de verdad de th tiene la propiedad de introduccion y $Sent_{LT}$ (v) representa el conjunto de oraciones de L_T en la teor a, T-Intro vale en th. Y si la regla I! resulta valida, T-In vale tambien.

Estas condiciones son satisfechas en logica clasica, pero tambien en k3, b3, lp, pl y st, entre otras.

Demostracion. Sea M un modelo de th en el cual ' es verdadera. Dadas las condiciones impuestas sobre la identidad y los condicionales, todos los miembros de fp'q = p q !

: 2 L_T g son verdaderos tambien. Luego, por la regla IT 1, 8v(Sent$_{LT}$ (v)^p'q = v ! Tv) es verdadera en M con lo cual, por las condiciones sobre enunciados universales, Sent$_{LT}$ (p'q) ^ p'q = p'q ! T p'q tambien lo es. Como Sent$_{LT}$ (p'q) ^ p'q = p'q es verdadera, T p q es asimismo verdadera en M. □

Luego, ahora se esta en condiciones de responder tambien a la pregunta (b) al comienzo de la seccion: bajo ciertas condiciones logicas (las hipotesis de las observaciones 5.9, 5.10, 5.12 y 5.13) las reglas T-Elim y T-Intro son tanto necesarias como su cientes para garantizar la equivalencia entre generalizaciones de la forma 8v('(v) ! Tv) y las

conjunciones in nitarias correspondientes $_{2LT}$ '(p q) ! porque, de acuerdo con la respuesta dada a la pregunta (a), para ello el predicado de verdad debe poseer las propiedades de eliminacion e introduccion que, por las observaciones 5.9, 5.10, 5.12 y 5.13 requieren e implican estas reglas bajo aquellas condiciones. Asimismo, bajo condiciones levemente diferentes, los principios T-Out y T-In son tambien necesarios y su cientes, como muestran las observaciones 5.8, 5.10, 5.12 y 5.13.

Naturalmente, no tiene sentido esperar que una regla como II ni una inferencia como IT 1 valgan en una teor a de la verdad de primer orden, nitaria, a menos que se trabaje con una teor a semantica dada por una familia de modelos en los cuales esta regla preserve verdad. Por tanto, tampoco es razonable esperar de teor as de la verdad no semanticas que provean predicados de verdad con la propiedad de introduccion.

Existe una inferencia similar a IT 1 pero mas debil, implicada por ella, que se puede enunciar sin recurrir a reglas in nitarias, i.e., una version restringida donde el conjunto de premisas es nito:

$$\frac{1; : : : ; \ n; \ 8v('(v) \ \$ \ \overset{W}{_{i\ n}} v = p \ _i q)}{8 \ v('(v) \ ! Tv)} \qquad \text{(IT 2)}$$

Supongase que el Papa dijo exactamente 1; : : : ; n. Luego, a partir de 1; : : : ; n podr a esperarse que en una teor a de la verdad se pueda derivar que todo lo que el Papa dijo es verdadero. Por supuesto, esto funciona exclusivamente en la medida en que ' se aplique solo a un numero nito de oraciones. Esta regla podr a constituir una propiedad de introduccion debil del predicado veritativo.

De nicion 5.14 (Propiedad de introduccion debil). El predicado de verdad de una teor a th satisface la propiedad de introduccion debil sii la regla IT 2 vale en th.

Tal vez sea mas razonable, como argumento en la seccion que sigue, no exigir la propiedad de introduccion a un predicado veritativo o, al menos, exigir esta version debilitada en su lugar. Las observaciones 5.12 y 5.13 pueden facilmente adaptarse a esta nueva propiedad.

Observacion 5.15. Si th es una teor a de la verdad en cuyos modelos la relacion de identidad se comporta clasicamente, un condicional verdadero con antecedente verdadero tiene consecuente asimismo verdadero y valen, o bien T-In o bien T-Intro, el predicado veritativo de th tiene la propiedad de introduccion debil.

Observacion 5.16. Sea th una teor a de la verdad tal que, en todos sus modelos, la relacion de identidad se comporta clasicamente, los condicionales con antecedente verdadero tienen consecuente verdadero, y los enunciados universales son verdaderos solo si todas sus instancias lo son. Si el predicado de verdad de th tiene la propiedad de introduccion debil, T-Intro vale en th. Y si la regla I! resulta valida, T-In vale tambien.

Luego, aun debilitando la propiedad de introduccion, principios como T-Intro y T-In siguen siendo necesarios y su cientes para garantizar esta propiedad al predicado de verdad, bajo ciertas condiciones logicas.

5.2.3. El costado util de las generalizaciones

En el apartado anterior he propuesto un sentido en el cual adscripciones generales de verdad de la forma 8v('(v) ! T v) pueden resultar equivalentes a las conjunciones in nitarias 2LT '(p q) ! , i.e., si se comportan del mismo modo desde un punto de vista V

predicado de verdad tiene las propiedades de eliminacion e introduccion.

Asimismo, he mostrado que si se cumple una serie de requisitos logicos, los principios T-Intro y T-Elim resultan tanto necesarios como su cientes para garantizar estas dos propiedades al predicado veritativo, y otro tanto vale para T-Out y T-In. En particular, ambos pares de principios son necesarios y su cientes para dar al predicado de verdad las propiedades de eliminacion e introduccion en el marco de la logica clasica.

Dado que T-Out y T-In tomados en conjunto son inconsistentes en el logica clasica mas cierta sintaxis debido al teorema de la inde nibilidad de la verdad de Tarski (teorema 2.9), no existe una teor a clasica de la verdad que satisfaga la equivalencia com-pleta entre generalizaciones de la forma 8v('(v) ! Tv) y las conjunciones in nitarias

2LT '(p q) ! . >Implica esto que el terreno de la logica clasica debe ser abandonado si se desea un predicado de verdad capaz de cumplir sus roles logico-expresivos? En este apartado argumento que la respuesta a esta pregunta es de nitivamente \No", porque la respuesta a la pregunta (c) a comienzos de la seccion es tambien negativa. La idea central es que las caracter sticas que tornan utiles a las generalizaciones de la forma 8v('(v) ! T v) en el discurso cient co y loso co quedan absolutamente garantizadas por la propiedad de eliminacion de la verdad. En otras palabras, T-Out o T-Elim son su-cientes para asegurar los usos del predicado veritativo que lo vuelven indispensable. Los principios que garantizan la equivalencia entre las generalizaciones y las conjunciones in nitarias, la equivalencia misma entre estos enunciados, no son necesarios para que el predicado de verdad pueda cumplir sus propositos logicos, como muestro a continuacion.

En efecto, una teor a cuyo predicado de verdad posee la propiedad de eliminacion permite ya la axiomatizabilidad nita de cualesquiera conjuntos de oraciones de nibles en el lenguaje de la teor a. La proposicion 5.2 de Halbach muestra que, relativamente a los bicondicionales tipeados que constituyen tb, las conjunciones in nitas y sus genera-lizaciones correspondientes son equivalentes con respecto a sus implicancias en las cuales T no ocurre. Pero notese que este resultado no depende de las instancias de T-Intro, T-In o de la propiedad de introduccion de la verdad en modo alguno. Sea L un lenguaje que no contiene T , th una teor a axiomatica formulada en L y th^0 th una teor a de la verdad expresada en L [fT g que contiene, como unicos axiomas, todas las instancias de T-Out dadas por oraciones de L. Supongase adicionalmente que ambas teor as son clasicas.

Proposicion 5.17. Si '(v) 2 L, entonces, para toda oracion 2 L,

th + f'(p q) ! : 2 Lg ` , th$^0$ + 8v('(v) ! Tv) `

Demostracion. Si 2 L es un teorema de th^0 + 8v('(v) ! Tv), entonces es tambien un teorema de tb(th)+8v('(v) ! Tv), porque th^0 tb(th). Luego, por la proposicion 5.2, th + f'(p q) ! : 2 Lg ` . A la inversa, si es un teorema de th + f'(p q) !
: 2 Lg, solo nitas de oraciones de f'(p q) ! : 2 Lg pueden haber sido utilizadas en la prueba. Todas ellas se siguen de 8v('(v) ! Tv) junto con las instancias relevantes de T-Out. □

Este resultado no se limita unicamente a `conjunciones in nitas' de oraciones del lenguaje de la teor a base, que no contienen T . La propiedad de eliminacion permite ya que oraciones de la forma 8v('(v) ! Tv) encapsulen todas las oraciones que caen bajo el predicado ', sean nitas o in nitas, contengan o no contengan T . >Cual ser a entonces la ventaja de contar con una teor a de la verdad cuyo predicado, adicionalmente, tenga la propiedad de introduccion? Suele argumentarse que la propiedad de introduccion garantiza que generalizaciones como no 8v('(v) ! Tv) impliquen nada mas all de las 's sino todas y precisamente aquellas oraciones que satisfacen este predicado. En otras palabras, permite justi car o explicar la generalizacion en base a las 's, porque, de acuerdo con IT 1, estas implican 8v('(v) ! T v).

Por ejemplo, Horwich, en su abordaje del problema de las paradojas, se~nala lo siguiente:

> [. . .] in so far as `p' is not invariably equivalent to `hpi is true', then a generalisation of the form `Every instance of schema S is true' will not invariably entail every instance of S; nor will it always be justi ed or explained on the basis of those sentences. (Horwich, 1998b, p. 42, nota 21)

Horwich menciona dos razones segun las cuales el Esquema T completo es necesario: por un lado, garantiza que la generalizacion \Todos los P s son verdaderos" implique todos los P s; por otro lado, permite justi car o explicar la generalizacion en base a los P s. La primera razon corresponde a la propiedad de eliminacion, para la cual se ha visto que, en contextos clasicos formales, T-Out es necesario y su ciente |i.e., la primera razon de Horwich justi ca la adopcion de unicamente una parte del Esquema T, su di-reccion de izquierda a derecha|. La segunda razon se corresponde con la propiedad de introduccion, y formalmente implica la necesidad de T-In, la parte faltante del Esquema T: de acuerdo con Horwich, al menos en un plano informal, T-In puede justi car o explicar generalizaciones de la forma 8v('(v) ! T v) sobre la base de las in nitas premisas del conjunto f'(p q) ! : 2 L_T g, como se vio en el apartado 4.3.4.

No obstante, dos cosas. Primero, queda claro en virtud de la proposicion 5.17 que en el plano formal, cuando se restringe la atencion a oraciones en las cuales el predicado de verdad no ocurre, la propiedad de eliminacion es su ciente, no solo para que expresiones de la forma 8v('(v) ! Tv) encapsulen todas las 's sino tambien para garantizar que sus consecuencias no vayan mas all de las 's, i.e., la propiedad de eliminatividad es su ciente para asegurar que el predicado veritativo sea un dispositivo de axiomatizabilidad nita.

En segundo lugar, si esta restriccion a oraciones del lenguaje sin T se abandona, el unico modo de garantizar que 8v('(v) ! Tv) no implique nada mas all del conjunto de enunciados que satisfacen ' o, equivalentemente, del conjunto de todas las instancias de '(p q) ! , la unica manera de que estos conjuntos expliquen o justi quen la adscripcion general de verdad en cuestion, es mostrado que ellos mismos implican la generalizacion 8v('(v) ! Tv), relativamente por supuesto a la teor a de la verdad en la cual se trabaja. Pero esto solo es posible en la medida en que, o bien se cuente con una regla in nitaria como II, esto es, se trabaje con una teor a semantica de la verdad, o bien el conjunto de oraciones que caen bajo ' sea nito, en cuyo caso se estar a aplicando la regla IT 2 (o bien en la teor a ya un numero nito de las 's implique la generalizacion en cuestion, lo cual ser a fortuito y, en una teor a de la verdad consistente, un fenomeno particular de algunas generalizaciones y sus instancias).

En un sentido informal, la propiedad de introduccion de la verdad provee efectivamente una justi cacion de las generalizaciones a partir de sus instancias in nitas como quiere Horwich, pero formalmente no hace ningun trabajo en estos casos, a menos que se trabaje con una familia acotada de modelos, en los cuales valga una regla de induccion in nita. Sin embargo, queda claro que ninguna axiomatizacion de esta teor a semantica ser a capaz de capturar esta justi cacion de las adscripciones generales de verdad a partir de sus instancias, lo cual pone seriamente en duda su viabilidad y su utilidad.

En consecuencia, en el plano formal la utilidad de la propiedad de introduccion se reduce a la justi cacion o explicacion de conjunciones nitas.[7] Sin embargo, notese que las generalizaciones empleadas en reemplazar conjunciones nitas son en principio dispensables |es posible utilizar la conjuncion nita misma en su lugar|. Desde un punto de vista formal, el uso mas importante de una adscripcion general de verdad de la forma 8v('(v) ! T v) es la axiomatizabilidad nita o expresion de un conjunto in nito de oraciones, aunque en la practica con frecuencia se utilizan tambien generalizaciones nitas. En el marco de teor as cient cas o loso cas formales, esto es, al dar una quasi logica de la verdad, estos usos no son razon su ciente para debilitar la logica clasica.

Aun mas, tiene poco sentido incorporar principios (como T-Intro o T-In) a una teor a (de la verdad) para asegurarse de que ciertas oraciones (en este caso las generalizaciones de la forma 8v('(v) ! T v)) no impliquen lo que no deben (algo mas que las 's). Si ya lo hac an, agregar nuevos principios no va a bloquear la inferencia; y si no implicaban enunciados indeseados, entonces no hay razon para agregar los nuevos principios. El unico objetivo razonable ser a que la incorporacion de los nuevos principios agregue poder inferencial a aquello que debe ser implicado. En este caso, T-Intro o T-In no estar an quitando poder deductivo a 8v('(v) ! T v) sino agregandoselo a los miembros del conjunto f'(p q) ! : 2 LT g, para que estos puedan implicar la generalizacion. Pero no lo logran, porque en cualquier axiomatizacion consistente de la teor a fallar la regla in nitaria II, que solo puede valer en abordajes semanticos.

>Para que tomarse el trabajo entonces de incluir principios como T-In o T-Intro para obtener la propiedad de introduccion de la verdad? La propiedad de eliminacion es su ciente para garantizar los usos logicos del predicado veritativo, esto es, posibilitar

[7] ***Si bien aun cuando*** ' ***es un predicado que se aplica exclusivamente a un numero nito de oraciones,*** 8v('(v) ! T v) ***puede entenderse como la conjuncion in nita de todas las oraciones de la forma*** '(p q) ! ***, a diferencia de los casos en los cuales*** ' ***se aplica a in nitas expresiones, esta generalizacion es siempre equivalente a la conjuncion*** nita ***de las*** '***s, como ya mencion .***

que generalizaciones de la forma 8v('(v) ! T v) encapsulen las posiblemente in nitas oraciones que satisfacen ' y `nada mas', porque, como se~nale, de garantizar algo, la propiedad de introduccion solo servir a para los casos menos interesantes, i.e., los casos nitos.

Asimismo, al implicar T-Elim, la propiedad de eliminacion garantiza, en primer lugar, que oraciones de la forma T p'q, donde ' es una oracion, impliquen '. Segundo, enunciados de la forma T t, donde t es un termino cerrado de L_T que no es un numeral y denota una oracion ', i.e. t es un nombre no transparente de ', tambien implican ', as como, tercero, aquellas adscripciones 8v('(v) ! T v) donde ' es satisfecha por un unico, varios o in nitos enunciados implican estos enunciados. Luego, la propiedad de eliminacion cubre todos los usos del predicado veritativo mencionados en el apartado 4.2.3 (con excepcion de la expresion de oraciones en otros lenguajes, porque solo se esta trabajando ac con codi caciones del mismo L_T), no solo los usos logicos.

Consecuentemente, es su ciente debilitar el Esquema-T, tomar unicamente su direccion de izquierda a derecha, esto es, T-Out, para reconstruir el rol logico-expresivo del predicado veritativo. Siendo T-Out no solo consistente sino conservativo sobre pat, es perfectamente posible permanecer dentro de los l mites de la logica clasica y capturar, a la vez, todo lo expresivamente util del predicado de verdad. Esto es contrario, no solo a lo que cree buena parte del de acionismo, que ha abandonado al logica clasica con el objetivo preciso de garantizar los roles logico-expresivos de la verdad, sino tambien a lo que considera Horwich (1998b, p. 42, nota 21), de acuerdo con quien \the need to restrict instantiation of the [Esquema-T] is somewhat in tension with the minimalist thesis about the function of our concept of truth|namely that it enables us to capture schematic generalisations."

Sin embargo, quizas haya otros casos en los cuales la propiedad de introduc-cion o la equivalencia completa entre las adscripciones generales de verdad de la forma 8v('(v) ! T v) y las correspondientes conjunciones in nitarias resulten utiles. Considerese el siguiente escenario planteado por Field (2008, p. 210). Supongase que no recuerdo exactamente lo que Lorna dijo, pero quiero a rmar que eso que dijo implica cierta proposicion . Luego, podr a decir

$$8x('(x) ! T x) ! \qquad (5.3)$$

donde '(x) se aplica unicamente a lo que dijo Lorna. Relativamente a la suposicion de que las aserciones de Lorna fueron $_1; : : : ; _n$, ser a deseable entonces que su conjuncion implicara o, si se quiere, que (5.3) implicara

$$_1 \wedge \quad \wedge _n ! \qquad (5.4)$$

Field usa este ejemplo como un argumento en contra de las teor as de la verdad clasicas .

Se~nala que, para poder derivar (5.4) a partir de (5.3), ¡ y T p q¡ deben ser intersustituibles, lo cual no puede ocurrir en ninguna teor a consistente clasica (para toda).

Una vez mas, podr a descartar este argumento se~nalando que en este tipo de casos no se esta haciendo un uso logico del predicado veritativo sino meramente epistemico y que, por tanto, en contextos formales es enteramente dispensable: el predicado veritativo se aplica ac unicamente a un numero nito de oraciones y, por ende, puede reemplazarse por la mera conjuncion de aquellas.

No obstante, pueden proponerse otros casos analogos donde T-In parece necesaria y donde s se esta haciendo uso logico del predicado veritativo. El siguiente me ha sido sugerido por Halbach. En epistemolog a suelen recurrirse al predicado de verdad para formular de niciones de conocimiento de modo no esquematico, como se~nale en el apartado 4.2.3.3. Se dice de un agente que conoce un enunciado siempre y cuando lo crea, est justi cado en creerlo y, adicionalmente, el enunciado sea verdadero (y algunas condiciones de Gettier sean satisfechas). Formalmente, se dice

$$8x(K(a; x) \$ C(a; x) \wedge Tx) \quad (5.5)$$

en lugar de las in nitas instancias del siguiente esquema:

$$K(a; p\ q) \$ C(a; p\ q) \wedge \quad (5.6)$$

donde C(x; a) resume todas las condiciones para el conocimiento excepto la verdad. Supongase ahora que hay un agente a y una oracion ' tales que C(a; p q) ^ . Ser a claramente deseable poder concluir, a partir de (5.5), que a conoce , pero esto no es posible sin la instancia correspondiente de T-In.

Sin embargo, esto no representa mayor problema. Una teor a de la verdad cuyo predicado veritativo cuenta con la propiedad de eliminacion es capaz todav a de dar una formulacion nita, no esquematica, de conocimiento, que abarque todas las instancias de (5.6), y derivar que un agente conoce una oracion a partir de C(a; p q)^ si, en lugar de de nir conocimiento mediante (5.5), lo hace a traves de

$$8x('(a; x) ! Tx)$$

donde '(a; x) es verdadera exactamente de todas las instancias de (5.6).

Concedo que esta formulacion alternativa de conocimiento tiene sus inconvenientes: el predicado K ya no es eliminable y la de nicion no satisface el requisito de conservatividad, principalmente porque ya no es una de nicion expl cita. Sin embargo, estos parecen solo males menores si se los compara con el abandono de la logica clasica (en casos en los cuales la unica razon que se tiene para abandonarla es evitar las paradojas semanticas) y, aun mas, la introduccion de un predicado de verdad no clasico en la de- nicion de conocimiento. La no clasicalidad de la verdad es contagiosa; inevitablemente se transmitir a a la nocion de conocimiento, lo cual no es evidentemente deseable.

Este no es un caso aislado, sino que pueden plantearse muchos otros ejemplos por el estilo. En general, debe tenerse en cuenta lo siguiente. Si se quiere expresar una `conjuncion in nita' de oraciones en una teor a de la verdad cuyo predicado posea la propiedad de eliminacion, basta con recurrir a oraciones de la forma 8v('(v) ! T v), donde ' se aplica precisamente a las in nitas oraciones cuyo contenido de quiere expresar. El predicado de verdad de una teor a no transparente pero eliminativa de la verdad no es capaz, dada cualquier oracion ' en la cual ocurre como suboracion, de expresar la conjuncion in nita de todas las instancias de '[=] dadas por cada una de las oraciones del lenguaje generalizando sobre , esto es, reemplazandola por Tv y cuanti cando sobre v para obtener 8v', sino que debe primeramente encontrar un predicado que se aplique a todas las instancias de '[=] para luego expresar 8v((v) ! Tv).

Esto permite tambien dar cuenta del caso anterior, donde quiero derivar a partir de lo que Lorna dijo. En lugar de (5.3), se puede utilizar

8x((x) ! Tx) (5.7)

donde se aplica a la oracion que se obtiene al concatenar la conjuncion de 1; : : : ; n, i.e., lo que dijo Lorna, con la expresion \! ".[8] Luego, en cualquier teor a cuyo predi- cado de verdad tenga la propiedad de eliminacion, (5.4) es derivable a partir de (5.7) y el supuesto de que se aplica exactamente a 1; : : : ; n.

La sugerencia de adoptar una formalizacion que impone modi caciones drasticas a la forma logica original de expresiones como \Si lo que dijo Lorna es verdadero entonces A" o la de nicion coloquial de conocimiento puede resultar levemente ad hoc. Sin embargo, debe entenderse simplemente como una nueva regimentacion. Del mismo modo en que la conjuncion debe necesariamente cambiar de lugar al formalizar expresiones como \Lorna y Nixon votaron a Cristina", el predicado de verdad debe hacerlo en otras. En ultima instancia, parecer a que los bene cios de esta regimentacion superan ampliamente sus costos: entrometerse con la logica clasica.

§

[8] *Esto es, (x) := (x = (p 1q^. : : : ^.p nq!.p q)).*

He comenzado esta seccion con tres preguntas vitales para el de acionismo y cualquiera que desee una `logica' de la verdad que garantice los roles logico -expresivos del predicado veritativo y, principalmente, sus usos logicos . La primera pregunta fue, por ende, (a) en que sentido puede decirse que generalizaciones de la forma 8v('(v) ! T v) son equivalentes a la conjuncion in nitaria V 2LT ('(p q) !), para lo cual he explorado dos caminos. Mientras que la primera propuesta no resulto adecuada, la segunda s : la equivalencia entre generalizaciones y conjunciones in nitas esta dada en funcion de su comportamiento inferencial. El de las conjunciones in nitas consiste de dos reglas: de eliminacion y de introduccion, que encuentran sus analogas en el plano de las generalizaciones en las propiedades de eliminacion e introduccion de la verdad, respectivamente. Estas, en logica clasica y en otras logicas tambien, se corresponden de alguna manera con los principios T-Out y T-In o, alternativamente, T-Intro y T-Elim, lo cual responde la pregunta (b), esto es, que principios para regular el comportamiento del predicado veritativo son necesarios y su cientes para asegurar la equivalencia de generalizaciones y conjunciones in nitarias.

Quedo claro |espero| que la propiedad de introduccion y, con ella, T-In y T-Intro, para cumplir la funcion deseada de justi cacion o explicacion, requiere del auxilio de reglas de induccion in nita, que no estan disponibles en las logicas mas comunmente utilizadas, esto es, las logicas nitarias. No obstante, mostre que esto no es realmente un problema, que los usos logicos del predicado de verdad quedan ya garantizados por la propiedad de eliminacion. En otras palabras, solo se necesita una parte de los principios de transparencia para garantizar estos usos, T-Out o T-Elim y, por ende, todo esto es posible en el marco de la logica clasica, lo cual responde a la pregunta (c).

5.3. Como debe lucir una teor a de acionista de la verdad

Basandome en los resultados obtenidos e ideas defendidas a lo largo del cap tulo, en esta seccion enumero las una serie de requisitos que, sostengo, toda teor a de acionista de la verdad debe satisfacer y exploro diversos sistemas ya existentes a la luz de estos requisitos.

En virtud de la seccion anterior estoy en condiciones de a rmar que una teor a de la verdad de acionista decente debe proveer un predicado de verdad que tenga la propiedad de eliminacion, esto es, debe ser una teor a, no necesariamente transparente, pero s eliminativista de la verdad. Pero, si bien bajo ciertas condiciones logicas m nimas T-Out o T-Elim son su cientes para garantizar la propiedad de eliminacion, esto no implica que la teor a cuyos unicos principios para el gobierno del predicado de verdad sean estos sea una teor a deseable o adecuada de la verdad.

Por ejemplo, podr a resultar conveniente contar con principios generales correctos, versiones formales de algunos de los principios examinados en el apartado 4.3.4, o ciertas instancias inofensivas de T-In o T-Intro, por diversas razones, como nes descriptivos o la posibilidad de no solo expresar sino tambien probar ciertas generalizaciones. En la medida en que estos principios se desprendan de alguna manera de los principios o subprincipios (partes) de transparencia que se adopten la posicion de acionista no se vera afectada.

Como sucede con otros operadores logicos, como el cuanti cador universal o la negacion, se espera de una logica que los contenga que pruebe todos los principios y valide todas las reglas correctas con respecto a estos operadores, i.e., que la logica sea completa, aunque este no es un requisito decisivo. Analogamente, podr a quererse que la teor a de la verdad que se adopte sea completa con respecto al predicado veritativo, que sea capaz de derivar todos los principios correctos que ata~nen al signi cado de la verdad. Naturalmente, esto dependera de que principios se consideren correctos y cuales no. Pero, por otro lado, dado que la verdad no es un predicado puramente logico sino logico-ling•u stico o, lo que es lo mismo, logico-matematico (vease el apartado 4.3.3),

> [i]t may be too much to ask of any theory of truth to completely capture the meaning of the concept of truth. After all, axiomatic theories of truth would appear to be on a par with axiomatic theories of other concepts. (Horsten, 2011, p. 62)

Por otro lado, tambien podr a resultar deseable que la teor a de la verdad pruebe al menos algunos principios generales verdaderos que relacionen el predicado de verdad con otras conectivas, como, por ejemplo, si se trabaja en logica clasica, la formula

$$8x(9y(\mathrm{Sent}_{L_T}(y) \wedge x = (y!.y)) ! T x)$$

que establece que todas las oraciones de la forma ' ! ' son verdaderas. Para ello es preciso contar con principios generales sobre la verdad en la teor a.

Finalmente, podr a ser conveniente contar con al menos ciertas instancias de T-In o T-Intro |v.g., las instancias que no contienen T , las fundadas en el sentido de Kripke o Leitgeb (veanse los apartados 3.1 y 3.2), las T -positivas (de nicion 3.18), etc.| para poder derivar una generalizacion de la forma 8v('(v) ! T v) de las 's en los casos en los cuales estas sean nitas, incluso en una teor a clasica de la verdad.

Por todo lo dicho, una buena teor a de la verdad de acionista debe

(1) validar los principios necesarios para garantizar los usos logicos del predicado de ver-dad, su unica razon de ser; i.e., debe ser otorgar al predicado veritativo la propiedad de eliminacion;

(2) validar principios para el predicado veritativo que no excedan los principios de trans-parencia, porque de lo contrario la tesis segun la cual el estos principios capturan el signi cado de la verdad ser a falsa; y, por ultimo,

(3) poder ser efectivamente utilizada como una logica, i.e., contar al menos con una axiomatizacion parcial que garantice los usos logicos de la verdad.

Notese que estas condiciones excluyen la teor a trivial en tanto esta exceder a la funcion basica de la verdad, aunque estas nociones son informales. Con respecto a que constituye una axiomatizacion parcial, tampoco esta demasiado claro, como eviden-cian Fischer et al. (2015), pero basta con que haya, y los hay, casos claros positivos, como kf con respecto a la clausura de los modelos de punto jo de Kripke con Strong Kleene (vease el apartado 3.1), y casos claros negativos, como putb con respecto a esta misma familia de modelos, por ser demasiado incompleta.

A continuacion evaluo, a la luz de estas condiciones, las teor as formales de la verdad introducidas en los cap tulos 2 y 3. Primero presento y examino brevemente el proyecto minimalista de Horwich y algunas teor as que podr an en principio considerarse realizaciones del proyecto, como las teor as axiomaticas de Tarski, putb y la teor a de la verdad d-fundada de Leitgeb. En 5.3.2 examino las teor as de la verdad de Kripke y su axiomatizacion mas conocida, kf. 5.3.3 se ocupa de las teor as composicionales axiomaticas ct(pa^{+}), rt$_{<0}$ y fs mientras que 5.3.4 estudia las teor as paraconsistentes lptt, pltt y sttt. Por supuesto, es tambien interesante evaluar la adecuacion de otras teor as de formales de la verdad segun las condiciones (1)-(3), pero me llevar a demasiado lejos.

5.3.1. El proyecto minimalista de Horwich

De acuerdo con Horwich, el predicado veritativo requiere del Esquema-T completo, no tipeado, para garantizar de modo absoluto sus usos logicos. Siendo esto imposible, opta por la mutilacion de este principio, en la menor medida posible. El siguiente es el locus classicus:

> Given our purposes, it su ces for us to concede that certain instances of the equivalence [T-]schema are not to be included as axioms of the minimal theory, and to note that the principles governing our selection of excluded

> instances are, in order of priority: (a) that the minimal theory not engender `liar-type' contradictions; (b) that the set of excluded instances be as small as possible; and|perhaps just as important as (b)|(c) that there be a constructive speci cation of the excluded instances that is as simple as possible. (Horwich, 1998b, p. 42)

La busqueda de teor as formales de la verdad con estas condiciones es lo que de-nomino `proyecto minimalista'. Horwich busca entonces una teor a desentrecomilladora (dada por instancias del Esquema-T) clasica de la verdad que sea (a) consistente, (b) abarcativa (i.e., lo menos tipeada posible) y (c) cuyo criterio de seleccion de instancias sea `simple y constructivo'. Las razones por las cuales la teor a debe ser desentrecomilla-dora y no estar dada, por ejemplo, tambien por principios generales son, posiblemente, que Horwich advirtio solo posteriormente, en (2005), que estos principios no exceden el Esquema T porque pueden ser, si bien no derivados, explicados por este, como indique en el apartado 4.3.4. Desde un punto de vista de acionista, no es necesario que el sistema formal que se adopte sea desentrecomillador; la busqueda de acionista no se enmarca necesariamente en el proyecto minimalista.

El punto mas oscuro de esta cita es obviamente (c). >Que quiere decir Horwich con `constructivo' y `simple' ? Por un lado, la simpleza o constructividad del criterio de seleccion puede entenderse como un requisito de axiomatizabilidad. Si el conjunto de instancias aceptables es semirecursivo, la teor a dada por estos axiomas es una teor a axiomatizable. Entendido as , (c) ser a semejante a (3), aunque un poco mas exigente. La axiomatizabilidad completa o completitud podr a resultar un requisito demasiado ambicioso, que no suele pedirse, v.g., de la aritmetica, como se~nale al comienzo de es-ta seccion. Podr a bastar, por ejemplo, con que el criterio de restriccion de instancias del Esquema-T sea lo su cientemente simple como para ser de nible en L^{+}_{pa}, v.g., me-diante un predicado (v) (veanse los apartados 1.2.1 y 1.2.2), para poder ofrecer una axiomatizacion parcial razonable del conjunto correspondiente de instancias en terminos de

(') ! (T p'q $ ')

Por otro lado, podr an leerse las palabras `constructivo' y `simple' en la l nea de Michael Glanzberg (2003, 2005). Desde su punto de vista, el criterio de restriccion de instancias del Esquema-T que una teor a minimalista adopte no puede estar dado en terminos de propiedades sustantivas, como la fundacion (grounding) o la representacio-nalidad (expresar proposiciones).

> A minimalist approach, however re ned, is committed to there being nothing but overt surface properties that determine whether something is a

> truth bearer or not. For there to be anything else would eo ipso provide an `underlying nature' of truth. This would make truth `substantial' in just the way the minimalist says it is not. (Glanzberg, 2003, p. 31)

Quizas un modo de entender esta idea |caritativo desde el punto de vista de-acionista| es sosteniendo que la restriccion de las oraciones portadoras de verdad mediante cierta propiedad sustantiva ser a una manera de exceder la funcion basica de la verdad y violar, en consecuencia, la condicion (2) que he impuesto sobre las teor as de acionistas formales al comienzo de la seccion, aunque no es claro que se entiende por `propiedades sustantivas'. Dado que el de acionismo, al menos en el ambito formal, ya permite ciertas restricciones a los objetos que pueden caer bajo el predicado veritativo, esto es, las oraciones, y estas restricciones son sintacticas o, equivalentemente, aritmeti-cas, las restricciones sintactico-aritmeticas parecen ser seguras, y quizas aquellas que las excedan, como la fundacion, puedan considerarse sustantivas, porque no son de nibles en la teor a de la sintaxis, i.e., pa^{+}, sino solo en lenguajes de segundo orden.

Concediendo que Glanzberg est en lo cierto, que relativizar el Esquema-T u otros principios para la verdad a propiedades que exceden la sintaxis est vedado al de acionismo, la siguiente cita de Horwich parece socavar la posibilidad de que fuera esto lo que ten a en mente cuando escribio su condicion (c).

> The intuitive idea is that an instance of the equivalence [T-]schema will be acceptable, even if it governs a proposition concerning truth (e.g. \What John said is true"), as long as that proposition (or its negation) is grounded|i.e. is entailed either by the non-truth-theoretic facts, or by those facts together with whichever truth-theoretic facts are `immediately' entailed by them (via the already legitimized instances of the equivalence schema), or . . . and so on. (Horwich, 2005, p. 81)

Desafortunadamente, esta cita no solo vuelve dudosa la lectura de la condicion (c) en terminos de Glanzberg sino tambien la lectura previa, en terminos de axiomatizabili-dad o de nibilidad. Porque tan solo para las oraciones de L^{+}_{pa} el conjunto de `non-truth theoretic facts' o hechos no semanticos |i.e., el conjunto de oraciones de L^{+}_{pa} verdaderas en N^{+}| ya es lo su cientemente complejo como para ser expresable en un lenguaje de primer orden y, a fortiori, en L^{+}_{pa}. Parece que Horwich simplemente no estaba al tanto de estas complicaciones, ni tampoco de la tension entre la condicion (c) bajo alguna interpretacion plausible y la condicion (b), como se vera a continuacion.

En efecto, tomar la mayor cantidad posible de instancias del Esquema-T sin caer en inconsistencias lleva a considerar conjuntos maximales consistentes de estas instan-cias. Como muestra el teorema de McGee (teorema 3.25), no solo hay una in nidad de tales conjuntos, cada uno de los cuales toma decisiones sobre la verdad o falsedad de las oraciones indecidibles de L_T (vease el apartado 3.2), sino que todos ellos son altamente complejos: ninguno es de nible en pa^{+}, porque cada uno contiene todas las oraciones verdaderas en un modelo de L^{+}_{pa}, lo cual es imposible por el primer resultado de incom-pletitud de G•odel (teorema 1.12). Aun mas, Cezary Cieslinski (2007) ha mostrado un resultado analogo al de McGee para conjuntos maximales conservativos de instancias del Esquema-T. El teorema de McGee no solo muestra que la condicion (b) de Horwich sobre un criterio de seleccion de instancias del Esquema-T entra en una tension irresolu-ble con la condicion (c) y debe, por ende, ser debilitada, sino que tambien apunta hacia una cuarta condicion o condicion (d) para el proyecto minimalista, i.e., que el criterio que se adopte sea plausible, no arbitrario sino explicativo.

Como se~nala Halbach (2009, p. 787), \it has proved di cult to nd a sensible restriction on instances of the T-schema that is more liberal than Tarski's and that avoids awkward consequences and that is not too arti cial." Pero si bien no hay una teor a hasta el momento que satisfaga concluyentemente todos los requisitos del proyecto minimalista, con o sin la condicion (d), diversas teor as desentrecomilladoras de la verdad disponibles podr an ser buenas candidatas al proyecto minimalista, algunas mejores que otras. Por ejemplo, tb(th) o utb(th) (vease el apartado 2.3.3) son consistentes y su criterio de restriccion es simple, incluso recursivo (no contener T) y plausible, en tanto fue fundamentado loso camente por Russell y Tarski. Pero, por otro lado, el criterio es demasiado restrictivo, y es posible transcenderlo en diversas direcciones.

Por su parte, el modelo de Leitgeb en donde las instancias del Esquema-T quedan restringidas a oraciones fundadas de acuerdo con su nocion de dependencia, esto es, $hN^{+}; _{pf}$ i (cf. teorema 3.35), es una direccion posible. Las instancias son obviamente consistentes y el criterio es sumamente abarcativo y plausible. Todav a mas, los teoremas 3.36 y 3.37 muestran que es posible permitir aun mas instancias del Esquema-T sin caer en !-inconsistencias (cf. de nicion 1.2). Sin embargo, no se cumple la condicion (c): como mencion al nal del apartado 3.2, la nocion de d-fundacion de Leitgeb (de nicion 3.34) es demasiado compleja, plausiblemente sustantiva, ya que no puede ser de nida por una formula de un lenguaje de primer orden.[9]

Finalmente, putb es tambien consistente, incluye una buena cantidad de instan-cias del Esquema-T, lo cual queda evidenciado por su poder de prueba (cf. teorema 3.23) y el criterio de restriccion, la T -positividad, es tan simple como recursivo (de -nicion 3.18). No obstante, la T -positividad es un criterio sumamente arbitrario, poco explicativo y radical. Muchas oraciones que no son T -positivas parecen ser inocuas qua

[9] ***Ademas, al no estar dada por axiomas sino por un modelo no queda claro en que sentido la teor a semantica de Leitgeb es una teor a desentrecomilladora.***

instancias del Esquema-T desde todo punto de vista, como :T p0 = 0q. Por otro lado, putb permite instancias que no parecen del todo deseables. Por ejemplo, volviendo al ciclo de mentirosos del cap tulo 3,

$$q^{+} ` l_1 = pT\, l_2 q \wedge l_2 = p{:}T\, l_1 q$$

como T l_2 es T -positiva, hay una instancia correspondiente del Esquema-T en putb para ella, pero no para :T l_1. Luego, putb decide arbitrariamente entre ciertas oraciones que contienen T , del mismo modo que los conjuntos maximales consistentes de McGee. Otro ejemplo esta dado por T l, donde l denota la oracion del mentiroso:

$$q^{+} ` l = p{:}T\, lq$$

T ocurre solo positivamente en T l y, por ende, hay una instancia del Esquema-T asociada a esta oracion en la teor a. Un tercer caso esta dado por el una version mas debil del mentiroso.[10] Sea l^0 el termino que se obtiene al aplicar el lema diagonal fuerte (teorema 1.8) a T :.v. Luego,

$$q^{+} ` l^0 = T\, p{:}\,.\,l^0 q \tag{5.8}$$

Nuevamente T :.l^0 es T -positiva, genera una instancia del Esquema-T en putb.[11]

Desde el punto de vista de las condiciones (1)-(3), ninguna de estas teor as resulta adecuada. El siguiente resultado es evidente.

Proposicion 5.18. Los predicados de verdad de las teor as tb(pa$^+$), utb(pa$^+$) y putb no tienen la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Siendo teor as clasicas, por la observacion 5.10, si sus predicados de verdad tuvieran la propiedad de eliminacion, todas las instancias de T-Out dadas por oraciones de L_T podr an derivarse como teoremas. Pero este no es el caso porque, por ejemplo, ninguna de estas teor as prueba T l ! :T l, la instancia de T-Out para la oracion :T l del mentiroso, ya que esta contiene T y no es T -positiva. □

De hecho, es claro que toda teor a axiomatica de la verdad que restrinja el Esquema-T a un subconjunto propio de oraciones no validar todas las instancias de T-Out y, por tanto, no sera una teor a eliminativa. De acuerdo con Horwich, si la teor a es lo su cientemente abarcativa, esto es, si la condicion (b) se cumple en buena medida, \such problematic cases are few and far between; so the utility of truth as a device of

[10] *En realidad,* T :.l^0 ***es una version formal del mentiroso tradicional, la oracion que dice de s misma que es falsa, mientras que*** :T l ***es lo que se conoce como `mentiroso reforzado'.***

[11] ***Otra candidata a realizacion del proyecto minimalista de Horwich en la l nea de*** putb ***pero deduc-tivamente mas poderosa es la teor a presentada por Schindler (2014b).***

generalisation is not substantially impaired by their existence." (Horwich, 1998b, p. 42, nota 21) Sin embargo, tambien es claro que toda teor a desentrecomilladora clasica puede extenderse consistentemente mediante T-Out y, por ende, no hay necesidad alguna de resignar siquiera esta m nima porcion de utilidad de la verdad.

En cambio, el modelo de Leitgeb s cumple con la condicion (1).

Corolario 5.19. El predicado de verdad de la teor a fhN^{+}; $_{pf}$ ig tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Este es un corolario del corolario 3.38 (= $_{pf}$) y la observacion 5.7. □

Aun mas, siendo esta porcion de la teor a semantica de Leitgeb evidentemente axiomatizable (podr a tomarse simplemente pat + T-Out), prima facie la condicion (3) tambien se satisface. No obstante, esta axiomatizacion no re eja ninguna caracter stica especial del modelo de Leitgeb, es altamente incompleta. Fischer et al. (2015) investigan diversos modos de evaluar en que casos un sistema constituye una axiomatizacion de cierta teor a semantica, y es claro que bajo ninguno de los criterios que consideran seriamente pat + T-Out puede axiomatizar fhN^{+}; $_{pf}$ ig. Schindler (2014a) ofrece una version axiomatica mas razonable del modelo de Leitgeb que tambien incluye T-Out, pero en ella las adscripciones de verdad estan relativizadas a un predicado primitivo para expresar el concepto de d-fundacion, presumiblemente sustantivo, ciertamente no de nible L$^{+}_{pa}$ y, por ende, se aplicar an las objeciones de Glanzberg en este caso, con lo cual la condicion (2) fallar a.[12]

En el cap tulo 8 ofrezco teor as de la verdad desentrecomilladoras que cumplen considerablemente mejor las exigencias (a)-(d) del proyecto minimalista extendido. De hecho, argumento que pueden entenderse como realizaciones totales de este proyecto. Aun mas, muestro que tambien se satisfacen las condiciones (1)-(3) que he impuesto sobre toda teor a de acionista formal de la verdad: las teor as que ofrezco son correctas, no exceden la funcion basica de la verdad y, mas importantemente, son consistentes con T-Out, por tanto, su predicado veritativo puede facilmente adquirir la propiedad de eliminacion y servir los roles logico-expresivos deseados.

5.3.2. De acionismo y paracompletitud

Una segunda corriente de acionista que vio en la transparencia de la verdad la pieza necesaria para que el predicado pueda ser utilizado para expresar conjunciones in nitas

[12] *Existira una posibilidad de eliminar esta relativizacion en la axiomatizacion de Schindler, pero estudiarla me llevar a demasiado lejos.*

opt por debilitar la logica lo justo y necesario para evitar inconsistencias, en lugar de los principios de equivalencia, como el proyecto minimalista. Uno de los caminos a tomar es el rechazo del principio de Tercero Excluido, la eleccion de logicas paracompletas (vease el apartado 3.1.1). En este apartado investigo las teor as paracompletas semanticas de Punto Fijo de Kripke, las cuales son transparentes (corolario 3.9), y el sistema axiomatico kf, al cual una de ellas dio lugar, a la luz de las condiciones (1)-(3).

Un primer caso es la teor a de Punto Fijo de Kripke sobre el esquema de valuacion Weak Kleene. Si bien valida todas las instancias de T-Elim, no todas las inferencias de :8v' a partir de :'[t=v] son validas, a menos que todas las instancias de '(v) reciban un valor de verdad clasico, i.e., falla la regla de introduccion del existencial I9. Luego, el paso 7 de la derivacion de (ET 3) (observacion 5.9) resulta invalido en la teor a. Se puede probar que no existe modo de reparar la derivacion:

Proposicion 5.20. El predicado de verdad de la teor a de Punto Fijo de Kripke sobre el esquema de valuacion Weak Kleene no tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Sea l^0 como en (5.8), i.e.,

$$N^{+} \quad l^0 = pT :_{.} l^0 q$$

Es sencillo ver que T :$_{.}l^0$ recibe valor $\frac{1}{2}$ en todo modelo de punto jo sobre wk, por ser paradojica. A continuacion exhibo dos formulas '(x) y 2 L$_T$ para las cuales (ET 3) no preserva verdad.

Sea := (0 6= 0) y '(x) := (x = p0 6= 0q). Si M es un modelo de punto jo sobre wk, v_{wk}^M(0 = 0) = 0 y, por ende, v_{wk}^M(6 :) = 1. Asimismo, v_{wk}^M('(0 p 6 q = 0)) = 1. Luego, las premisas de ET 3 son verdaderas en todo modelo de punto jo. No obstante, este no es el caso de la conclusion. Notese que una de las instancias de 8x('(x) ! Tx) es el condicional '(l^0) ! Tl ^{0}, cuyo valor de verdad es $\frac{1}{2}$, porque v_{wk}^M(Tl ^{0}) = $\frac{1}{2}$ en todo modelo de punto jo (vease la de nicion 3.4). Como en wk un enunciado universal recibe valor $\frac{1}{2}$ si alguna de sus instancias tiene este valor, v_{wk}^M(8x('(x) ! Tx)) = $\frac{1}{2}$ y, por tanto, :8x('(x) ! Tx) recibe valor $\frac{1}{2}$ en todo modelo de punto jo sobre wk. □

En cambio, la teor a de punto jo de Kripke sobre el esquema Strong Kleene s tiene la propiedad de eliminacion, porque, de acuerdo con la de nicion 3.2, es su ciente que una de las instancias de un enunciado universal reciba valor 0 para que el enunciado mismo reciba este valor y, en consecuencia, su negacion valga 1.

Proposicion 5.21. El predicado de verdad de la teor a de Punto Fijo de Kripke sobre el esquema de valuacion Strong Kleene tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Es sencillo ver que k3 valida las reglas E!, I^, I!, contraposicion , E8

e I9. Ademas, por el corolario 3.9, T-Elim vale en todos los modelos de punto jo. Luego, por la observacion 5.9, en estos modelos el predicado de verdad tiene la propiedad de eliminacion. ❑

Luego, la teor a de punto jo sobre sk satisface la condicion (1) pero, como se~nale en el apartado 3.1.2, es demasiado compleja para ser axiomatizada. No obstante, existen axiomatizaciones parciales, como kf en logica clasica y otra denominada `pkf' en k3, de la cual no me ocupo en esta investigacion (cf. Horsten (2011), Halbach & Horsten (2005), porque no es necesario. En efecto, kf es ya una teor a adecuada de la verdad.

Corolario 5.22. El predicado de verdad de kf tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Directamente de la observacion 5.7 y el hecho de que kf prueba todas las instancias de T-Out (vease el apartado 3.1.3.1). □

Ademas, los principios composicionales pueden ser todos explicados en funcion de los principios de transparencia que la clausura de los modelos de Punto Fijo de Kripke sobre sk validan.

5.3.3. De acionismo y composicionalidad

En este apartado evaluo las teor as composicionales axiomaticas y clasicas ct(pa^{+}), rt< $_0$ (vease el apartado 2.3.3) y fs (vease el apartado 3.3) a la luz de las condiciones de acionistas (1)-(3) que di al comienzo de la seccion.

Proposicion 5.23. Los predicados de verdad de las teor as ct(pa^{+}) y rt< $_0$ no tienen la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Nuevamente, al ser teor as clasicas, por la observacion 5.10, si sus predi-cados de verdad tuvieran la propiedad de eliminacion, deber an implicar las instancias de T-Out, o las instancias analogas para los predicados de verdad de rt< $_0$, dadas por oraciones de todo L$_T$ o todo L< $_0$. Pero mientras que ct(pa^{+}) no prueba T I ! :T I, la instancia de T-Out para la oracion :T I del mentiroso, rt< $_0$ no prueba T I ! :T I para ningun predicado T , con < $_0$, donde q^{+} ` I = p:T I q. □

No obstante, ambas teor as son consistentemente extensibles con T-Out, mien-tras que sus axiomas composicionales estan motivados por las instancias fundadas del

Esquema-T y, por ende, los sistemas resultantes podr an ser buenos candidatos para el de acionismo. fs, en cambio, no solo no es eliminativista sino que es inconsistente con T-Out.

Proposicion 5.24. Si th fs es una teor a consistente, T no tienen la propiedad de eliminacion en th.

Demostracion. Razono en fs + T-Out. Si :T l es la oracion del mentiroso (reforzado), por T-Out, se tiene que T l ! :T l y, por ende, que :T l. Luego, fs2 implica que T :̣l que, nuevamente por T-Out, implica ::T l o, lo que es lo mismo, T l. En consecuencia, fs th + T-Out es inconsistente. Como th fs es consistente, th 0 T-Out y, por la observacion 5.7, th no tiene la propiedad de eliminacion. □

Por lo tanto, fs es una teor a inviable para el de acionismo.

5.3.4. De acionismo y paraconsistencia

Finalmente, un segundo camino que han tomado aquellos que sostienen que la transparencia es necesaria y su ciente para garantizar los usos logicos del predicado veritativo y estan dispuestos a abandonar la logica clasica para poder adoptar principios de equivalen-cia completos consiste en elegir logicas paraconsistentes, donde la regla Ex Falso Sequitur Quodlibet resulta invalida (vease el apartado 3.4.1). A continuacion evaluo las teor as paraconsistentes de verdad transparente lptt, pltt y sttt a la luz de las condiciones (1)-(3). Al ser axiomaticas y estar dadas unicamente por principios de transparencia, las condiciones (2) y (3) son satisfechas automaticamente. No obstante, muestro que la condicion (1) falla en los tres casos.

Como mencion en el cap tulo 3, lp no satisface la regla E! y, por tanto, los pasos 4 y 6 en la derivacion de la inferencia (ET 2) (observacion 5.7) no son validos en pltt. Una vez mas, puede probarse que no hay modo de reparar la prueba.

Proposicion 5.25. lptt no tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Muestro que existen dos formulas '(x) and tales que, en todo modelo de lptt, las premisas de (ET 2) resultan verderas mientras que su conclusion, falsa. Sean M $_{lp}$ lptt, := 0 6= 0 y '(x) := T (x$.l^0), donde l^0 = pT :.l^{0}q. Notese que '(x) es verdadera en M de toda oracion de L$_T$, porque, al ser paradojica, v$_{lp}$^{M}(T :.l^0) = $\frac{1}{2}$ y, por las clausulas del condicional de lp y las derivadas de la conjuncion (cf. de nicion 3.2), para toda 2 L$_T$, v$_{lp}$^{M}(! T :.l^0); v$_{lp}$^{M}(T :.l^0 !); v$_{lp}$^{M}($ T :.l^0) $\frac{1}{2}$. Luego, por inter-sustitutividad y la denotacion de l^0, para toda x tal que Sent$_{LT}$ (x), v$_{lp}$^{M}(T (x$.l^0)) $\frac{1}{2}$.

En particular, $v^M(T\,(\,0 \neq 0^{\mathrm{lp}}\ \mathrm{p}\ 6\ \mathrm{q}\$_{.}\ \mathrm{l}^0)) = \frac{1}{2}$. Adicionalmente, 8x(T (x $\$_{.}$ l) ! T x) es tambien verdadera en M. Luego, ambas premisas de ET 2 son verdaderas en M, pero, natural-mente, 0 6= 0 no lo es. □

Si bien Priest ha introducido un condicional a lp para remediar la falla de E!, esto es, del Modus Ponens, obteniendo as la logica pl (cf. de nicion 3.51), en ella el condicional no satisface MT, Modus Tollens, y, en consecuencia, la regla ET 3 resulta invalida en su teor a transparente de la verdad pltt, donde el condicional utilizado no es ya el condicional material sino el nuevo, (de lo contrario ET 2 falla, porque el condicional material de pl es el de lp).

Proposicion 5.26. El predicado de verdad de pltt no tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Nuevamente, exhibo dos formulas, '(x) y para las cuales las premisas de ET 3 resultan verdaderas en un modelo de pltt, pero su conclusion falsa. Sea '(x) := (x = l^0) y := T l^0. Por (5.8), T $^{\mathrm{p}\,:\,\mathrm{q}}$ = l es verdadera en todo modelo de la teor a y, por el Esquema-T de Priest, esto es,

T p'q' (Esquema-T de Priest)

|el Esquema T formulado con el nuevo condicional | y las clausulas para la negacion

y el condicional del esquema de valuacion de Priest ep (cf. de nicion 3.50), tanto T :.l^0 como :T :.l^0 obtienen el valor $\frac{1}{2}$. En consecuencia, ambas premisas de ET 3 son verdaderas en todo modelo. Pero a la vez :8x(x = l^0 Tx), la conclusion de esta inferencia, no es verdadera en todo ellos. Si M $_{\mathrm{pl}}$ pltt, el Esquema-T de Priest implica que, en todo mundo w 2 W_M, $v_{pl}{}^w(Tl^0\ T :.l^0)\ \frac{1}{2}$, que, junto con la clausula semantica para , implica que, en todo w^0 tal que wR_Mw^0, $v_{pl}{}^{w_0}(Tl^0)\ \frac{1}{2}$ sii $v_{pl}{}^{w_0}(T :.l^0)\ \frac{1}{2}$. Como esto ultimo es el caso, lo primero tambien y, por ende, Tl^0 puede obtener valor 1 o $\frac{1}{2}$ en cada mundo, por la sobreyectividad de R_M. Luego, por las clausulas del condicional en el esquema de valuacion ep, como los enunciados de identidad adquieren valores clasicos en todo mundo de todo modelo, existe un modelo M de pltt y un w 2 W_M tales que $v_{pl}{}^w(8x(x = l^0\ Tx)) = 1$ y, por ende, $v_{pl}{}^w(:8x(x = l^0\ Tx)) = 0$. En consecuencia, existe un modelo de pltt en el cual :8x(x = l^0 Tx), la conclusion de ET 3, es falsa. □

Finalmente, muestro que, bajo ciertas condiciones razonables, la teor a de verdad transparente sttt tampoco satisface la condicion de adecuacion (1), esto es, su predicado de verdad no tiene la propiedad de eliminacion si se la considera de cierta manera (vease el apartado 3.4.3).

Dado que la logica subyacente de sttt, st, no es transitiva, a diferencia de otras logicas como la clasica, existe una disparidad entre las reglas y las metareglas que valen en la teor a. Esto abre una brecha entre lo que puede derivarse a partir de ciertas oraciones asertadas hipoteticamente, como supuestos o premisas, y lo que puede derivarse de ellas cuando se las a rma categoricamente, como axiomas o teoremas (vease el apartado 3.4.3.1). Luego, si bien, v.g., ET 2 vale cuando sus premisas ocurren en contextos hipoteticos, falla cuando se las a rma categoricamente.

Claramente, es deseable poder derivar no solo cuando se supone que todas las 's son verdaderas (y que es una '), pero tambien, y quizas aun mas todav a, cuando se sabe o se a rma categoricamente que todas las 's son verdaderas. Es consecuente demandar entonces que ET 2 valga en la forma de regla en el calculo de secuentes, en el cual sttt esta formulada, i.e.,

; 8v('(v) ! Tv); '(p q) . ; (5.9)

pero tambien en forma de metaregla, es decir,

. 8v('(v) ! Tv);. '(p q);

; . ; ; (5.10)

Y otro tanto con respecto a ET 1 y ET 3. Lamentablemente, mientras que (5.9) vale en sttt, (5.10) no.

Proposicion 5.27. El predicado de verdad de sttt no tiene la propiedad de eliminacion.

Demostracion. Sean '(x) := (x = p 6 q ^ $. l^0)) y 6 0 = 0 T (x := (0 = 0). A continuacion muestro que los secuentes

. 8x(x = 0 = 0 T (x $. l^0) !Tx) (5.11)

p 6 q ^

y

. 0 = 0 = 0 = 0 ^ T (0 = 0 l^0) (5.12)

p 6 q p 6 q p 6 q$.

son validos en sttt. Sea M un modelo de sttt. Es sencillo ver que v_{sk}^M(T :.l^0) = $\frac{1}{2}$ y que, por las clausulas del condicional y la conjuncion de sk (cf. de nicion 3.2), v_{sk}^M(0 6= 0 $ T :.l^0) = $\frac{1}{2}$ tambien. Por IS, v_{sk}^M(T (p0 6= 0q$.l^0)) = $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, como todo modelo de sttt es un modelo clasico de pat, por la clausula de la conjuncion, se tiene que v_{sk}^M(p0 6= 0q = p0 6= 0q ^ T (p0 6= 0q$.l^0)) = $\frac{1}{2}$, esto es, vale el secuente (5.12). A su vez, por la clausula del condicional, esto implica que v_{sk}^M(p0 6= 0q = p0 6= 0q ^ T (p0 6= 0q$.l^0) ! T p0 6= 0q) = $\frac{1}{2}$. Por las condiciones impuestas sobre la identidad y los enunciados universales, $v_{sk}^{M}(8x(x = p0 6= 0 q \wedge \$.l^{0}) T(x ! T x)) = \frac{1}{2}$ tambien, lo cual completa la prueba del secuente (5.11). Pero, a la vez, es claro que, en ningun modelo M de sttt, $v_{sk}^{M}(0 6= 0)\ \frac{1}{2}$, porque las identidades se comportan de modo clasico. En consecuencia, hay instancias de ET 2 para las cuales las premisas son tolerantemente verdaderas en todo modelo, mientras que su conclusion es falsa, i.e., (5.10) es invalida en sttt. □

§

A lo largo de este cap tulo he identi cado las caracter sticas principales que toda teor a formal de la verdad debe satisfacer para cuadrar con las tesis principales del de acionismo. A grandes rasgos, estos sistemas deben ser (1) capaces de garantizar los roles logico-expresivos del predicado veritativo, i.e., asegurar la propiedad de eliminacion; (2) correctos con respecto a la naturaleza desentrecomilladora de la verdad, esto es, no a rmar mas que lo que se desprende del signi cado de la verdad; y (3) ser parcialmente axiomatizables, de modo tal que la teor a axiomatica resultante cumpla asimismo con (1).

He mostrado que para satisfacer la condicion (1) no es necesario contar con prin-cipios de transparencia completos sino solo una parte de ellos, la parte eliminativa. Dado que estas partes son ceteris paribus consistentes en el marco de la logica clasica, argu-ment que no hay necesidad de adoptar logicas no clasicas en su lugar para obtener una buena teor a de la verdad de acionista. Aun mas, mostre que algunas teor as no clasicas con predicados de verdad transparentes no logran satisfacer (1), por la falla de ciertos principios logicos. En otras palabras, los principios de transparencia no son necesarios ni su cientes para garantizar los roles logico-expresivos del predicado veritativo, contrario a la opinion generalizada.

6

Condiciones sobre una nocion de referencia formal

\We either suspect that much philosophical work lies ahead of us before the question is nally settled, or that otherwise the question is ill-posed, i.e., that the talk of self-referentiality is to be banished from scienti c contexts."

{ Hannes Leitgeb, `What is a Self-Referential Sentence?'

Como se vio en el cap tulo anterior, si bien el Esquema-T no es estrictamente ni necesario ni su ciente para garantizar los roles logico-expresivos de la verdad sino que, en contextos clasicos, T-Out lo es, ciertas instancias correctas y consistentes del Esquema-T pueden resultar deseables por otros motivos, v.g., descriptivos, practicos (vease el apartado 5.3). En otras palabras, el proyecto minimalista de Horwich (vease el apartado 5.3.1) resulta atractivo desde un punto de vista loso co. No obstante, hallar un buen criterio de seleccion de instancias del Esquema-T que cuadre con el proyecto no es sencillo, como mostre en el apartado 5.3.1: los criterios disponibles resultan o bien demasiado restrictivos, o bien demasiado complejos, o bien demasiado arbitrarios.

Una estrategia prometedora e inexplorada consiste recurrir a la nocion de refe-rencia. La idea de que las expresiones que llevan a paradojas semanticas comparten ciertos patrones referenciales `peligrosos' que son responsables por las contradicciones, lo que llamo `vision referencialista de las paradojas semanticas', es considerada conoci-miento comun. Aun mas, la postura ortodoxa sostiene que, mas espec camente, estos patrones comunes se reducen a la autorreferencia. En cualquier caso, si la vision refe-rencialista es acertada, es prima facie posible un criterio de restriccion de instancias del Esquema-T basado en la nocion de referencia que resulte consistente, amplio y poco ad hoc. Asimismo, a diferencia, v.g., de la nocion de dependencia (vease el apartado 3.2), la referencia tiene en principio un caracter mas sintactico por estar basada en la sintaxis de las expresiones, como muestro en este cap tulo, lo cual apunta a la posibilidad de un criterio simple de restriccion. En consecuencia, un criterio tal parecer a satisfacer todas las condiciones minimalistas.

No obstante, el concepto de referencia que se necesita no es facil de caracterizar. Lo evidencian los diversos intentos en la literatura pero, principalmente, el debate que se genero alrededor de la paradoja de Yablo. Yablo introdujo una antinomia dise~nada para refutar la tesis referencialista ortodoxa, i.e., que todas las paradojas semanticas son autorreferenciales. Esto fue a su vez puesto en duda, suscitando un debate inextricable que culmino cuando Leitgeb not que diversas nociones incompatibles y poco claras de autorreferencia estaban en juego al mismo tiempo en la discusion. Esto se tradujo en el desaf o a encontrar una nocion adecuada y precisa de referencia aplicable al estudio de las paradojas semanticas, desaf o que, modulo ciertas modi caciones, creo superar en el cap tulo siguiente.

En este cap tulo me ocupo de se~nalar las di cultades que, desde mi punto de vista, toda nocion de referencia adecuada y precisa debe superar; as como de identi car las condiciones que debe satisfacer. Para eso, introduzco primero la paradoja de Yablo en detalle, seguida por el debate en torno a su presunto caracter no autorreferencial. En 6.2 presento el desaf o de Leitgeb, esto es, las condiciones que el impone sobre toda nocion de referencia. 6.3 se ocupa de abordajes previos a la nocion de referencia y otros conceptos cercanos, se~nalando sus aciertos y sus desaciertos, correspondientemente. Finalmente, en 6.4 argumento en contra de una de las condiciones de Leitgeb para un concepto adecuado de referencia y concluyo con las condiciones que un concepto tal debe satisfacer.

6.1. La paradoja de Yablo

Yablo (1985, 1993) desa o la idea instalada de que todas las antinomias semanticas involucran algun tipo de autorreferencia, la vision referencialista ortodoxa (cf. Henri Poincare (1906), Russell (1908)) mediante una paradoja informal |hoy llamada `para-doja de Yablo'| dada por la siguiente lista in nita de oraciones, cada una de las cuales parece referir unicamente a las que se encuentran mas adelante en la lista:

Para todo $x > 0$; Y_x no es verdadera. (Y_0)

Para todo $x > 1$; Y_x no es verdadera. (Y_1)

: : :

Para todo $x > n$; Y_x no es verdadera. (Y_n)

: : :

Prima facie, al igual que en el caso del mentiroso, no es posible asignar valores de verdad clasicos consistentemente a las oraciones de esta lista. Supongase que alguna de ellas, (Y_n), es verdadera. Luego, ninguna cuyo sub ndice sea mayor a n lo es, i.e., (Y_{n+1}) no es verdadera y tampoco lo son aquellas que se encuentran por debajo de (Y_{n+1}). Pero esto ultimo es precisamente lo que (Y_{n+1}) a rma, razon por la cual (Y_{n+1}) deber a ser verdadera despues de todo. Dado que suponer que una oracion cualquiera es verdadera ha llevado a una contradiccion, se debe concluir que ninguna lo es. Pero si ninguna oracion debajo de (Y_0) es verdadera, (Y_0) debe ser a la vez verdadera, lo cual es imposible.

Prima facie, nuevamente, no hay rastros de autorreferencia en la secuencia de Yablo sino que, como sostiene Roy A. Sorensen (1998, p. 139), \The technique substitutes the cramped circularity of self-reference with the luxuriant linearity of an in nite series." En otras palabras, Yablo sustituye la autorreferencia con la infundacion. Una paradoja con estas caracter sticas sacudir a los fundamentos de teor as de la verdad como las de Tarski y, transladando la idea de Yablo al ambito de los conjuntos y las clases, teor as como la de tipos de Russell (1903) se ver an afectadas del mismo modo.[1]

Como se vio en el cap tulo 2, Tarski propone sortear las paradojas semanticas mediante una distincion entre lenguaje y metalenguaje, donde `verdad' es siempre `verdad en el lenguaje objeto' y solo puede ser aplicada desde un metalenguaje esencialmente mas rico. En lugar de un unico predicado veritativo para un unico lenguaje, se obtiene una jerarqu a de predicados y lenguajes tales que el predicado de verdad de cada len-guaje se encuentra en los lenguajes que estan por encima en la jerarqu a. Esto bloquea la paradoja del mentiroso y otros ciclos pero no es su ciente para bloquear la para-doja de Yablo. Como a rma Kripke (1975, p. 697), \[. . .] the orthodox approach by no means obviously guarantees groundedness [. . .] Even if unrestricted truth de nitions are in question, standard theorems easily allow us to construct a descending chain of rst-order languages L_0, L_1, L_2, . . . , such that L_i contains a truth predicate for L_{i+1}."

[1] ***Vease*** ***Yablo (2004)*** para paradojas conjuntistas in nitarias semejantes a la paradoja de Yablo.

Siendo esta jerarqu a acumulativa $|L_0\ L_1\ L_2 : : : |$ siguiendo a Visser (1989) (cf. Thomas Forster (2004) tambien) es posible formular una lista semejante a la de Yablo en estos lenguajes: en cada L_n hay una oracion F_n que a rma que ninguna oracion F_m de L_m, donde $m > n$, es verdadera, y es posible obtener una contradiccion a partir de esta secuencia mediante un argumento analogo al anterior.

Naturalmente, las teor as de la verdad de Tarski no son inconsistentes, porque Tarski siempre comenz por un primer lenguaje objeto y a partir de este construy len-guajes mas y mas ricos que sirvieran de metalenguajes desde los cuales dar de niciones de predicados de verdad para los anteriores. Sin embargo, la idea tarskiana de que es su ciente establecer una distincion entre lenguaje objeto y metalenguaje para evitar las paradojas es en alguna medida (ya se vera por que el matiz) falsa. Como sostiene Yablo,

> So the Tarskian way of avoiding paradox relies on more than a rigid object/-metalanguage distinction. It is also required that the sequence of languages eventually grounds out in a bottom-level object language. (Yablo, 2004, p. 141)

Dada la importancia de las consecuencias de una paradoja semantica no circular, poco tiempo despues de su aparicion la paradoja de Yablo fue puesta bajo un minucioso escudri~no. El primer paso fue su formalizacion en una extension del lenguaje de la aritmetica de primer orden con un predicado de verdad, L_T , como es usual en el caso de antinomias semanticas y mas aun en el caso de la secuencia de Yablo, donde hay vocabulario aritmetico involucrado. Luego se paso a evaluar tres cuestiones en torno a esta formalizacion: primero, si su existencia puede probarse en la aritmetica o en alguna de sus extensiones, como puede probarse, mediante el lema diagonal, la de la oracion del mentiroso, y, segundo y tercero, si, de existir, la secuencia es realmente paradojica y no autorreferencial. Este ultimo punto fue quizas el mas controversial y llevo el debate a un punto muerto, debido a la falta de nociones adecuadas y correctas de autorreferencia y a la di cultad que encontrar nociones tales conlleva (cf. Leitgeb (2002)).

Las subsecciones que siguen estan dedicadas a la breve exposicion de estas cuestio-nes. Primero presento una version formal de la paradoja de Yablo en L_T , muestro como puede probarse la existencia de la lista en q^+ y analizo su paradojicidad. Luego, en 6.1.2, el ultimo apartado de la seccion, presento el debate alrededor de la autorreferencialidad.

6.1.1. Formalizacion y paradojicidad de la secuencia de Yablo

El modo mas natural de formalizar la lista de Yablo en L_T parece ser el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&(0) = p8x > 0:T (x)q \\
&(1) = p \overset{8}{x} > 1\ T^{:} (x)q \\
&: : : \\
&(n) = p8x > n:T (x)q \\
&: : : \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

donde (x) es un termino abierto del lenguaje. Para probar la existencia de estos terminos no se puede recurrir a una de nicion recursiva porque, al reves de lo usual, los que tienen numeros mas peque~nos requieren de los que tienen numeros mas grandes para su de nicion. El unico modo de obtener terminos (n) para cada n 2 ! como los de (6.1) es mediante un procedimiento diagonalizador, v.g., el lema diagonal fuerte (teorema 1.8) aplicado a 8y > x:T z(y=pxq) sobre la variable z.[2] De acuerdo con este lema, existe un termino t tal que

$$q^{+} ` t = p8y > x:T t(y=pxq)q$$

Aplicando la funcion y(x=pxq) a ambos lados del igual,

$$q^{+} ` t(x=pxq) = p8y > x:T t(y=pxq)q(x=pxq)$$

Sea (v) := t(v=pxq). Luego,

$$q^{+} ` (x) = p8y > x:T (y)q$$

o, lo que es lo mismo, q^{+} tiene como teorema al Principio Uniforme de Punto Fijo de Yablo (Uniform Fixed-Point Yablo Principle), i.e.:

$$8x\ (x) = p8y > x:T (y)q \qquad \text{(UFPYP)}$$

Claramente, del UFPYP se siguen todas las oraciones de la lista en (6.1). Llamo \`oracion de Yablo' a cada una de estas oraciones y \`predicado de Yablo' a la formula 8y > v:T (y), denotada por (v).

Al igual que la oracion del mentiroso en

$$q^{+} ` l = p:T lq \qquad (6.2)$$

---

[2] ***Donde** $v_1(v_2=v_3)$ **representa la funcion sustitucion y** v **la funcion numeral; vease el apartado 1.2.3.***

o el ciclo de mentirosos en

$$q^{+} \grave{} \ l_1 = pT \ l_2q \ \wedge \ l_2 = p{:}T \ l_1q$$

el patron de referencia de la lista de Yablo puede obtenerse en la aritmetica via el lema diagonal.

Basandose en la formalizacion de la lista de Yablo en (6.1), la siguiente es una formalizacion del argumento mediante el cual Yablo deriva una contradiccion a partir de ella:

1.	T (n)	supuesto
2.	8y > n:T (y)	1
3.	:T (n + 1)	2
4.	8y > n + 1:T (y)	2
5.	T (n + 1)	4
6.	?	3, 5
7.	:T (n)	1-6
8.	8y:T (y)	7
9.	8y > 0:T (y)	8
10.	T (0)	9
11.	:T (0)	8

A primera vista todo parece estar en orden, pero una mirada de cerca encuentra que no es claro que principios justi can los pasos 2 y 8 en esta derivacion, porque no es claro si la letra n es una variable en la derivacion o el numeral de un numero dado. Si n es el numeral de un numero dado, no se esta frente a una derivacion sino a un esquema de derivacion; se tiene una inferencia por cada n 2 !. En ese caso, el paso 2 esta dado por (6.1) junto con el Esquema-T para oraciones de Yablo, esto es, el principio desentrecomillador local de Yablo (Local Yablo Disquotation Principle):

$$T \ p8y > n{:}T \ (y)q \ \$ \ 8y > n{:}T \ (y) \qquad \text{(LYDP)}$$

para cada n 2 !. Pero el paso 8 queda completamente injusti cado, a menos que se cuente con reglas in nitarias como la regla !, que permitan pasar de todas las oraciones de la forma :T (n) con n 2 ! a 8y:T (y), que no es el caso.[3] En efecto, como se~nalan James Hardy (1995) y Ketland (2005),[4]

Proposicion 6.1 (Hardy, Ketland). pat + LYDP es consistente pero !-inconsistente.

[3] ***La regla* ! *permite derivar* 8v'(v) *a partir del conjunto de instancias de ', esto es, a partir de las in nitas premisas de la forma* '[n=v] *con* n 2 !. *Para una discusion en torno a la posibilidad de obtener una contradiccion a partir de la lista de Yablo empleando la regla* ! *u otras reglas in nitarias, por supuesto, no en lenguajes de primer orden, vease Priest (1997), Beall (2001) y Selmer Bringsjord & Bram van Heuveln (2003).***

[4] *Visser (1989)* hab a probado ya un resultado equivalente para su formulacion de la paradoja.

Si, en cambio, n es una variable en la derivacion, el paso 2 no puede justi carse mediante (6.1) y el LYDP sino que es preciso recurrir a versiones uniformes de estos principios, es decir, al UFPYP y al Esquema-T Uniforme para el predicado de Yablo (Uniform Yablo Disquotation Principle), i.e. (vease el apartado 1.2.3):

8t(T p8 y > t :T (y) y > t :T (y)) (UYDP)
· q $ 8

Proposicion 6.2. pat + UYDP es inconsistente.

En este caso, el paso 8 es leg timo, pero se ha recurrido para obtener una contra-diccion a algo mas que las oraciones de Yablo. No son las oraciones de Yablo aquellas que originan la paradoja sino el predicado. Luego, esta paradoja sera autorreferencial o no en la medida en que el predicado de Yablo lo sea, sin importar que las oraciones no tengan ningun patron autorreferencial.

Muchos no han siquiera considerado esta version de la paradoja por no ser lo su - cientemente el al original.[5] Despues de todo, Yablo pretendio derivar una contradiccion de las oraciones de la lista y no de las peculiaridades del predicado de Yablo. El hecho de que la contradiccion no fuera tal por la ilegitimidad de la regla !, que solo sea posible probar una !-inconsistencia y no una inconsistencia a secas, hace de su paradoja una !-paradoja, como la llama Ketland (2004).[6] En cualquier caso, la lista resulta problematica en el contexto de la aritmetica en tanto las !-inconsistencias son casi tan indeseables como las contradicciones, por bloquear la posibilidad de tener interpretaciones estandar, expansiones de N, de las teor as en las que surgen (veanse el apartado 3.1.3.1, Leitgeb (2007), Barrio & Picollo (2013)).

6.1.2. Autorreferencia en la secuencia de Yablo

El primero en desa ar el contraejemplo de Yablo a la autorreferencialidad de todas las paradojas semanticas fue Priest (1997). Desde su punto de vista, oraciones como el mentiroso en (6.2) son autorreferentes porque son puntos jos de algun predicado y, en sus propias palabras,

> [. . .] the paradox concerns a predicate, , of the form 8y > x:T (y); and the fact that = p8y > x:T (y)q shows that we have a xed point, , here, of exactly the same self-referential kind as in the liar paradox. In a nutshell,

[5] ***Veanse Picollo (2013), Picollo & Buacar (2014) para una argumentacion expl cita.***

[6] ***Aunque la regla ! no es necesaria para obtener una simple paradoja. En (2012) muestro que, expresada en el lenguaje de la aritmetica de segundo orden*** con un predicado de verdad la lista es insatisfacible.

> is the predicate `no number greater than x satis es this predicate'. The circularity is now manifest. (Priest, 1997, p. 238)

Podr a argumentarse que, en la medida en que no se recurra al UFPYP y se tenga simplemente una !-paradoja, no hay circularidad involucrada. Sin embargo, Priest responde, la circularidad surge del hecho de que cada oracion de Yablo, (n), es un valor de la funcion , que esta de nida en terminos de s misma, que es un punto jo. Las oraciones de Yablo son todas instancias de un predicado circular y, por ende, son circulares ellas mismas.[7]

Como not Leitgeb (2002), parece haber dos nociones diferentes de autorrefe-rencia en juego: una mas bien intuitiva y una mas bien tecnica. La primera entiende la autorreferencia de oraciones como referencia de estas a s mismas, y se basa en un concepto intuitivo de referencia o contenido de oraciones a oraciones, que a su vez se sostiene sobre la referencia o denotacion de los terminos que en ellas ocurren, esto es, en sus rasgos sintacticos, y el rango de cuanti cacion de sus cuanti cadores.

> This usage of `refers to' and `says of' seems to presuppose that the usual reference relation ref, which holds between (singular or general) terms and their referents, is extended or complemented by a reference relation holding between sentences and objects (but where the referents of the sentences are not the truth values of the sentences). (Leitgeb, 2002, p. 4)

De acuerdo con este concepto, una oracion tiene dos medios de referir a otra: por mencion y por cuanti cacion, y puede hacerlo directa o indirectamente: la referencia es transitiva.[8] Una oracion, v.g., de la forma :T t re ere intuitivamente a lo que t denota. Si t = p0 = 0q, la oracion no es autorreferencial, pero si t = p:T tq, como en el caso del mentiroso, s lo es. En general, una oracion ' re ere a otra directamente por mencion en la medida en que ' contenga un termino que denote .

Ademas, intuitivamente, oraciones como 8v('(v) ! (v)) re eren a los 's direc-tamente por cuanti cacion. En este sentido, la n-esima oracion de Yablo re ere a las oraciones cuyo codigo es mayor a n. Como, por ejemplo, es claro que el codigo de la pri-mera oracion, 8x > 0:T (x), es mayor que 0, estas son autorreferenciales. Sin embargo, es posible reformular las oraciones de Yablo de modo tal que esto no ocurra:

(n) = p8y(9z(y = (z) ^ z > n) ! :Ty)q;

[7] ***Para una discusion alrededor de este punto vease tambien Sorensen (1998) y Beall (2001).*** [8] ***El esbozo de esta nocion intuitiva puede ya encontrarse en Herzberger (1970).***

Ahora, cada oracion 8y(9z(y = (z) ^ z > n) ! :T y) re ere intuitivamente solo a las oraciones en la secuencia que se encuentran por debajo. Luego, aun considerando la referencia indirecta de cada una de estas oraciones, i.e. la clausura transitiva de la referencia directa, ninguna de ellas re ere a s misma. Esta parece ser la nocion que Yablo y Sorensen, entre otros, tienen en mente cuando sostienen que la lista de Yablo no es autorreferencial.

Por otro lado, Leitgeb nota la nocion de autorreferencia de Priest, ligada a la presencia de puntos jos. Este concepto esta inspirado en los trabajos de G•odel. Suele decirse que es la presencia de puntos jos, que pueden obtenerse v a lemas diagonales, lo que codi ca la autorreferencia en lenguajes aritmeticos, razon por la cual la oracion de G•odel ser a autorreferencial. De acuerdo con este concepto `tecnico' de autorreferencia, una formula ' de un lenguaje de primer orden L L_{pa} es autorreferencial si es equivalente a otra formula que contiene un termino que denota ', esto es,

M ' $ (p'q) (6.3)

en todo modelo M que extiende N a todo L. Por ejemplo, la oracion :TI (es equivalente a s misma y) contiene un termino, I, que la denota; y el predicado de Yablo 8y > x:T (y) contiene un termino, (y) que lo denota. En consecuencia, en las oraciones de Yablo hay `involucrado' algun tipo de autorreferencia. Claramente ambas nociones de autorreferencia empleadas en el debate acerca de la paradoja de Yablo son incompatibles entre s .

§

La paradoja de Yablo y el debate que le siguio no solo hicieron tambalear la vision referencialista ortodoxa que considera que la autorreferencia es comun a todas las paradojas semanticas sino que pusieron en evidencia el caracter informal, la poca precision con la cual esta postura y la tesis referencialista en general estan formuladas. De este modo, impulsaron la busqueda de nociones adecuadas y precisas de autorreferencia y referencia que pudieran utilizarse para evaluar los patrones referenciales detras de expresiones paradojicas del lenguaje de la verdad, como la oracion del mentiroso o las oraciones de Yablo, pero tambien de las oraciones mismas del lenguaje de la aritmetica, principalmente para poder dar una explicacion uni cada de los patrones de referencia circulares detras,v.g., de las oraciones del mentiroso y G•odel.

Lamentablemente, toda busqueda de este tipo enfrenta serias di cultades, como mostr Leitgeb (2002) y como evidencian los sucesivos intentos que han resultado practi-camente en fracasos. En las dos secciones que siguen presento las di cultades se~nalas por Leitgeb y varios intentos previos de dar nociones de referencia, que considero poco exitosos, con el objetivo de identi car los obstaculos principales que tendr que superar en el proximo cap tulo.

6.2. Condiciones de Leitgeb sobre la referencia

Como se~nala Leitgeb (2002), las nociones intuitiva y tecnica en juego en el debate sobre la autorreferencialidad de la lista de Yablo no son solo incompatibles entre s sino de - cientes. La nocion intuitiva es un concepto incompleto, en tanto no se ha especi cado la referencia por cuanti cacion de cualquier oracion sino solo de aquellas que constan de un cuanti cador universal seguido por una expresion condicional. Para poder emplear este concepto en contextos cient cos es necesaria su complecion.

De acuerdo con Leitgeb, esto no es tarea sencilla, porque toda nocion de referencia deber a satisfacer lo que el denomina `condicion de equivalencia', esto es, la idea de que dos oraciones logicamente equivalentes deben referir a lo mismo. Leitgeb da tres argumentos parcialmente solapados a favor de la condicion de equivalencia.

En primer lugar, sostiene que dos oraciones logicamente equivalentes son extensionalmente equivalentes, no solo en este mundo, sino en todo mundo posible y, por ende, indistinguibles desde un punto de vista logico. Segundo, que la referencia es una nocion semantica, en tanto esta de nida en terminos de la referencia de construcciones nominales a objetos. Y, tercero, que si la condicion de equivalencia no se satisface y, es mas, si dos oraciones aritmeticamente equivalentes no re eren a lo mismo, \[. . .] no philosopher may any longer argue in the following way: \By G•odel's diagonalization lemma, we know that there is a sentence ' such that ' is equivalent to `:T (p'q)' in arithmetic. Thus there is a self-referential sentence, that is, '." (Leitgeb, 2002, p. 9) Y concluye: \If [the equivalence condition] is not true, the self-referentiality or circularity of a sentence does not only depend on what the sentence says, but also in which way its content is being expressed." (Leitgeb, 2002, p. 7). Leitgeb considera que la referencia debe ser extensional.

No obstante, si la referencia intuitiva satis ciera la condicion de equivalencia, nota Leitgeb, todas la oraciones referir an entre s tanto por mencion como por cuanti cacion.

Dadas dos formulas ' y de L_T , existe una formula logicamente equivalente a ' que contiene un termino que denota , porque

$$` ' \$ ' \wedge p q = p q \tag{6.4}$$

Ademas, toda oracion de la forma 8v('(v) ! (v)) es logicamente equivalente a

8v('(v) _ :'(v) ! ('(v) ! (v))):

De valer la condicion de equivalencia todas la oraciones ser an autorreferenciales, se trivializar a el concepto.

Con respecto a la nocion `tecnica' de autorreferencia, como se~nalan Leitgeb (2002) y Cook (2006), es directamente trivial: toda formula ' es un punto jo de algun pre-dicado; v.g., ' ^ x = x, como se ve en (6.4). Aun mas, es posible tambien construir predicados que no sean trivialmente (logicamente) equivalentes a la formula original ', como muestra Cook (2006): diagonalizando debilmente el predicado ' $ (p'q; x) sobre x se obtiene una formula tal que

pat ` $ (' $ (p'q; p q))

lo cual implica que

pat ` ' $ ($ (p'q; p q))

Luego, toda oracion ser a autorreferente.

Podr a replicarse que la equivalencia en (6.3) no es su ciente para que ' sea un punto jo de sino que es preciso una identidad. Una oracion ser a autorreferencial en este nuevo sentido si contiene un termino t tal que

q+ ` t = p (t)q

para alguna formula del lenguaje. Pero si este fuera el caso, como sostiene Leitgeb, se deber a concluir que en lenguajes sin s mbolos de funcion adicionales, como Lpa, donde el lema diagonal fuerte no es un teorema sino solo el debil, no hay autorreferencia. Por ejemplo, oraciones del mentiroso `debiles' dadas por equivalencias como en la prueba del teorema 2.9 de Tarski |i.e., $ :T p q| no ser an autorreferenciales, aunque dan lugar a paradojas tanto como sus contrapartes `fuertes', dadas por identidades. Y, si bien las oraciones de Yablo resultar an autorreferenciales, se podr a formular otras recurriendo a un predicado v a el lema de diagonalizacion debil que no lo ser an.

Como un segundo camino alternativo para bloquear la trivialidad podr a argu-mentarse que no todas las equivalencias en (6.3) han de ser consideradas sino solo aquellas que se obtienen mediante un proceso de diagonalizacion, pero, hasta que no est espe-ci cado que procesos dar an lugar a puntos jos `leg timos' y cuales no, no se puede avanzar con esta propuesta (cf. Halbach & Visser (2014a,b)).

Mientras que Cook decide, ante la trivializacion de la autorreferencia, abandonar el terreno de la aritmetica para la formulacion de paradojas in nitarias y el estudio de los patrones referenciales detras de las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas,[9]
Leitgeb (2002, p. 9), por su parte, plantea una pregunta: \[. . .] what might a formally correct and materially adequate de nition of self-referentiality look like?" y concluye:

> [. . .] we either suspect that much philosophical work lies ahead of us before the question is nally settled, or that otherwise the question is ill-posed, i.e., that the talk of self-referentiality is to be banished from scienti c contexts. (Leitgeb, 2002, p. 11)

Hasta que no se cuente con una nocion adecuada de autorreferencia |lo cual podr a ser imposible| no solo no es posible responder a la pregunta por la autorreferencialidad de la lista de Yablo sino que se debe suspender el juicio con respecto al caracter autorreferencial de las oraciones de G•odel, la oracion del mentiroso y otras expresiones que usualmente son clasi cadas de ese modo, as como la vision referencialista, ortodoxa y no ortodoxa, sobre las paradojas semanticas.

En el cap tulo siguiente respondo al desaf o de Leitgeb y, consecuentemente, a la pregunta por la autorreferencialidad de la paradoja de Yablo y los patrones de referencia subyacentes a las paradojas semanticas, y a otras cuestiones loso cas que tienen que ver con la nocion de autorreferencia y que permanecen sin responder. Las nociones de autorreferencia que ofrezco son compleciones diferentes de la nocion intuitiva pero, ademas, capturan la intuicion detras de la nocion tecnica de Priest. La estrategia yace, si se quiere, en morder la bala: las nociones que proveo estan de nidas a partir de conceptos de referencia que, a diferencia de lo que quiere Leitgeb, son altamente intensionales o, mejor dicho, hiperintensionales (cf. Bj rn Jespersen & Marie Duzi (en prensa)), i.e., no satisfacen la condicion de equivalencia, ni siquiera en su version mas debil: dos oraciones logicamente equivalentes no referiran necesariamente a lo mismo. Sin embargo, como argumento en la seccion 6.4, esta hiperintensionalidad es en realidad una caracter stica deseable y que no conlleva las consecuencias indeseadas que se~nala Leitgeb.

[9]*En (Cook, 2004, 2014a) introduce lenguajes in nitarios dise~nados para este proposito y da de - niciones de referencia, autorreferencia, fundacion, etc. para sus expresiones, de acuerdo con las cuales las oraciones de Yablo formuladas en el nuevo lenguaje no resultan autorreferenciales en ningun senti-do. Posteriormente, Landon Rabern, Brian Rabern, & Matthew Macauley (2013) y Timo Beringer & Schindler (2014)* progresaron en esta direccion.

6.3. Referencia y contenido en la literatura

Los terminos `referencia' y `contenido' (`aboutness') son muy frecuentes en diversas ra-mas de la losof a, especialmente en logica y losof a del lenguaje, pero tambien en epistemolog a, metaf sica, etc. La paradoja de Yablo y las paradojas en general no son la unica razon para trabajar sobre los conceptos correspondientes y dar de niciones for-malmente correctas y materialmente adecuadas de estos terminos. Tampoco lo son las oraciones de G•odel ni otras cuestiones loso co-matematicas. No hay un unico sentido de `referencia' o `contenido' sobre el cual se haya trabajado en la literatura; se ha escrito sobre el contenido o la referencia de estados mentales, proposiciones, hechos, nombres, descripciones, oraciones, etc. Por obvias razones, solo me interesa aplicar los terminos `referencia' o `contenido' a estas ultimas, y voy a ignorar deliberadamente todo lo escrito en otras direcciones.

Pero incluso restringiendose a oraciones hay nociones diferentes en la literatura, de las cuales no todas son relevantes o tendran un lugar en esta seccion, por llevarme demasiado lejos (cf. Rudolf Carnap (1937), David Lewis (1988b) y Yablo (2014)). Ry-le (1933a), quizas el primero en tratar el tema expl citamente, distingue dos sentidos generales de `contenido' aplicado al lenguaje: el contenido ling•u stico y el contenido re-ferencial. Mientras que el contenido ling•u stico se ocupa de lo convenido por la oracion o de lo que los terminos que en ella ocurren designan, el contenido referencial atiende a su estructura sintactica y logica, se basa unicamente en los nombres propios, descripciones (de nidas e inde nidas) y predicados que ocurren en estas oraciones. En palabras de Goodman (1961, p. 3), \Our sole problem (and it will prove troublesome enough) is to determine what a sentence is about, given what its terms designate" (mis italicas). El contenido referencial es una relacion entre las oraciones y los objetos a los cuales sus componentes re eren, sean estos los que fueren. Por ejemplo, el contenido ling•u stico de \La estrella mas brillante sale al atardecer" puede ser Venus o las estrellas, las cosas brillantes, el espacio exterior, o tambien el conjunto de mundos posibles sobre el cual el valor de verdad de esta oracion superviene, etc., pero referencialmente su contenido es, al menos, cualquier cosa que sea una estrella y brille mas que las otras, en la medida en que algo as exista.

El contenido referencial de una oracion es el tipo de concepto que estoy buscando regimentar, una nocion de corte logico aplicable a lenguajes formales. Es la clase de nocion a la que se apunta cuando se habla de autorreferencia relativamente a las pa-radojas, como la del mentiroso o la de Yablo, o cuando se dice que la autorreferencia es posible en la aritmetica y puede ser empleada para probar la incompletitud de esta teor a. >Que principios debe satisfacer una nocion de este tipo? Leitgeb (2002), como se vio en la seccion anterior, menciona tres caracter sticas deseables, no necesariamente en orden de importancia.

Primero, que respete ciertas intuiciones provenientes de la gramatica del lenguaje natural, como que P a re era solo a lo denotado por a y que 8v('(v) ! (v)) re era unicamente a los 's. Basandose en intuiciones de este tipo es que se dice que el menti-roso es autorreferencial mientras que las oraciones de Yablo no lo son. Un concepto de contenido referencial desligado completamente del lenguaje natural carece de sentido. Segundo, que las equivalencias e identidades que se obtienen v a los lemas diagonales debil y fuerte sean evidencia su ciente para la autorreferencia. Y, en tercer lugar, que satisfaga la condicion de equivalencia.

Como mostr Leitgeb, estas tres condiciones no parecen ser compatibles, y en la literatura no hay nociones que las satisfagan simultaneamente. En su lugar, es posible distinguir dos sentidos de `contenido referencial': uno, usualmente llamado `referencia' (reference), ligado a la estructura sintactica y logica, hiperintensional, y otro, bajo el nombre de `contenido' (aboutness) o `contenido logico' |para diferenciarlo de otros tipos de contenido|, que depende de alguna manera de la estructura sintactica pero es extensional, esto es, satisface la condicion de equivalencia. Por ejemplo, mientras que, si a y b no denotan lo mismo, las oraciones a = a y b = b re eren intuitivamente a distintos objetos, su contenido es el mismo, son ambas verdades logicas.

Si bien son muy frecuentes en el lenguaje cotidiano de la comunidad logicopar-lante, las nociones de contenido logico y referencia son utilizadas unicamente en sentido intuitivo y son rara vez el foco de atencion, quizas porque la investigacion es percibida como un callejon sin salida, como se vio hacia el nal del apartado anterior. Incluso cuando se emplean nociones de este tipo central y quasi tecnicamente suele renunciarse a la precision, como el caso de Herzberger:

> Momentarily conceding sense to the notion of aboutness, each sentence has a certain domain. [. . .] The general notion of a domain is more readily indicated than explicated, but the analysis to follow depends on no problematic cases, and ultimately proves independent of any particular explication of `domain'. (Herzberger, 1970, p. 147)

La desatencion al concepto de contenido referencial quedo en evidencia en el debate sobre la paradoja de Yablo, pero tiene tambien consecuencias en otras areas. Re-cientemente, Halbach & Visser (2014a,b) han resaltado la falta y la necesidad de nociones formalmente correctas y materialmente adecuadas de referencia y autorreferencia (entre otras) en lenguajes formales, exhibiendo una serie de problemas loso cos que, sostie-nen, requieren formulaciones precisas de estos conceptos para ser siquiera propiamente enunciados.

La pregunta de Leon Henkin (1952) si la oracion que dice de s misma que es demostrable en una teor a th q es demostrable o independiente en th es el primero de los problemas que Halbach y Visser identi can. Las oraciones de este tipo se conocen como `oraciones de Henkin' de th. Supongase que la formula $Bew_{th}(v)$ del lenguaje de th es un predicado de demostrabilidad para th en la medida en que represente debilmente el conjunto de teoremas de esta teor a (veanse los apartados 1.2.2 y 1.2.3). Por el teorema de L•ob (corolario 1.14), se sabe hoy que, si el predicado de prueba Bew_{th} que se utiliza satisface adicionalmente las condiciones de L•ob (vease el apartado 1.2.3), toda oracion de Henkin para una teor a que contenga pa^{+} debe ser demostrable en esa teor a, pero en 1952 L•ob aun no hab a publicado sus resultados sino que, al contrario, estos estuvieron inspirados en el problema de Henkin (cf. L•ob (1955)).

Como correctamente se~nalan Halbach y Visser, no es su ciente con tener que

$$th \text{ ` } ' \$ Bew_{th}(p'q) \tag{6.5}$$

para que ' sea una oracion de Henkin, porque todo teorema de th, 0 = 0 por ejemplo, satisface (6.5). Pero es ciertamente incorrecto decir que todo teorema de th es, no solo autorreferencial, sino ademas una oracion de Henkin. Una observacion analoga podr a hacerse con respecto a las oraciones de G•odel. Aca queda claro que tanto Henkin como Halbach y Visser no piensan en la nocion de contenido sino la de referencia.

Al igual que en el caso de los puntos jos en la lista de Yablo, es tentador reforzar el criterio y pedir una identidad, un punto jo demostrable mediante el lema diagonal fuerte, esto es, llamar `oracion de Henkin' solo a expresiones de la forma $Bew_{th}(h)$ tales que

$$q^{+} \text{ ` } h = pBew_{th}(h)q \tag{6.6}$$

De hecho, esto es lo que Henkin (1952) y Georg Kreisel (1953), el primero en ofrecer una solucion al problema, tienen en mente: que una oracion re ere a s misma en la medida en que contenga un termino que la denote; lo que Halbach y Visser llaman `criterio de Kreisel-Henkin' para la autorreferencia. Sin embargo, nuevamente, esto choca con la intuicion de que la autorreferencia esta detras de oraciones como el mentiroso debil en la prueba del teorema 2.9 de Tarski, que la autorreferencia es posible incluso en aquellos lenguajes aritmeticos que no contienen s mbolos de funcion, como L_{pa}, como el que G•odel utilizo en su prueba.

En esta seccion recorro los primero los intentos de Ryle, Putnam, Goodman y Urbaniak de dar nociones mas precisas y adecuadas de contenido referencial, se~nalando sus ventajas y desventajas. Algunas de ellas estaran mas cerca de la nocion intuitiva de referencia, otras de la de contenido. En cada caso muestro por que esos intentos son insu cientes, por que es necesario profundizar la investigacion hasta dar con un criterio plenamente satisfactorio, como creo dar en el cap tulo siguiente. Al nalizar el recorrido va a quedar claro que condiciones debe cumplir la nocion formal de referencia que busco, lo cual va a servir posteriormente como hilo conductor.

6.3.1. Referencia segun Ryle

Respondiendo a la clasica pregunta por la estructura logica de las oraciones que contienen terminos cticios y predicados ontologicos como `existencia', `ser un objeto', etc., Ryle (1933b) se ve en la necesidad de dar ciertas precisiones para una nocion de contenido referencial. Su propuesta es la siguiente:

> When a proposition asserts that a something named or described in that proposition has a certain quality, is of a certain kind, is in a certain state, and when further something does, in fact, possess that name or answer to the description, then the proposition is about the thing with that name or with the properties compiled in the description. (Ryle, 1933b, p. 25)

De acuerdo con Ryle, \El Aconcagua tiene la cima nevada" re ere al Aconcagua y \El pico mas elevado de America tiene la cima nevada" tambien, pero \La primera dama de Argentina es morocha" no re ere a nada. Todo esto parece correcto y se corresponde con la nocion intuitiva de referencia por mencion de Leitgeb que introduje en el apartado 6.1.2.

La propuesta de Ryle es, sin embargo, a todas luces limitada. En primer lugar porque se ocupa exclusivamente de descripciones de nidas y deja de lado oraciones con descripciones que se aplican a mas de un objeto, como \Los picos de los Andes tienen la cima nevada", que intuitivamente re ere a los picos de los Andes (y a los Andes), aunque da una pista de como lidiar con ellas. En segundo lugar, porque, al igual que el esbozo de la nocion intuitiva de referencia de Leitgeb, no da idea alguna de la referencia de oraciones que no contienen ni nombres propios ni descripciones de ningun tipo, como \Todo es identico a s mismo" o \Ninguna monta~na que se encuentre en el hemisferio tiene la cima nevada". En otras palabras, deja de lado la referencia por cuanti cacion.

Por otro lado, es claro que una nocion como la de Ryle no puede satisfacer la condicion de equivalencia, so pena de ser trivial, por ejemplos como (6.4). Ryle ofrece una nocion que depende absolutamente de las construcciones nominales que ocurren en las oraciones; es hiperintensional y, por ende, mas cerca de la referencia que del contenido.

6.3.2. Contenido logico segun Putnam

Putnam (1958), al contrario de Ryle, se centra en el contenido referencial de oraciones cuanti cadas y busca una nocion que satisfaga la condicion de equivalencia. Ademas, tambien desea rescatar la primera condicion de Leitgeb: desde su punto de vista, una oracion como \Todas las monta~nas tienen la cumbre nevada" es acerca de las monta~nas y no de las cosas que tienen la cumbre nevada. Pero como esta expresion es logicamente equivalente a \Las cosas que no tienen la cumbre nevada no son monta~nas", que es acerca de las cosas que no tienen la cumbre nevada y no sobre las que no son monta~nas, hay una tension que resolver.

Putnam propone una nocion de contenido logico que relaciona oraciones con clases de objetos. Sin embargo, formalmente la de ne entre oraciones y formulas del lenguaje con una variable libre que, de alguna manera, identi ca con la clase de objetos que estas formulas de nir an. Sea L un lenguaje de primer orden con un numero nito de s mbolos de predicado monadicos $P_1; : : : ; P_m$ y constantes de individuo $a_1; : : : a_n$. Putnam sugiere primero sustituir la pregunta por si una oracion es acerca de una clase con la pregunta por la cantidad de informacion que esta oracion da sobre esta clase. Para eso recurre a las descripciones de estado y a la cantidad de informacion simpliciter que una oracion da.

De nicion 6.3 (Descripcion de estado). Una oracion 2 L es una descripcion de estado sii es una conjuncion que, para cada letra de predicado P y constante de individuo a, tiene como conyunto a Pa o a :Pa, pero no a ambos.

Notese que toda oracion de L que no sea una contradiccion puede escribirse como una disyuncion de descripciones de estado, porque los cuanti cadores en el lenguaje no son mas que conjunciones nitas.

De nicion 6.4 (Cantidad de informacion). Sea P una funcion de probabilidad tal que, si a es una constante de individuo y P una letra de predicado, P(Pa) = $\frac{1}{2}$. La cantidad de informacion que da una oracion ' 2 L (ci(')) es igual a 1 P(').[10]

Luego, una contradiccion da el maximo de informacion, seguida por las descripcio-nes de estado, y las tautolog as dan 0 informacion. Una conjuncion de formulas atomicas

10 Esta es, en realidad, una simpli cacion de la propuesta de Putnam, con identicas consecuencias.

o sus negaciones da siempre mas informacion que cada uno de sus conyuntos, que a su vez dan mas informacion que puestos en disyuncion con alguna otra oracion independiente.

Para establecer la cantidad de informacion que una oracion da acerca de una clase es preciso que se sepa que cuenta como informacion acerca de una clase: todas las formulas que a rmen o nieguen que algo pertenece a esta clase y, una vez que se ha dicho que tales o cuales cosas estan en la clase, todo lo que se a rme o niegue sobre estas cosas. Por ejemplo, '(a_1) ^ :'(a_2) ^ P_1(a_1) ^ P_3(a_2) da informacion sobre la `clase' ' (que puede ser una formula compleja) pero no toda la informacion que da es acerca de ', i.e., P_3(a_2) no es acerca de ' porque se dijo que :'(a_2).

De nicion 6.5 (Informacion sobre una clase). La informacion que una oracion ' 2 L da sobre una clase 2 L (I (')) es la conjuncion de P_1a_1 ! P_1a_1 con

1. todas las formulas de la forma (a) o : (a) que ' implica logicamente, donde a es una letra de individuo, y
2. todas las formulas de la forma Pa o :Pa que ' implica logicamente, donde a es una letra de individuo tal que ' implica logicamente (a) y P una letra de predicado.

Agrego P_1a_1 ! P_1a_1, cuya cantidad de informacion es siempre 0, como conyunto a todo I (') para que I_x(y) tenga una imagen cuando y no de informacion alguna sobre x. En cualquier otro caso voy a omitir este conyunto.

De nicion 6.6 (Cantidad de informacion acerca de una clase). La cantidad de informacion que una oracion ' 2 L que no es una contradiccion da sobre una clase es la cantidad de informacion que da la formula que resulta de

1. escribir ' como una disyuncion de descripciones de estado $'_1$; : : : ; $'_k$ contradicto-rias tomadas de a dos y, luego,

2. reemplazar cada $'_i$ por I ($'_i$).

Es preciso dejar de lado las contradicciones porque no pueden expresarse como disyunciones de descripciones de estado contradictorias tomadas de a dos.

De nicion 6.7 (Contenido logico). Si '; 2 L y ' no es una contradiccion, ' es acerca de la clase sii la cantidad de informacion que da y la cantidad de informacion que da sobre coinciden, i.e., si ci(I (')) = ci (').

Grosso modo, lo que se esta pidiendo es que ' solo a rme cosas sobre los miembros de . Oraciones como 8x(P_1x ! P_2x) son acerca de P_1, porque, si a_1 y a_2 son las unicas constantes de individuo del lenguaje, expresarlas como una disyuncion de descripciones de estado da por resultado la formula

($P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _
($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ :$P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ ($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ :$P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ :$P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$) (6.7)

cuya cantidad de informacion es $\frac{7}{16}$. Reemplazar cada uno de estos disyuntos por su informacion sobre P_1 resulta en

($P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_2)$) _
($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_2)$) _ ($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$) _
(:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$)

que se puede abreviar como

($P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_2)$) _
($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$)

cuya cantidad de informacion tambien es $\frac{7}{16}$. Por otro lado, 8x(P_1(x) ! P_2(x)) no es acerca de P_2, porque reemplazar los disyuntos de (6.7) por su informacion sobre P_2 da

($P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ $P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _
($P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ :$P_1(a_2)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _
($P_1(a_2)$ ^ :$P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ ($P_1(a_1)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$) _
(:$P_1(a_2)$ ^ :$P_2(a_1)$ ^ $P_2(a_2)$) _ (:$P_1(a_1)$ ^ $P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$) _
(:$P_2(a_1)$ ^ :$P_2(a_2)$)

cuya cantidad de informacion es 0.

Estos resultados pueden extenderse a cualesquiera oraciones de L de la forma 8v('(v) ! (v)), donde ' y no son necesariamente letras de predicado. Ahora bien, 8x(P_1(x) ! P_2(x)) no solo es acerca de P_1 sino tambien de :P_2. Esta es una consecuencia inevitable de la condicion de equivalencia.

Proposicion 6.8 (Putnam). Si dos oraciones '; 2 L son logicamente equivalentes, tienen el mismo contenido logico.

Luego, si bien la nocion de contenido logico de Putnam depende en alguna medida de las notas particulares de L, es un concepto extensional. Otra consecuencia de la de nicion 6.7 es que las verdades logicas, al dar 0 informacion, son acerca de todo aunque no digan nada, mientras que el contenido logico no esta siquiera de nido para contradicciones. Y de esto se sigue que la mencion de una clase en una oracion no es condicion su ciente para que esta oracion sea acerca de esa clase, a diferencia del concepto de referencia de Ryle.

Esta de nicion de contenido logico, tambien a diferencia de la de Ryle, se aplica a todas las oraciones de L, aunque L no puede ser cualquier lenguaje de primer orden; la nocion de contenido de Putnam tiene un alcance limitado. En primer lugar, tal como esta formulada, solo se aplica a lenguajes con un numero nito de terminos cerrados y letras de predicado, esto es, no sirve como criterio de contenido de oraciones de L_{pa} o sus extensiones. Segundo, el contenido logico solo esta de nido para predicados/clases monadicas, aunque la de nicion 6.7 sugiere un modo natural de extenderse a predicados de cualquier aridad, trabajando con clases de pares ordenados en lugar de objetos sueltos.

Ademas, si bien se comporta perfectamente con respecto a oraciones universales seguidas por condicionales, la nocion de Putnam no es del todo adecuada para lidiar con el contenido de otro tipo de oraciones y, por lo tanto, no puede dar lugar a un concepto satisfactorio de autorreferencia. Supongase que se trabaja en un sublenguaje de L_T dado por dos s mbolos de predicado Tv y At(v) (aparte de =, que es un s mbolo logico que no aporta informacion) para la verdad y el conjunto de oraciones atomicas del lenguaje y tres terminos, l, p0 = 0q y pT p0 = 0qq, que denotan :Tl, 0 = 0 y T p0 = 0q, respectivamente. De acuerdo con Putnam (1958, p. 128),

> If we adopt Quine's suggestion that any individual be identi ed with its unit class, then we also have the result that in the case of singular sentences, | a is B or B(a), |the traditional subject term is the strict subject [contenido logico] of the sentence.

Efectivamente, oraciones como :Tl son acerca de x = l, porque se pueden rees-cribir equivalentemente como 8x(x = l ! :Tx). Identi cando la clase x = l (f:Tl g) con :Tl (la denotacion de l), la oracion es acerca de :Tl, de s misma. Pero tambien es acerca de (la extension de) T y, si se extiende la sugerencia de Quine para clases unitarias a todas las clases, :T l es acerca de todas las oraciones que caen bajo la extension de T , sean estas cuales fueren. Si T p0 = 0q esta en la extension de T , como es acerca de T , tambien deber a decirse que es acerca de s misma. En general, todas las oraciones de la forma T t que pertenezcan a la extension de T son acerca de s mismas.

Por otro lado, :T l ^ At(p0 = 0q) no es acerca de :T l de acuerdo con la de nicion 6.7, porque da mas informacion que :T l. En general, una conjuncion no es necesariamen-te acerca de las clases sobre las cuales son los conyuntos. Esto puede resultar peligroso, porque, v.g., :T l ^ At(p0 = 0q) en pat es equivalente a :T l, pero el enfoque de Putnam no puede detectar ningun patron de referencia sospechoso ah . La autorreferencia de :T l queda invisibilizada por la conjuncion. Una solucion posible consiste en modi car la de nicion de contenido logico de modo tal que una oracion sea acerca de una clase en la medida en que de una cantidad de informacion mayor a 0 sobre esa clase. Lamen-tablemente, este cambio no solucionar a los otros problemas que padece la nocion de Putnam.

El contenido logico de Putnam subgenera y sobregenera casos de contenido logico y, en particular, para oraciones que son acerca de s mismas o que tienen un patron de referencia circular. No es una nocion materialmente adecuada y, por tanto, no puede utilizarse para estudiar las paradojas y otros fenomenos semejantes.

6.3.3. Contenido logico segun Goodman

Goodman (1961) comparte con Putnam la intuicion de que la condicion de equivalencia debe satisfacerse, pero rechaza la primera condicion de Leitgeb: que oraciones como \Todas las monta~nas tienen la cumbre nevada" sea acerca de las monta~nas y no de las cosas que tengan la cumbre nevada. En sus propios terminos,

> By our de nition of absolute aboutness, the statement \Crows are black" is about black things as well as about crows; and this seems to me quite as it should be. Ryle and Putnam treat [that statement] as about crows but not about black things; and no doubt it is often thought of as `telling us something about' the one but not the other. But whether we consider it on a given occasion as telling us about crows or black things may depend upon whether the statement occurs as an answer to a question like \What is the colour of crows?" or to a question like \What are some black things?" (Goodman, 1961, pp. 7-8)

Notese que Goodman esta suponiendo, aritstotelicamente, que en todo enunciado uni-versal seguido por un condicional, como \Los cuervos son negros", la formula que ocupa el lugar del antecedente es satisfecha siempre por al menos un objeto, lo cual no es necesariamente el caso en la logica actual.

Goodman propone dos nociones de contenido logico. Una de ellas, el contenido logico absoluto, satisface la condicion de equivalencia desatendiendo un poco la forma de las oraciones, mientras que la otra, el contenido logico inmediato, atiende mas a la sintaxis pero la condicion de equivalencia falla. Esta ultima parece ser mas bien un concepto de referencia. Ambas relaciones se dan entre oraciones, por un lado, y objetos o clases por otro, esto es, tanto los objetos como las clases de las cuales habla una expresion pueden formar parte de su contenido logico. Esta diversidad de contenido es razonable en tanto Goodman trabaja informalmente sobre lenguajes de segundo orden, donde las clases son un segundo tipo de objeto sobre los cuales se cuanti ca. Dado que esta investigacion se limita a lenguajes de primer orden, se podr a ignorar lo referente a clases en las de niciones que siguen, aunque no es la intencion original del autor.

Sea L un lenguaje de segundo orden cualquiera (vease el apartado 1.2.5). La logica de segundo orden expande la de primer orden con principios para los nuevos cuanti cadores. La regla de eliminacion es analoga a la de los cuanti cadores de primer orden, mientras que su introduccion esta dada por el esquema de axioma de comprension (cf. Shapiro (1991)).

De nicion 6.9 (Contenido logico absoluto). Una oracion ' 2 L es absolutamente acerca de un objeto o o un conjunto C sii hay un termino o formula a tal que ' implica logicamente 2 L, a ocurre en , y denota o o de ne C, correspondientemente, pero ' no implica ninguna generalizacion sobre ninguna parte de .[11]

Al estar dada en terminos de implicacion logica, la nocion de contenido logi-co absoluto esta cerrada bajo la condicion de equivalencia, es una nocion plenamente extensional. Al igual que para la nocion de Putnam, no es su ciente que una oracion mencione un objeto o una clase para que sea acerca de ella, como evidencian las verda-des logicas y las contradicciones. Las verdades logicas no son acerca de ningun objeto y, practicamente, de ninguna clase, mientras que las contradicciones no son absolutamente acerca de nada. Por ejemplo 8x(Px _ :Px) no es acerca de ningun objeto porque las verdades logicas no implican verdades sobre objetos particulares que no impliquen a su

[11] *Estrictamente hablando, aunque usa el termino, Goodman no trabaja con una nocion de consecuencia logica sino con un concepto de implicacion anal tica segun el cual, por ejemplo, la oracion del mentiroso es autocontradictoria. Esto aleja mucho su nocion de los propositos de esta investigacion, como se~nala Urbaniak (2009), porque si el mentiroso es contradictoria, como se ve mas adelante, no es absolutamente*

acerca de nada y, por ende, jamas puede resultar autorreferencial.

Consecuentemente, modi co un poco las de niciones de Goodman entendiendo el termino `implicacion logica' literalmente.

vez sobre todos los otros objetos, pero tampoco es acerca de la clase de nida por P , porque implica 8X8x(Xx _ :Xx).

Que una oracion sea acerca de una clase no implica que tambien sea acerca de los objetos que le pertenecen. V.g., si 8x'(x) es una contingencia, es acerca de la clase de nida por la formula ', sea lo que fuere, pero no necesariamente acerca de un objeto particular. De acuerdo con Goodman, la nocion de contenido guarda cierta analog a con la idea de elegir: del mismo modo en que no se puede elegir todo, porque eso no ser a ya elegir, no se puede ser acerca de todos los objetos, o de todas las clases. Tampoco es 8x('(x) ! (x)) acerca de los 's sino acerca de las clases que las formulas ' y de nen.

El requisito de que ' no implique ninguna generalizacion sobre ninguna parte de en la de nicion 6.9 sirve para evitar la sobregeneracion del criterio. Toda formula ' 2 L implica logicamente a ' _ (a) para cualquier y cualquier a, sea que denote un objeto o un conjunto. Como ' tambien implica 8x(' _ (x)), la generalizacion de ' _ (a) sobre a, el criterio no permite inferir que ' es acerca de lo que a denota del simple hecho de que ' implica ' _ (a).

Pero Goodman no solo solicita que (a) no sea generalizable sobre a sino sobre ninguna de sus componentes, porque quiere evitar que una oracion que es expl citamente acerca de una clase lo sea tambien de todas las clases que la contienen. Tomese como ejemplo una oracion contingente cualquiera '(a). '(a) es acerca de la clase de los 's. 8x(('(x) ! (x)) ! (a)) se sigue logicamente de '(a) y, a la vez, no es generalizable sobre a. No obstante, la de nicion de Goodman no permite inferir que entonces '(a) es acerca de la clase de los s, porque, v.g., 8X8x(('(x) ! Xx) ! Xa) es una generalizacion de 8x(('(x) ! (x)) ! (a)) que tambien se sigue logicamente de '(a).

Sin embargo, tomando una particular, se puede exhibir una formula en la cual ocurre cuya generalizacion sobre no se sigue logicamente de '(a). Sea b una constante de individuo que denota un objeto que no pertenece a la clase de nida por ' y sea (x) := '(x) _x = b. Luego, (a) se sigue logicamente de '(a), mientras que 8XXa no. Si '(a) fuera acerca de la clase de los s en la medida en que sea posible dar una formula que contenga y que se siga logicamente de '(a) pero que no sea generalizable sobre , deber a concluirse que toda formula acerca de la clase de los 's es asimismo acerca de todas las clases que los contienen. Como se~nala Goodman, la de nicion 6.9 bloquea este tipo de casos porque, si bien 8XXa no se sigue de '(a), existe otra generalizacion sobre `alguna parte' de (a) que s se sigue, i.e., 8X(8x('(x) ! Xx) ! Xa). Goodman entiende entonces por `generalizacion sobre alguna parte de ' no solo la cuanti cacion sobre alguna de sus componentes sino la relativizacion de estos cuanti cadores a otras expresiones.

Lamentablemente, este ultimo requisito es demasiado restrictivo. Si '(a) no es

acerca de la clase de nida por '(x) _ x = b porque 8X(8x('(x) ! Xx) ! Xa) es una generalizacion sobre alguna parte de '(a) _ a = b y es consecuencia logica de '(a), mediante un razonamiento analogo puede concluirse que '(a) no es tampoco acerca de la clase de los 's. Porque 8X(8x('(x) ! Xx) ! Xa) tambien es una generalizacion sobre alguna parte de '(a), sobre la relativizacion de '(a) a 8x('(x) ! '(x)), i.e., 8x('(x) ! '(x)) ! '(a), que es logicamente equivalente a '(a). Pero, al menos a la luz del contraejemplo dado, no veo necesidad de adoptar esta version amplia de `generalizacion sobre alguna parte de '. Si (x) := '(x) _ x = b, (a) es una instancia de 8X('(a) _ Xa) que, no solo se sigue logicamente de '(a) sino que tambien es una generalizacion sobre una parte de .

Aun dejando de lado esta ampliacion inconveniente de la idea de generalizacion, la nocion de contenido logico absoluto de Goodman tiene ciertas consecuencias contrain-tuitivas. Al igual que el contenido logico de Putnam y acarreando los problemas que esto genera, si una oracion ' de L es absolutamente acerca de un objeto x, su conjuncion con otra oracion no es necesariamente absolutamente acerca de x. Por ejemplo, si '(a) es acerca del objeto denotado por a, '(a) ^ 8x'[x=a] ya no es acerca de ese objeto, porque puede generalizarse sobre a.

Por otro lado, el contenido logico absoluto de Goodman, aun con las restricciones sugeridas, parece sobregenerar casos de referencia a clases. 8x('(x) ! (x)) es acerca de las clases de los 's y de los s, pero por la condicion de equivalencia tambien acerca de las clases de los : s y los :'s. Aun mas, toda oracion que es absolutamente acerca de algo, ya sea un objeto o una clase, es acerca de la clase universal (en un modelo, el dominio), porque implica logicamente 8x x = x pero no 8X8xXxx. De acuerdo con Goodman estas son consecuencias deseables de su de nicion, pero para esta investigacion son perjudiciales. Oraciones `mentirosas' como 8x('(x) ! :Tx) donde '(x) se aplica exclusivamente a 8x('(x) ! :Tx), si bien son acerca de la clase de los 's, o sea, de f8x('(x) ! :Tx)g, no son acerca de 8x('(x) ! :Tx).

Aca no hay lugar para la sugerencia de Quine de identi car objetos con sus clases unitarias o, mas generalmente, de entender que una oracion es acerca de ciertos objetos cuando en realidad es acerca del conjunto que los tiene por miembros; porque en ese caso la nocion de Goodman se trivializar a: como toda oracion que es acerca de algo es acerca de la clase universal, toda oracion ser a absolutamente acerca de todos los objetos o acerca de nada. Tampoco tiene sentido realizar esta identi cacion con clases unitarias exclusivamente, porque se pueden formular otras oraciones del mentiroso de la forma 8x('(x) ! :Tx) en las cuales, v.g., '(x) es satisfecha por 8x('(x) ! :Tx) y por cualquier verdad logica.

Estos casos de sub y sobregeneracion de contenido logico absoluto hacen que el concepto no sea adecuado ni sirva para formular una nocion precisa y correcta de autorreferencia. Goodman da una segunda nocion de contenido, que se aproxima mas a un concepto de referencia.

De nicion 6.10 (Contenido logico inmediato). Una oracion ' 2 L es inmediatamente acerca de un objeto o o un conjunto C sii hay un termino o formula a que ocurre en ' y denota o o de ne C, segun corresponda, y ' no implica logicamente ninguna generalizacion sobre ninguna parte de '.

Una oracion es inmediatamente acerca de un objeto o clase solo si la menciona; el contenido inmediato depende de la sintaxis de la oracion. A diferencia del absoluto, no satisface la condicion de equivalencia: 8x('(x) ! (x)) puede ser inmediatamente acerca de las clases de los 's y los s, pero no acerca de la de los : s o los :'s, porque estas no estan mencionadas en la oracion. El contenido logico inmediato es una nocion hiperintensional. Como consecuencia, las oraciones que son acerca de algo ya no son necesariamente acerca de la clase universal; por ejemplo, 8x x 6= x es solo acerca del conjunto vac o, lo cual puede signi car una ventaja a la luz de esta investigacion.

El contenido logico inmediato tiene el mismo problema que mencion acerca del contenido absoluto, i.e., que es demasiado restrictivo debido al requisito de `ninguna generalizacion sobre ninguna parte', y puede arreglarse tambien no permitiendo que una generalizacion relativice sus cuanti cadores. En ese caso, a pesar de que Goodman considera que su nocion de contenido inmediato es inutil por no satisfacer la condicion de equivalencia, el concepto ser a mucho mas fruct fero, en tanto permitir a la identi cacion de las clases con sus objetos como contenidos, aunque no evitar a las di cultades que tiene en comun con la nocion de Putnam.

6.3.4. Contenido logico segun Urbaniak

Urbaniak (2009) es el primero en participar activamente del desaf o de Leitgeb de dar una nocion formalmente correcta y materialmente adecuada de autorreferencia para poder responder a la pregunta por la autorreferencialidad de la paradoja de Yablo y otras cuestiones semejantes. Busca una nocion de contenido referencial que complete lo que llame `nocion intuitiva' en el apartado 6.1.2. Para poder satisfacer la condicion de equivalencia, se centra en una nocion de informatividad diferente de la de Putnam. El resultado es un concepto bastante cercano al contenido logico absoluto de Goodman.

Tras considerar ejemplos como (6.4), Urbaniak (2009, p. 243) sostiene, contrario a Ryle, que

> This however indicates that the bare fact that a constant that names an object occurs in a sentence is not su cient for that sentence to be about that object. This motivates certain Wittgensteinian intuitions about what sentences are about (\Therefore the propositions of logic say nothing."). In a sense, to be about x, ' would have to say something about x, provide us with some contingent information about it.

Claramente, estas intuiciones wittgensteinianas se corresponden mas con una nocion de contenido que con una de referencia. Una oracion puede hacer referencia a un objeto diciendo unicamente algo trivial o, si se quiere, `nada', acerca de el.

>En que casos una oracion provee informacion contingente acerca de algo? Sea L un lenguaje de primer orden con 0 y mas de un termino y con 0 o mas de una letra de predicado n-adica no logica, para cada n.

De nicion 6.11 (Informatividad). Si ' es una oracion de L, t un termino cerrado y P una letra de predicado no logica de aridad n, t (P) ocurre informativamente en ' sii ocurre en ella y existe un termino cerrado s (Q, de la misma aridad que P) diferente de t (P) tal que ' no es logicamente equivalente a '[s=t] ([Q=P]).

Esta nocion se acerca bastante a la idea de Goodman de no permitir que los terminos y predicados en una oracion que es acerca de lo que estos denotan sean generalizables modulo equivalencia logica, pero deja de lado las restricciones adicionales de Goodman que llevan a una nocion demasiado estrecha. Sea M una interpretacion de L.

De nicion 6.12 (Contenido logico informativo). Una oracion ' 2 L es informativa-mente acerca de un objeto o relativamente a M sii o 2 jMj y

1. hay un termino t que ocurre informativamente en ' tal que t^M = o, o
2. hay un predicado no logico n-adico P que ocurre informativamente en ' tal que o es un componente de alguna n-tupla en P^M.

Este concepto se comporta adecuadamente con respecto a los casos intuitivos marcados por Leitgeb. Una oracion de la forma '(a) en la cual a ocurre informativamente es acerca de lo denotado por a. Por ejemplo, T l en (6.2) es acerca del mentiroso. Y oraciones de la forma 8v_1 : : : v_n(P_1(v_1; : : : ; v_n) ! P_2(v_1; : : : ; v_2)) son acerca de los objetos pertenecientes a la extension de P_1 en M. Ademas, el contenido logico informativo esta de nido para todas las oraciones de L y satisface la condicion de equivalencia.

Proposicion 6.13 (Urbaniak). Si ' y son oraciones logicamente equivalentes de L, ' es acerca de o relativamente a M sii es acerca de o relativamente a M.

El contenido logico informativo es de caracter extensional pero depende en alguna medida de la sintaxis de las oraciones, aunque no de su estructura logica, porque solo atiende a los s mbolos no logicos que ocurren en ellas. A partir de la de nicion de contenido logico informativo Urbaniak da un concepto de autorreferencia.

De nicion 6.14 (Autorreferencia informativa). Una oracion ' 2 L es informativamente autorreferente relativamente a M sii el par ordenado h'; 'i[12] pertenece a la clausura transitiva del contenido logico informativo relativo a M.

Como Urbaniak mismo admite, el criterio no es lo su cientemente selectivo, so-bregenera casos de contenido. Por un lado, T I es no solo acerca de :T I (lo que I denota) sino de los objetos en la extension de T . Dado que T ocurre informativamente en cual-quier oracion de la forma T t, al igual que en el caso de Goodman, todas ellas son acerca de los objetos en la extension de T y, por ende, si T t 2 T ^{M}, T t es acerca de s misma, sin importar lo que t denote: T p0 = 0q es autorreferente bajo las mejores interpretaciones de T .

Por otro lado, como para Goodman, 8v$_{1}$: : : v$_{n}$(P$_{1}$(v$_{1}$; : : : ; v$_{n}$) ! P$_{2}$(v$_{1}$; : : : ; v$_{2}$)) no solo es acerca de los miembros de P$_{1}^{M}$ sino tambien de los de P$_{2}^{M}$. Pero oraciones de la forma 8v$_{1}$: : : ; v$_{n}$(' !), donde ' y son funciones proposicionales contingentes que no son s mbolos de predicado, no son necesariamente acerca de las clases que estas formulas de nen en M. Por ejemplo, si se trabaja en L$^{+}_{pa}$ con N^{+},

$$8x(:Bew_{pa^{+}}(x) ! Bew_{pa^{+}}(:\dot{}x))$$

no es acerca de (los codigos de) las oraciones de L$^{+}_{pa}$ que no son teoremas de pa^{+} ni de los teoremas que son negaciones. Ni siquiera es acerca de los teoremas de pa^{+}, porque Bew$_{pa^{+}}$ (x) y Bew$_{pa^{+}}$ (:.x) son formulas complejas, sino de todos los objetos mencionados en estas formulas y todos aquellos que caen bajo la extension de algun predicado primitivo no logico que ocurra en ella. Como L$^{+}_{pa}$ no contiene predicados no logicos, el contenido logico informativo de esta oracion se aleja bastante de lo esperado.

Ademas, nuevamente siguiendo a Goodman, las oraciones 8xPx, 8x:Px y :8xPx, donde P es un s mbolo de predicado no logico, son todas acerca de los elementos de P ^{M}.

A favor de Urbaniak, y eso pone su nocion en una mejor posicion con respecto a las de Putnam y Goodman, si una oracion ' es acerca de o y su conjuncion con otra oracion no da lugar a una verdad logica o a una contradiccion, '^ es tambien acerca de x. Esto evita problemas como el se~nalado en el anteultimo parrafo del apartado 6.3.2. Pero si := :', al ser la conjuncion una contradiccion, no sera acerca de nada. La

[12] *O a traves de una codi cacion, i.e., el par ordenado h#('); #(')i.*

diferencia con Goodman esta dada por el requisito adicional que impone Urbaniak sobre la condicion de no informatividad: para que a ocurra informativamente en una oracion de la forma P a es su ciente que P a no sea logicamente equivalente a toda expresion de la forma P b, donde b es un termino, no es necesario que no implique todas esas expresiones.

Urbaniak reformula la paradoja de Yablo con una serie de predicados primitivos $P_1; : : : ; P_n; : : :$ para los antecedentes de los condicionales, donde P_n se aplica a todas y solo aquellas oraciones que se encuentran por debajo de la n-esima en la lista, y otra serie de predicados primitivos $U\ ntrue_n$ para los consecuentes, cada uno de los cuales se comporta como un predicado de no verdad solo para las oraciones de ndice mayor a n. Las oraciones de Yablo ahora son de la forma

$$8x(P_n(x) \ ! \ U\ ntrue_n(x))$$

para cada n 2 !. Bajo esta reformulacion (y no bajo la que se vio en 6.1.1) es posible responder a la pregunta por la autorreferencia de (esta version de) la lista de Yablo utilizando la nocion de contenido informativo, negativamente. Con respecto a las oraciones de Henkin, el criterio carece de utilidad, al igual que para evaluar oraciones del mentiroso y otras expresiones paradojicas en lenguajes aritmeticos.

Finalmente, Urbaniak responde al tercer argumento de Leitgeb para la condicion de equivalencia, aquel en el cual Leitgeb sostiene que la referencia o el contenido no deben ser preservados unicamente bajo equivalencia logica sino m nimamente bajo equivalencia en la aritmetica.

> What should we make of Leitgeb's complaint that we won't be able to say that the diagonalization lemma allows us to construct self-referential senten-ces? Well, the answer is simply that on this notion of aboutness, the diagonal construction doesn't give us a self-referential sentence, and that's it. This, however, doesn't mean that we cannot use the phrase `self-referential' in a weaker sense, which allows us to call a formula self-referential if it is equivalent (modulo syntactic encoding and Peano arithmetic) to a formula in which its code number occurs. (Urbaniak, 2009, p. 284)

De acuerdo con el mismo Urbaniak, su nocion de autorreferencia no es capaz de explicar porque el lema diagonal debil (teorema 1.7) da lugar a oraciones autorreferen-ciales, uno de los desiderata fundamentales. Si bien est probablemente en lo cierto, no es por las razones que el cree. Ciertamente, una equivalencia no logica sino aritmetica no es su ciente, de acuerdo con la nocion de autorreferencia informativa, para esta-blecer autorreferencia. Pero hay mas que eso detras de los puntos jos debiles y sus equivalencias.

Si se atiende a la prueba del teorema 1.7 para una teor a th q se ve que las oraciones tales que th ` $ '(p q) son de la forma

8v(Diag(p8v(Diag(u; v) ! '(v))q; v) ! '(v)):

Si Diag fuera un primitivo del lenguaje, estas ultimas expresiones ser an acerca de las componentes de algun par ordenado que pertenezca a $Diag^{N}$ y, por ende, acerca de : ser a informativamente autorreferencial, aunque tambien ser a acerca de todo, porque Diag representa una funcion, toda expresion de L_{pa} es diagonalizable. Sin embargo, como Diag no es un primitivo, el contenido informativo de depende de la formula particular que se utilice para representar la funcion de diagonalizacion; no es claro que sea de hecho informativamente autorreferencial.

Urbaniak sugiere que aun es posible llamar autorreferentes a expresiones como (donde q ` $ :T p q) en un sentido mas debil de acuerdo con el cual una oracion es autorreferencial si es aritmeticamente equivalente a otra en la cual `su codigo ocurre'. Pero como se vio en 6.1.2, este sentido `mas debil' es trivial y es, por ende, justamente lo que hab a que precisar, regimentar, transformar en una nocion formalmente correcta y materialmente adecuada que pueda con legitimidad formar parte del discurso cient co. El sentido en el cual es autorreferente mientras que 0 = 0 no lo es es el sentido de `autorreferencia' que importa, sobre el cual debe trabajarse, porque es de caracter intuitivo todav a, permanece en las penumbras de la precienti cidad. El concepto de contenido informativo de Urbaniak, tal como esta formulado, no es util para el estudio de las paradojas semanticas.

6.4. La condicion de equivalencia

Ninguna de las nociones que he introducido hasta ahora resulta satisfactoria a la luz de las condiciones de Leitgeb. Por un lado, las de Putnam, Goodman y Urbaniak relajan demasiado la primera condicion, no respetan las intuiciones basicas de la llamada `nocion intuitiva'. Su estrategia consiste en agregar requisitos adicionales a la mera mencion de un objeto o cuanti cacion sobre una clase para extraer conclusiones con respecto al con-tenido de una oracion. Los tres autores coinciden en que el requisito adicional debe tener que ver con la no trivialidad, la contingencia, la informatividad, tanto de las ocurrencias de los terminos como de los predicados o formulas, y dejan de lado completamente la forma logica de las oraciones. Como los s mbolos de predicado son tratados del mismo modo que los nombres de individuo, independientemente de la posicion que ocupen en una oracion, las consecuencias son contraintuitivas. Por ejemplo, oraciones de la forma

P a son acerca, no solo de lo denotado por a, sino de los P s lo cual, como se vio, no es deseable.

Por otro lado, si no se refuerza el requisito de la mencion o cuanti cacion para establecer referencia o contenido, si, como en el caso de Ryle, se atiene una plenamen-te las intuiciones de la primera condicion de Leitgeb, la condicion de equivalencia es insatisfacible, so pena de trivialidad.

No es claro entonces que una nocion de contenido referencial que satisfaga las tres condiciones de Leitgeb sea logicamente posible. Como ya suger , estas pretenden fusionar dos conceptos: la referencia y el contenido logico, los cuales son diferentes y podr an no ser fusionables. Un intento de hacerlo consistir a en agregar un tercer requisito a la ocurrencia y la informatividad, una condicion que atienda a la forma logica de las oraciones. Por ejemplo, que las oraciones atomicas solo sean acerca de los objetos que mencionan informativamente, que oraciones como 8v('(v) ! (v)) sean acerca de los 's y los no s en la medida en que ' (o ' y) ocurra informativamente, etc. Un abordaje de este tipo no ha sido aun explorado y tal vez valga la pena hacerlo. Ser a preciso proceder con cuidado para no caer en inconsistencias, armonizando la condicion de equivalencia con las clausulas que indican el contenido de cada oracion segun su forma y, por otra parte, las clausulas composicionales, sin las cuales la de nicion ser a imposible. En cualquier caso, algunas intuiciones deber an dejarse de lado: algunas oraciones atomicas que mencionen ciertos objetos no ser an acerca de ellos o seran acerca de todo y algunas oraciones que se obtienen mediante un mecanismo de diagonalizacion no resultar an autorreferenciales. Para verlo, tomese como ejemplo la oracion que resulta de diagonalizar fuertemente x = x, i.e., hay un termino de L^{+}_{pa} tal que q^{+} ` t = pt = tq. t = t es una verdad logica y, como tal, o bien no es acerca de nada o bien es acerca de todo, pero en ningun caso sera exclusivamente acerca de t y, por ende, nunca va a ser propiamente autorreferencial.

De cualquier modo, mucho menos queda claro que la condicion de equivalencia sea una condicion necesaria de toda de nicion de contenido referencial cuyo n sea colaborar en el debate alrededor de la paradoja de Yablo y sirva para estudiar los patrones referen-ciales de las paradojas y otras oraciones en el lenguaje de la aritmetica. A continuacion examino los argumentos que Leitgeb da a su favor.

En primer lugar, Leitgeb aduce que dos oraciones que son logicamente equiva-lentes son indistinguibles desde un punto de vista logico y, por ende, extensionalmente equivalentes en todo mundo posible. Como se~nala Urbaniak (2009), esto es cierto, pero tambien es cierto que cuando pasa de utilizarse las formulas a hablar acerca de ellas estas se tornan distinguibles. De otro modo no podr a decirse, justamente, que hay oraciones diferentes que son logicamente equivalentes, que dos oraciones diferentes pero logicamen-te equivalentes son indistinguibles desde un punto de vista logico, etc. En otras palabras, ninguna nocion hiperintensional har a sentido. El punto de vista que se toma cuando se habla del contenido referencial, al estar hablando de formulas como objetos, ya no es un punto de vista logico sino, si se quiere, logico-ling•u stico, se atiende a la sintaxis.

Una respuesta en la misma l nea sirve para refutar el segundo argumento de Leit-geb: que el contenido referencial es una nocion semantica porque esta de nido a partir de la referencia o denotacion de construcciones nominales a objetos, que es obviamente semantica. El contenido referencial de oraciones esta de nido, efectivamente, en terminos de la denotacion de construcciones nominales, pero no exclusivamente en estos terminos. La sintaxis de la oracion o del lenguaje al cual esta pertenece tambien juega un rol: la presencia o ausencia de una constante, la presencia o ausencia de una letra de predicado, es crucial para determinar la referencia o el contenido de una expresion. Luego, nueva-mente, el contenido referencial no puede ser una nocion plenamente semantica, tiene elementos de la sintaxis.

Leitgeb da un tercer argumento a favor de la condicion de equivalencia o, mejor dicho, a favor de la condicion mas fuerte de equivalencia aritmetica: que dos oraciones aritmeticamente equivalentes deben referir a lo mismo. Desde su punto de vista, este es el unico modo de garantizar que las equivalencias que se pueden probar a partir del lema diagonal debil sean evidencia su ciente para la autorreferencia. es aritmetica pero no logicamente equivalente a :T p q; para concluir que es autorreferente a partir de esta equivalencia debe tenerse que, como :T p q re ere claramente a y es aritmeticamente equivalente a , tambien re ere a .

Pero si la condicion de equivalencia aritmetica es el unico modo de permitir que el lema diagonal debil sea un mecanismo de autorreferencia no hay esperanzas ya para una nocion materialmente adecuada de contenido referencial. Porque si dos oraciones aritmeticamente equivalentes re eren a lo mismo, entonces, como se vio al comienzo en la seccion 6.2, todos los teoremas de pa^{+} re eren a lo mismo; el concepto se vuelve practicamente trivial antes de considerar ningun otro principio para la referencia, como los que conforman las nociones intuitiva y tecnica del apartado 6.1.2. Todos los teoremas de la aritmetica ser an oraciones de Henkin. Y, aun mas, como son todos aritmetica-mente equivalentes a una verdad logica, la condicion de equivalencia aritmetica tambien trivializa las nociones de contenido logico presentadas en los apartados anteriores.

Afortunadamente, hay mejores razones para concluir que una oracion que ha sido obtenida por medio del lema diagonal debil es autorreferente, i.e., que esta dada por un cuanti cador universal seguido por una expresion condicional cuyo antecedente es satisfecho exclusivamente por ella misma, esto es, estas oraciones autorre eren porque cuanti can sobre s mismas. La intuicion segun la cual expresiones de la forma 8v('(v) ! (v)) son acerca de los 's es su ciente para concluir que el lema diagonal debil garantiza autorreferencia. No parece haber razones a favor mas que, tal vez, la elegancia, para adoptar un concepto de contenido referencial que satisfaga la condicion de equivalencia.

Leitgeb (2002) concluye su argumentacion con una advertencia: si la condicion de equivalencia no vale, la referencia o contenido de una oracion depende no solo de lo que dice sino de como lo dice. En efecto, si se quiere un concepto en el que la sintaxis y la estructura logica de las oraciones jueguen un rol, un concepto mas bien de referencia, el resultado es hiperintensional. Si lo que se busca es un concepto extensional, mas bien de contenido logico, la estructura logica no puede tener demasiada injerencia y las intuiciones que Leitgeb quiere rescatar deben quedar a un lado. Pero estas intuiciones son esenciales al debate sobre la paradoja de Yablo, como Leitgeb mismo se~nalo, y tambien para la evaluacion de la autorreferencialidad de oraciones de Henkin y G•odel, entre otras, mientras que la condicion de equivalencia no parece serlo. Por esta razon, en lo que resta de esta tesis me centro en la primera v a, en un concepto de referencia hiperintensional.

De hecho, Leitgeb parece haber cambiado de opinion. En (2005, x5) considera y descarta inmediatamente la posibilidad de que su nocion de dependencia (vease el apartado 3.2), que satisface la condicion de equivalencia, pueda hacer las veces de una nocion de referencia o contenido logico, por dos razones. Primero porque la dependencia de Leitgeb solo se ocupa, en ultima instancia, del contenido de oraciones `a traves' del predicado veritativo o, en palabras de Leitgeb, las relaciones de dependencia con fre-cuencia \[. . .] match our intuitions concerning aboutness with respect to truth-theoretic concerns." Leitgeb (2005, p. 175). Por ejemplo, mientras que la oracion Bew_{pa+} (h) en (6.6) refere intuitivamente a s misma, depende esencialmente del conjunto vac o, por-que no contiene el predicado de verdad (cf. proposicion 3.35). Pero, en segundo lugar, y con mas importancia, porque considera que ni siquiera cuando se trata del predicado veritativo la nocion de dependencia respeta las intuiciones compartidas sobre la nocion de contenido logico o referencia:

> Obviously, our pre-theoretic intuitions concerning aboutness are more ne-grained than any semantic notion of dependence such as ours can ever be. While our relation of dependency is closed under logical equivalence and even arithmetic equivalence [(cf. proposicion 3.29)], such that logically equivalent sentences depend on the same sets of sentences, this is not the case according to the intuitions described above: _ : may said to be about the semantic

properties of and not of ,[13] despite the fact that _ : and _ : are

logically equivalent; 2 + 2 = 4 _T (c) is about the entity denoted by c, or so it seems, while the arithmetically equivalent 2 + 2 = 4 is not, but both depend on the empty set. Contrary to our notion of dependency, the informal notion of aboutness is not just a matter of semantics, but also of syntax: what a sentence is about does not only depend on the proposition that the sentence expresses but also on how this proposition is expressed.

Sin ir tan lejos como Leitgeb, dir a que, en lo que al predicado de verdad concierne, la nocion de dependencia que ofrece puede o ciar de contenido logico, en la l nea de Putnam, Goodman y Urbaniak, pero ciertamente no de referencia, como el mismo indica.

§

A lo largo del cap tulo creo haber establecido que una nocion de contenido referencial que sirva para evaluar los patrones referenciales detras no solo de expresiones paradojicas del lenguaje de la verdad sino tambien de enunciados aritmeticos debe res-petar los casos intuitivos que conforman la nociones informales tanto `intuitiva' como `tecnica' de referencia y autorreferencia que se~nala Leitgeb |lo cual mostre que es po-sible por la estructura especial que poseen los enunciados que se obtienen a partir de un proceso de diagonalizacion| y, en consecuencia, no satisfacer la condicion de equi-valencia. Esto signi ca que lo que se precisa es una nocion de referencia mas que de contenido logico, un concepto hiperintensional.

Resta entonces encontrar un modo adecuado de completar la nocion intuitiva en detalle, que cubra absolutamente todos los casos, todas las expresiones posibles de los lenguajes de la aritmetica y de la verdad. Este es precisamente el objetivo del proximo cap tulo.

[13] ***es la oracion que se obtiene diagonalizando debilmente el predicado*** T x***,*** i.e.***,***

pat ` $ T p q

es una oracion del honesto, que dice de s misma que es verdadera.

7

Referencia en el lenguaje de la aritmetica de primer orden y sus extensiones

\Wir haben also einen Satz vor uns, der seine eigene Unbeweisbarkeit behaup-tet."

•

{ Kurt G•odel, `Uber formal unentscheidebarre S•atze der Principia Mathematica und verwandler System I'

En este cap tulo ofrezco una serie de nociones de referencia para extensiones del lenguaje de la aritmetica de primer orden que superan las di cultades y satisfacen las condiciones se~naladas en el cap tulo anterior:[1] todas ellas respetan las caracter sticas de la nocion intuitiva de referencia introducida en el apartado 6.1.2 y son, por tanto, hiperintensionales, no satisfacen la condicion de equivalencia de Leitgeb.

Siendo los objetos primarios del lenguaje de la aritmetica los numeros naturales, la seccion 7.1 se ocupa de la referencia de oraciones de este lenguaje a numeros, y sus propiedades. En 7.2 de no referencia de oraciones de este lenguaje a otras oraciones del lenguaje mismo, a traves de sus codigos de G•odel. Muestro que el concepto de nido no solo es una complecion de la nocion intuitiva sino que a la vez rescata la intuicion detras de la nocion tecnica (que solo tiene sentido cuando la referencia es a otras formulas). Como consecuencia, da el veredicto correcto con respecto a oraciones de G•odel, Henkin y otros fenomenos de esta ndole. Ambas nociones, de referencia a numeros y a oraciones,

[1]***Seguramente sea posible modi car levemente los conceptos que introduzco a continuacion para elaborar nociones analogas de referencia de oraciones pertenecientes a otros lenguajes formales, como el lenguaje de la teor a de conjuntos, pero esto queda pendiente para un trabajo futuro.***

son semanticas, de nidas en funcion de la nocion de verdad en el modelo estandar de la aritmetica.

Finalmente, en 7.3 me ocupo de la referencia de oraciones a oraciones del lenguaje de la aritmetica con un predicado verdad unicamente a traves de este predicado de verdad, que llamo `referencia aletica'.[2] Contrario a lo que se espera, la referencia aletica no puede obtenerse simplemente generalizando la nocion de referencia de la seccion anterior a todo el lenguaje de la verdad, por razones que ah indico. Ofrezco dos nociones de referencia aletica, una semantica y otra sintactica, ya no en funcion de la verdad en un modelo sino del predicado de prueba de una teor a, y muestro que ambas capturan la nocion tecnica, esta vez restringida al predicado de verdad, y dan veredictos intuitivamente correctos sobre las expresiones paradojicas y otras patolog as conocidas. La paradoja de Yablo y sus formulaciones alternativas resultan no autorreferentes y, por ende, queda refutada la version ortodoxa de la tesis referencialista acerca de las paradojas.

Dado el objetivo general de lo que resta de la tesis, i.e., dar teor as de la verdad que cuadren con el de acionismo, y mas espec camente, hacerlo restringiendo el Esquema-T a instancias generadas por expresiones que tengan patrones de referencia `seguros', lo cual har de los sistemas resultantes buenos candidatos para el proyecto minimalista tambien (veanse los apartados 5.3 y 5.3.1), me inclino por la referencia aletica sintactica por sobre la semantica. En 7.3.1, tras de nir referencia aletica semantica y otros conceptos cercanos, muestro que esta nocion es inde nible en la aritmetica y, en consecuencia, los criterios de restriccion de instancias del Esquema-T que en base a ella se formulen no seran meramente sintacticos, esto es, aritmeticos; no podran ser empleados directamente en la construccion de teor as desentrecomilladoras de acionistas (vease el apartado 5.3).

En cambio, los conceptos de referencia aletica sintactica que introduzco en 7.3.2 son de nibles en el lenguaje de la aritmetica de primer orden, como ah indico. En el cap tulo siguiente empleo esta nocion sintactica en la formulacion de criterios de seleccion de instancias correctas y consistentes del Esquema-T. El resultado es una serie de teor as desentrecomilladoras de la verdad sumamente abarcativas que, por ende, con rman la adecuacion de la vision referencialista general sobre las paradojas semanticas: estas en efecto comparten ciertos patrones de referencia `peligrosos'. Como se vera entonces, estas teor as satisfacen los criterios de adecuacion tanto del de acionismo como del proyecto minimalista de Horwich.

---

[2] ***El adjetivo `aletica' esta simplemente para indicar que la nocion es relativa a la verdad***, al predicado veritativo. Nada tiene que ver con las modalidades aleticas de necesidad, posibilidad, etc.; no es en ningun sentido una nocion modal.

7.1. Referencia a numeros

Si bien L^{+}_{pa} puede entenderse como un lenguaje que habla sobre las expresiones de un lenguaje formal via codigos de G•odel, sus objetos primarios son los numeros. Por esta razon empiezo el cap tulo analizando la referencia de oraciones de L^{+}_{pa} a numeros.[3]

El objetivo es dar una de nicion de referencia que complete la nocion intuitiva que esboz Leitgeb (2002), presentada el apartado 6.1.2. De acuerdo con esta nocion informal, las oraciones de un lenguaje de primer orden pueden referir a objetos por mencion, conteniendo un termino que los denote, o por cuanti cacion, cuanti cando de alguna manera sobre ellos. Comienzo por analizar la referencia por mencion.

Intuitivamente, 2 + 2 = 4 re ere a los numeros 2 y 4 porque los menciona. Sin embargo, en esta oracion no ocurren unicamente terminos que denotan estos numeros sino tambien 0, 1 y 3, porque 4 es un numeral, el termino complejo SSSS0 que contiene a los numerales de 0, 1, 2 y 3 como subterminos propios (vease el apartado 1.2.1). Si que un termino ocurra en una oracion es su ciente para decir que esta re ere al numero denotado por el, toda oracion que contenga el numeral n referira indefectiblemente a

todos los numeros menores o iguales a n. Para evitar decir que 2 + 2 = 4 re ere a todos estos numeros, podr a exigirse que solo los terminos que no ocurren como subterminos propios de otros en una oracion sean causa de referencia. Lamentablemente, esta no es una buena idea, porque, en 2 + 2 = 4, 2 aparece siempre como subtermino.

Para solucionar este inconveniente tomo la siguiente decision. Dado que los numerales son los nombres canonicos de los numeros en L_{pa}^{+}, a falta de constantes de individuo los considero como tales, i.e., las nociones de referencia a numeros que propongo no miran dentro de los numerales, no consideran los subterminos de estos terminos para establecer la referencia de una oracion que los contenga, pero s atienden a los subterminos de otros terminos, como 2 en 2 + 2.[4]

Esta medida puede resultar un tanto arbitraria. (2 + 1) 5 = 0, por ejemplo, no estar a re riendo al numero 3 aunque, en algun sentido, podr a creerse que dice que 3 por 5 es 0. Sin embargo, para no trivializar la nocion es preciso tomar algunas decisiones. Estas decisiones dependen del peso de las intuiciones que se tenga y del uso que se le vaya a dar al concepto de referencia. No parecen ser conceptualmente esenciales a lo que sigue, aunque extensionalmente los resultados van a depende completamente de ellas.

---

[3] ***Intuitivamente, no tiene sentido decir de las formulas abiertas de un lenguaje que re eren, porque no `dicen' nada acerca de ninguna cosa, porque simplemente no dicen nada, no `expresan proposiciones'. Los conceptos de referencia y sus derivados que introduzco a lo largo del cap tulo estan de nidos unicamente para oraciones. Sin embargo, algunas de estas nociones pueden extenderse sin demasiados cambios a formulas con variables libres.***

[4] *Agradezco a Je* Ketland por sugerirme esta idea.

Sea L una extension de L^{+}_{pa} con un numero nito de s mbolos de predicado que cuente con un modelo pretendido N^{L} que expanda N^{+} a todo L.

De nicion 7.1 (M-referencia a numeros). La oracion ' 2 L m-re ere a n 2 ! sii n ocurre al menos una vez en ' no precedido inmediatamente por S.

Por ejemplo, 3 = 0 re ere por mencion o m-re ere a 3 y a 0, pero S(3) = 0 m-re ere unicamente a 4 y a 0. Los componentes atomicos de una oracion determinan su m-referencia. Una negacion m-re ere a lo que re ere la oracion negada, un condicional a lo que re eren su antecedente o consecuente, etc.

La m-referencia a numeros es una nocion practicamente sintactica: habiendo asig-nado nombres a los numeros naturales en L_{pa}, basta estudiar los terminos que ocurren en una oracion para saber a que numeros esta m-re ere. Esto la hace una relacion recursiva, de muy baja complejidad.

Las oraciones tambien pueden referir a numeros via cuanti cadores. Intuitiva-mente oraciones de la forma 8x(x = 2 + 1 ! ') re eren de esta manera al numero 3 y 8x(x 8 ! ') a todos los numeros mayores que 7. Por otra parte, aquellas expresiones universales cuyos cuanti cadores no estan relativizados, como 8x x = x, parecen referir a todos los numeros, precisamente porque la cuanti cacion es irrestricta. Siguiendo la nocion intuitiva de referencia indicada por Leitgeb, me rijo por la siguiente idea basi-ca: el unico modo de restringir la referencia por cuanti cacion es que el cuanti cador est seguido por una expresion condicional, en cuyo caso la referencia se reduce a los objetos que satisfacen el antecedente.

Si el lenguaje contuviera cuanti cadores existenciales y conjunciones, otro modo de restringir la referencia ser a mediante expresiones de la forma 9v('^), que referir an a los 's. En efecto, de acuerdo con la de nicion de referencia via cuanti cacion que doy mas adelante, las oraciones de L de las cuales expresiones como 9v(' ^) son, mutatis mutandis, abreviaturas o variantes notacionales re eren a los 's.

Luego, una oracion dada por un cuanti cador universal seguido de cualquier formula que no sea un condicional referira absolutamente a todos los objetos del uni-verso de discurso. Esto evidencia tambien el caracter hiperintensional de la nocion de referencia que pretendo dar: no referiran necesariamente a lo mismo oraciones de la forma 8v(' !) que aquellas de la forma 8v::(' !).

>A que re eren por cuanti cacion 8x(2 = 2 ! :x = 3), 8y 0 + 1 = 0 y 8x; y(x > y ! x + y = 15)? Para reducir el numero de decisiones arbitrarias al m nimo aplico el mismo criterio a 8x(2 = 2 ! :x = 3) que a oraciones en las cuales x esta libre en el antecedente del condicional, esto es, 8x(2 = 2! :x = 3) referira a todo numero n que

satisfaga 2 = 2, esto es, a todo. Si el antecedente fuera falso, no referir a a nada. En general, oraciones de la forma 8v(' !) re eren a n si y solo si '[n=v] es verdadera. Con respecto a 8y 0 + 1 = 0, el criterio tambien se desprende de lo dicho en el parrafo anterior. Como el cuanti cador 8y no esta relativizado en modo alguno, esta oracion referira a todo, ignorando por completo que el cuanti cador es super uo.

Finalmente, en cuanto a 8x; y(x > y ! x + y = 15), la extension del criterio para formulas de tipo 8v(' !) parece indicar que re ere a los pares ordenados de numeros tales que la primera componente es mayor que la segunda. Sin embargo, para que la referencia sea estrictamente una relacion entre oraciones y los objetos que menciona o sobre los cuales cuanti ca, y evitar as las di cultades de los enfoques de Putnam, Goodman y Urbaniak introducidos en el cap tulo anterior, dire que 8x; y(x > y ! x + y = 15) y, en general, oraciones de la forma 8v1 : : : vm(' !) re eren a n siempre y cuando 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vm'[n=vi] se de para algun 1 i m, esto es, n sea una componente de alguna m-tupla hk1; : : : ; kmi 2 !m que satisfaga '. La siguiente de nicion rescata las intuiciones y decisiones delineadas.

De nicion 7.2 (Q-referencia a numeros). Una oracion ' 2 L q-re ere a n 2 ! sii se cumple una de las condiciones 1-3:

1. ' es de la forma 8v1 : : : vm y
   a) es una formula atomica o := : , o
   b) := ! y, para algun i tal que 1 i m,

   N^L 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vm [n=vi]:

2. ' := : y q-re ere a n.

3. ' := ! y o q-re ere a n.

Al igual que la m-referencia, la q-referencia tambien es composicional, pero no depende ya de lo que sucede al nivel atomico, i.e., nada, sino de lo que ocurre con las subformulas universalmente cuanti cadas.

Si bien parece que la de nicion de referencia por cuanti cacion o q-referencia es demasiado generosa con la referencia, por ejemplo, en oraciones universales seguidas por expresiones no condicionales, al contrario y a diferencia de otros abordajes como los expuestos en 6.3, abre la posibilidad de la referencia restringida mediante condicionales, de utilizar predicados en ciertas oraciones y que estas no re eran necesariamente a los objetos que los satisfacen. Todo depende de la expresion que se utilice.

La conjuncion y el cuanti cador existencial son s mbolos de nidos en el lenguaje. Si, como es usual, se de ne ' ^ como :(' ! :) y 9v' como :8v :', oraciones de la forma 9v1 : : : vn(' ^), que intuitivamente son casos de referencia restringida a los 's, son abreviaturas de :8v1 : : : vn::(' ! :), que q-re ere a todo, por la clausula 1.a). Sin embargo, eliminando la doble negacion, :8v1 : : : vn(' ! :) q-re ere a los 's, como se quer a. Luego, la de nicion 7.2 es naturalmente extensible a un lenguaje con cuanti cadores existenciales y conjunciones.

Naturalmente, una oracion puede m y q-referir a numeros a la vez. Por ejemplo, 2 3 = 5 ^ 8x(x < 3 ! x 6= x) m-re ere a 2; 3 y 5 y q-re ere a 0; 1 y 2. Luego, re ere simpliciter a 0; 1; 2; 3 y 5.

De nicion 7.3 (Referencia a numeros). Una oracion ' 2 L re ere a n 2 ! sii ' m-re ere o q-re ere a n.

Dada la composicionalidad de la m y la q-referencia, la referencia simpliciter es tambien de alguna manera composicional. En particular, si una expresion re ere a un numero, negarla o ubicarla en el antecedente o consecuente de un condicional no cambia este hecho. Este es un segundo inconveniente de los conceptos de contenido referencial de Putnam, Goodman y Urbaniak que mi nocion logra superar.

Para saber si oraciones de la forma 8v(' !) q-re eren a un numero n, hay que saber primero si '(n) es verdadera, esto es, si N^L '(n); para saber que pares ordenados de oraciones, por un lado, y numeros, por el otro, estan en la relacion de q-referencia es preciso saber que oraciones son verdaderas en el modelo estandar de la aritmetica. Como consecuencia, la q-referencia no es de nible en L_{pa}. Al estar de nida en terminos de la q-referencia, la referencia tambien es una nocion altamente compleja, no de nible en L_{pa}. Luego, si se quiere contar con esta nocion en el lenguaje objeto mismo, i.e., en L o una de sus extensiones, es preciso ofrecer una axiomatizacion de la nocion de referencia, esto es, introducir en L un s mbolo de predicado primitivo para esta relacion e incorporar axiomas a una teor a que axiomatice parcialmente N^L que lo gobiernen correctamente. Lo mismo puede decirse de las nociones de referencia a oraciones y referencia aletica semantica que introduzco en los apartados subsiguientes. Para evitar repeticiones tediosas, pruebo un resultado de inde nibilidad y doy una axiomatizacion sobre pa solo para esta ultima (vease el apartado 7.3.1.2), lo cual podra traducirse por analog a en resultados y teor as acerca de las otras dos nociones.

7.2. Referencia a oraciones

Gracias a la posibilidad de codi car las expresiones de un lenguaje nitario mediante numeros naturales, el lenguaje de la aritmetica y sus extensiones pueden entenderse tambien como hablando de sus propias u otras expresiones, y la aritmetica como una teor a de la sintaxis para aquel lenguaje. En esto se basan los lemas de diagonalizacion, las oraciones de G•odel y Henkin y la posibilidad de formular teor as de la verdad en expansiones de L^{+}_{pa} y sus posibles paradojas. Para dar cuenta de estos y otros fenomenos, en esta seccion y en la que sigue doy nociones de referencia de expresiones a expresiones a traves de sus codigos, a partir de las cuales se puede de nir autorreferencia, buena fundacion y otros patrones referenciales.

Mientras que L_T , las expresiones paradojicas y la referencia aletica aparecen en la seccion siguiente, esta seccion se ocupa unicamente de la referencia en L^{+}_{pa}. Como anticipe, por su adecuacion material, esta nocion permitira resolver una serie de cues-tiones, como el problema de Henkin y las preguntas alrededor de la autorreferencialidad de las oraciones de G•odel y de toda expresion que es el resultado de un proceso de diagonalizacion.

En primer lugar ofrezco nociones de m-referencia y q-referencia, referencia directa y referencia simpliciter a oraciones. Dado que se trata de una relacion entre oraciones, tambien de no autorreferencia y buena fundacion a partir de los conceptos anteriores, y muestro que los procesos de diagonalizacion presentados en el apartado 1.2.6 dan lugar a expresiones autorreferenciales, mientras que las cadenas que se obtienen mediante, por ejemplo, a la manera de Yablo, resultan no bien fundadas (y, lamentablemente, en varios casos tambien autorreferenciales). Finalmente, evaluo a la luz de las nociones introducidas las oraciones de Henkin y G•odel, entre otras.

De nir referencia de expresiones a expresiones rescatando las intuiciones mas basicas del lenguaje natural no es tarea sencilla. Tanto la referencia por mencion como por cuanti cacion se vuelven mas complicadas que la referencia a numeros. Analizo primero la la m-referencia.

Sea L, como en el apartado anterior, una expansion de L^{+}_{pa} con un numero nito de s mbolos de predicado que cuente con un modelo pretendido N^{L} que expanda N^{+} a todo L. Tomese como ejemplo la oracion de G•odel de pa^{+} que se obtiene a traves del lema fuerte de diagonalizacion (teorema 1.8):

$$q^{+} ` g = p{:}Bew_{pa}{+} (g)q$$

Naturalmente ser a deseable decir que :Bew$_{pa+}$ (g) re ere a s misma, porque contiene un termino, g, que la denota. Luego, no es posible tomar los numerales como unica fuente de m-referencia. Si se siguiera la de nicion 7.1 de m-referencia a numeros, ser a necesario que p:Bew$_{pa+}$ (g)q ocurriera en :Bew$_{pa+}$ (g), esto es, que el numeral de codigo de esta oracion ocurriera sintacticamente en la oracion misma, lo cual no es posible bajo codi caciones monotonas de oraciones a traves de numeros (vease el apartado 1.2.3). De acuerdo con el lema diagonal fuerte, g no es un numeral sino un termino de la forma $t_1(t_2=t_3)$, esto es, una instancia del s mbolo de funcion para la funcion sustitucion.

La opcion mas natural parecer a ser abandonar la restriccion a numerales y considerar que cualquier termino |como, prima facie, g| que no ocurra como subtermino propio de otros en la formula, es fuente de m-referencia. Sin embargo, esta alternativa no es viable. Como L^+_{pa} (y tambien L_{pa}) contiene terminos de funcion, en sus predicados las variables libres pueden aparecer como subterminos propios de otros terminos, v.g., puede que en Bew$_{pa+}$ (x), la unica ocurrencia libre de x est en la subformula f(x) = t, donde f es un s mbolo de funcion y t un termino. En ese caso, g ocurrir a en Bew$_{pa+}$ (g) como un subtermino propio y, en consecuencia, Bew$_{pa+}$ (g) no referir a a s misma.

Aparentemente, la unica opcion que queda consiste en considerar que cualquier termino que ocurra en una expresion, ya sea como subtermino propio o no, ya sea un numeral u otro termino complejo, puede ser fuente de m-referencia, lo cual esta en l nea con la clausula de la referencia por mencion de la nocion intuitiva esbozada en el apartado 6.1.2.

De nicion 7.4 (M-referencia a oraciones). Dadas dos oraciones '; 2 L, ' m-re ere a sii ' contiene un termino cerrado t tal que q^+ ` t = p q.

Notese que, como q^+ prueba todas las identidades verdaderas en N^+ y, por tanto, en N^L, el concepto de m-referencia es extensionalmente equivalente a uno en el cual, en lugar de que q^+ pruebe t = p q, se pida que N^L t = p q: no hay mas casos de denotacion en el modelo estandar que los que q^+ puede probar.

Este es el llamado `criterio de Kreisel-Henkin', como indique en el apartado 6.3. Las consecuencias de adoptarlo no son del todo deseables, porque se multiplican sospechosamente los casos de m-referencia (aunque ahora solo los terminos que denotan ora-ciones pueden dar lugar a una relacion de m-referencia). Por ejemplo, como Bew$_{pa+}$ (x) es una formula compleja que puede contener sintacticamente otros terminos aparte de x |puede ser de la forma '(t; x), donde t es un termino cerrado que denota una oracion| todas las expresiones de la forma Bew$_{pa+}$ (s) no solo re eren a lo que s denota sino tambien a lo que los otros terminos en Bew$_{pa+}$ (x) denotan |si t denota una oracion, Bew$_{pa+}$ (s) re ere a la denotacion de t, para todo termino cerrado s|. Ademas, todos los subterminos de un termino que ocurre en una oracion tambien ocurren sintacticamente

en la oracion, con lo cual cualquier formula '(p q) m-referira a y a todas las oraciones de L_{pa}^{+} cuyo codigo es menor que el de .

Por otra parte, el criterio de Kreisel-Henkin obvia una gran cantidad de casos claros de m-referencia. Los ciclos de oraciones, que son tambien paradigmaticamente clasi cados como autorreferentes, no lo son segun este criterio. Como los ciclo de mentirosos que introduje en cap tulos anteriores (cf. (3.6)), existen en q^{+} ciclos como el de Henkin de longitud 2 en pa^{+}:

$$h_1 = \text{p}Bew_{pa^+}(h_2)\text{q} \qquad (7.1)$$
$$h_2 = \text{p}Bew_{pa^+}(h_1)\text{q}$$

y el ciclo de G•odel de longitud 3 en pa^{+}:

$$g_1 = \text{p:}Bew_{pa^+}(g_2)\text{q} \qquad (7.2)$$
$$g_2 = \text{p:}Bew_{pa^+}(g_3)\text{q}$$
$$g_3 = \text{p}Bew_{pa^+}(g_1)\text{q}$$

entre otros, en virtud de los lemas diagonales alternativos (proposicion 1.10). El ciclo en (7.1) consta de dos oraciones, cada una de las cuales dice de la otra que es un teorema de pa^{+}, mientras que en (7.2) hay tres oraciones, cada una de las cuales dice que la oracion que se encuentra por debajo no es un teorema excepto la ultima, que dice que la primera es un teorema.

Dado que las identidades en (7.1) y (7.2) son demostrables en q^{+}, en ambos casos los fenomenos que ocurr an para la oracion de Henkin y la oracion de G•odel se reproducen. Por un lado, tanto $Bew_{pa^+}(h_2)$ como $Bew_{pa^+}(h_1)$ son demostrables en pa^{+}, porque

pa^{+} ` $Bew_{pa^+}(h_2)$! $Bew_{pa^+}(\text{p}Bew_{pa^+}(h_2)\text{q})$ 3ra condicion de teoremicidad de L•ob[5]

$Bew_{pa^+}(h_1)$ Por (7.1)

y

pa^{+} ` $Bew_{pa^+}(h_1)$!$Bew_{pa^+}(\text{p}Bew_{pa^+}(h_1)\text{q})$ 3ra condicion de teoremicidad de L•ob

$Bew_{pa^+}(h_2)$ Por (7.1)

con lo cual pa^{+} ` $Bew_{pa^+}(h_2)$ \$ $Bew_{pa^+}(h_1)$. Por el teorema de L•ob (corolario 1.14), esto implica que $Bew_{pa^+}(h_2)$ y $Bew_{pa^+}(h_1)$ son teoremas de pa^{+}.

Por otro lado, al igual que la oracion de G•odel, ni :Bew$_{pa^+}$ (g$_2$), ni :Bew$_{pa^+}$ (g$_3$) ni Bew$_{pa^+}$ (g$_1$) son teoremas de esta teor a. Para las dos primeras es obvio, por el segundo resultado de incompletitud de G•odel (teorema 1.13). Si la tercera fuera un teorema de pa$^+$, como Bew$_{pa^+}$ (v) debilmente representa el conjunto de teoremas de esta teor a, :Bew$_{pa^+}$ (g) tambien ser a un teorema de pa$^+$. (7.2) permite dar una prueba alternativa al primer resultado de incompletitud de G•odel.

Si la autorreferencia es parte de la causa detras de la no demostrabilidad de las oraciones de G•odel y la demostrabilidad de las oraciones de Henkin, tambien debe serlo en el caso de los ciclos de Henkin y G•odel como (7.1) y (7.2). Las primeras pueden ser vistas como un caso l mite de las ultimas. Pero de acuerdo con el criterio de Kreisel-Henkin, ninguna de estas oraciones re ere a s misma.

No solo los ciclos de cualquier longitud son posibles en q$^+$ sino tambien, en virtud de la proposicion 1.11, las cadenas in nitamente descendientes, en donde cada una de las oraciones re ere por mencion, y no por cuanti cacion como en casos semejantes a la secuencia de Yablo, a la que le sigue. Por ejemplo, es posible obtener una secuencia de longitud ! de terminos h$_0$; : : : ; h$_n$; : : : tales que

$$\begin{aligned} h_0 &= pBew_{pa^+}(h_1)q \\ h_1 &= pBew_{pa^+}(h_2)q \\ h_2 &= pBew_{pa^+}(h_3)q \\ &: : : \end{aligned} \tag{7.3}$$

esto es, una cadena de oraciones de Henkin.

Prima facie, en todos los ejemplos de ciclos y cadenas que he dado, las oraciones no se limitan a referir a aquellas que mencionan directamente, sino tambien a aquellas a las cuales las que mencionan re eren. La referencia en estos casos parece estar cerrada transitivamente, lo cual no esta contemplado por el criterio de Kreisel-Henkin, que solo establece m-referencia directa. Para evitar la multiplicacion innecesaria de de niciones, en lugar de dar una nocion de m-referencia transitiva, trabajo primero sobre una nocion de q-referencia directa a oraciones, para luego de nir referencia directa simpliciter co-mo la disyuncion entre la m y la q-referencia y cerrarla bajo transitividad, obteniendo nalmente la nocion transitiva de referencia simpliciter.

Con respecto a la q-referencia a oraciones los problemas son aun mas serios. El criterio dado para la q-referencia a numeros es demasiado sencillo y deja muchos casos claros de q-referencia de lado. Si se recuerda que el objetivo nal de este cap tulo es dar con una nocion de referencia que permita restringir el Esquema-T a instancias seguras, esto es inaceptable. Si una oracion re ere intuitivamente a s misma y, de ese modo, lleva a contradicciones, pero la nocion con la cual se trabaja pasa por alto este caso de referencia, la teor a resultar inconsistente. Luego, es mejor un criterio que sobregenere casos de referencia a uno que se quede corto.

Considerese la oracion

$$8x(x < h ! :Bew_{pa^+} (:.x)) \qquad (7.4)$$

Intuitivamente, esta oracion re ere no solo a las oraciones que satisfacen el predicado x < h sino tambien a sus negaciones. Si g < h, la oracion dice, intuitivamente, que la negacion de la oracion de G•odel de pa^+ no es un teorema de pa^+, esto es, re ere directamente a $::Bew_{pa^+}$ (g). Considerese este otro ejemplo:

$$8x(x = g ! 8y(y = :.x ! '(y))) \qquad (7.5)$$

Esta oracion no solo parece referir a g sino tambien a su negacion, y es de esta ultima de la que dice que es '. La solucion mas sensata en ambos casos parece ser decir que una oracion de la forma 8v(' !) q-re ere, no solo a las oraciones que satisfacen su antecedente, sino tambien a las oraciones a las cuales (' !)[n=v] (m- o q-) re ere, donde n es un numero que satisface '.

De nicion 7.5 (Q-referencia a oraciones). Dadas dos oraciones '; 2 L, ' q-re ere a sii se cumple una de las condiciones 1-3:

1. ' := $8v_1$: : : v_m y
   a) es una formula atomica o := : , o
   b) := ! y, para algun i tal que 1 i m,

$$N^L \quad 9v_1 : : : v_i \;\; _1v_{i+1} : : : v_m \, [p\ q=v_i]$$

   o existe un k 2 ! tal que

$$N^L \; 9v_1 : : : v_i \;\; _1v_{i+1} : : : v_m \, [k=v_i]$$

   y $8v_1$: : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_m(!)[k=v_i] q-re ere a o contiene una ocurrencia de un termino cerrado t que no esta en ! tal que q^+ ` t = p q.
2. ' := : y q-re ere a .
3. ' := ! y o q-re ere a .

Esta es una de nicion inductiva. Para cada oracion, en el de niens el predicado `q-re ere' se aplica exclusivamente a formulas de menor complejidad. Es preciso indicar

!

que la m-referencia de ( )[k=vi] debe ser `nueva', esto es, el termino que denota no debe ya ocurrir en la formula original porque, de lo contrario, claros casos de m-referencia de oraciones universales seguidas por condicionales cuyo antecedente sea satisfecho por al menos un numero ser an declarados a la vez casos de q-referencia por la de nicion. Por ejemplo, (7.4) m-re ere a la oracion de Henkin denotada por h pero no q-re ere a ella, porque su codigo no es menor a s mismo, su conectiva principal no

es una negacion y, si k < h, k < h ! :Bew$_{pa+}$ (:.k) tiene una ocurrencia de un termino h que denota la oracion de Henkin pero esta ya aparec a en la oracion original.

La clausula 1.b) permite acomodar las intuiciones sobre ejemplos como (7.4) y (7.5). Asimismo, la de nicion 7.5 ayuda a esclarecer el criterio tecnico de autorreferen-cia de Priest (1997) expuesto en el apartado 6.1.2 y termina con el problema de las equivalencias entre oraciones y otras que las mencionan como fuente de autorreferencia.

De acuerdo con Leitgeb (2002) toda nocion de referencia para expresiones de L^{+}_{pa} enfrenta serias di cultades porque, por un lado, toda oracion de L^{+}_{pa} es equivalente en pa^{+} a otra que la menciona pero, a la vez, las equivalencias no pueden ser abandonadas porque son el medio de establecer autorreferencia en lenguajes sin s mbolos extra de funcion, como L_{pa} |v.g., en casos como los de las oraciones de G•odel y el mentiroso debiles| (vease el apartado 6.2).

De acuerdo con las de niciones que introduje, la equivalencia entre y '(p q) no es una razon valida para concluir que es autorreferente, ya que ni la de nicion 7.4 ni la de nicion 7.5 (ni su union y posterior clausura transitiva) permiten tal infe-rencia. Pero, como anticipe y como quiere Priest, si ha sido obtenida mediante un proceso de diagonalizacion debil sobre '(v), es autorreferencial y, mas espec camente, q-autorreferencial, porque, como muestra la prueba del teorema 1.7, es la oracion

$$8u(u = p8v(Diag(u; v) ! '(v))q ! 8v(Diag(u; v) ! '(v))) \qquad (7.6)$$

que, por la de nicion 7.5, q-re ere a todo lo que

$$8v(Diag(p8v(Diag(u; v) ! '(v))q; v) ! '(v))$$

q-re ere, que a su vez, nuevamente por la de nicion de q-referencia, q-re ere a todas las oraciones que satisfacen el predicado

$$Diag(p8v(Diag(u; v) ! '(v))q; v)$$

i.e., a la diagonalizacion de 8v(Diag(u; v) ! '(v)), esto es, a (7.6), a . En consecuencia,

es autorreferente; ni el lema de diagonalizacion fuerte ni la condicion de equivalencia son necesarios para establecer autorreferencia.

Contrario a lo que creyo Leitgeb, no es en virtud de las equivalencias que el lema de diagonalizacion debil logra establecer autorreferencia, sino mediante los cuanti cadores involucrados en las oraciones obtenidas para cada predicado. Luego, si bien toda oracion de L es aritmeticamente equivalente a una oracion que la menciona, no toda oracion de L es autorreferente. Como quieren Halbach & Visser (2014a), 0 = 0 no es autorreferencial, a pesar de ser demostrablemente equivalente a $\text{Bew}_{\text{pa+}}$ (p0 = 0q), porque solo menciona a 0, que no denota una oracion, y carece de cuanti cadores, mientras que $\text{Bew}_{\text{pa+}}$ (p0 = 0q) s menciona a p0 = 0q y, por eso, re ere a ella.

Como en el caso de la m-referencia, es tanto posible la q-referencia directa como la indirecta. Las cadenas y los ciclos pueden reescribirse facilmente con cuanti cadores. Ademas, los cuanti cadores posibilitan otros patrones referenciales semejantes a los de la secuencia de Yablo y otros. Siguiendo un procedimiento analogo al que se empleo en el apartado 6.1.1 para la construccion de la lista de Yablo pero en su version reformulada, dada una formula '(v) de L, se aplica el lema diagonal fuerte (teorema 1.8) a

8w(9u > v w = z(u=pvq) ! '(w))

sobre la variable z, obteniendo la identidad

q^{+} ` t = p8w(9u > v w = t(u=pvq) ! '(w))q

Aplicando a derecha e izquierda de esta identidad la funcion x(v=pvq) sobre x, se obtiene el principio general

q^{+} ` t(v) = p8w(9u > v w = t(u=pvq) ! '(w))q

del cual se derivan todas las instancias

q^{+} ` t(n) = p8w(9u > v w = t(u=pvq) ! '(w))q: (7.7)

As , se obtiene una lista in nita de oraciones cada una de las cuales re ere a todas las que se encuentran por delante, directa e indirectamente. Luego, es deseable una nocion de q-referencia transitiva. Pero tambien es posible la referencia a secas, que podr a darse tal vez, v.g., entre dos oraciones tales que la primera m-re ere a una tercera, que a su vez q-re ere a la segunda. De no, primero, la referencia directa como la union de la m-referencia y la q-referencia y, luego, la referencia indirecta como la clausura transitiva de esta ultima.

De nicion 7.6 (Referencia directa a oraciones). Dadas dos oraciones '; 2 L, ' re ere directamente a sii m-re ere directamente a o q-re ere directamente a .

De nicion 7.7 (Cadenas de referencia directa). Una secuencia de oraciones $_0$; : : : ; $_n$ 2 L, n 2 !, es una cadena de referencia directa sii, para cada i < n, $_i$ re ere directamente a $_{i+1}$.

De nicion 7.8 (Referencia a oraciones). Sean ' y oraciones de L. ' re ere a sii existe una cadena de referencia directa $_0$; : : : ; $_n$ tal que $_0$ = ' y $_n$ = .

Esta ultima de nicion s rescata las intuiciones alrededor de los bucles y las cade-nas. Por ejemplo, en el caso del ciclo de Henkin de longitud 2 en (7.1), como Bew_{pa^+} (h_2) contiene un termino que denota Bew_{pa^+} (h_1) y viceversa, si bien ninguna de las oraciones m-re ere directamente a s misma, cada una (m-)re ere indirectamente a la otra mismas, de acuerdo con la de nicion 7.8.

Otro tanto se puede decir de las cadenas, como la cadena de oraciones de Henkin en (7.3). Se sabe, por la de nicion 7.4 de m-referencia, que, para cada i 2 !, Bew_{pa^+} (h_i) re ere directamente a Bew_{pa^+} (h_{i+1}). Luego, en virtud de la de nicion 7.8, Bew_{pa^+} (h_i) tambien re ere a Bew_{pa^+} (h_{i+2}) a traves de Bew_{pa^+} (h_{i+1}). Pero entonces tambien re ere a Bew_{pa^+} (h_{i+3}) mediante Bew_{pa^+} (h_{i+2}), y as siguiendo. Cada oracion en la secuencia termina re riendo a todas las que se encuentran por debajo, como se quer a.

No obstante, la transitividad de la referencia no parece ser siempre algo desea-ble; hay predicados para los cuales resulta mas natural que otros. Mientras que para predicados como T o Bew parece necesaria, no tanto as para otros como Sent o U.[6] Considerese la siguiente formula:

$$Sent_{L_{pa^+}} (pU(t; s; p0 = 0q)q) \tag{7.8}$$

Esta oracion m-re ere a U(t; s; p0 = 0q), que a su vez m-re ere a 0 = 0. Luego, por la de nicion 7.8, se debe concluir que (7.8) tambien re ere a 0 = 0. Esto puede resultar un tanto contraintuitivo, en la medida en que (7.8) hace una a rmacion sobre la sintaxis de U(t; s; p0 = 0q) que, a diferencia de enunciados que predican verdad o teoremicidad, de ninguna manera se puede traducir en una a rmacion acerca de los objetos de los cuales habla esta ultima oracion, i.e., 0 = 0. Distinguir entre predicados para los cuales

[6] ***$U(v_1; v_2; v_3)$ 2 L^+_{pa} representa en q^+ la relacion recursiva entre los codigos de una oracion v_1, una secuencia v_2 de codigos de variables de individuo y una formula v_3 que se da siempre y cuando v_1 conste de v_3 precedida por una secuencia de los cuanti cadores universales sobre las variables en v_2 en ese orden. Vease el apartado 1.2.3*** para refrescar la notacion.

la transitividad es razonable y aquellos para los que no es, al menos, complejo. Tras una serie de intentos he desistido. Si debe considerarse o no la referencia indirecta dependera, en cada caso, del uso que se quiera dar a las nociones de referencia a oraciones que ofrezco.

A partir de los conceptos introducidos es posible dar nociones de autorreferencia y buena fundacion (well-foundedness), que no debe confundirse con la fundacion a secas, v.g., de Kripke o Leitgeb (veanse los apartados 3.1 y 3.2).

De nicion 7.9 (Autorreferencia). Una oracion ' 2 L es autorreferente sii re ere a s misma.

De nicion 7.10 (Buena fundacion). Una oracion ' 2 L esta bien fundada sii ninguna cadena de referencia que empiece con ' es inde nidamente extensible.

Las oraciones de G•odel y Henkin tanto en sus versiones fuertes como debiles resultan autorreferentes y, por tanto, tambien no bien fundadas o mal fundadas, como evidencian las cadenas de referencia :Bew_{pa^+} (g); :Bew_{pa^+} (g); : : : y Bew_{pa^+} (h); Bew_{pa^+} (h); : : : , inde nidamente extensibles. Asimismo, los ciclos son autorreferentes y no bien fundados. Por ejemplo, para el ciclo de G•odel de longitud 3 en (7.2) existe la cadena de referencia inde nidamente extensible

:Bew_{pa^+} (g_2); :Bew_{pa^+} (g_3); :Bew_{pa^+} (g_1); :Bew_{pa^+} (g_2); :Bew_{pa^+} (g_3); : : :

Las cadenas de oraciones dadas por la proposicion 1.11 resultan ser todas mal fundadas aunque lamentablemente tambien autorreferentes, por el modo en el que estan construidos los terminos. Cada termino t_n es tal que t_n = p'(t_{n+1})q = p'(g.(num(p'(t_n)q)))q.

Luego, '(t_{n+1}) o, lo que es lo mismo, '(g.(num(p'(t_n)q))), m-re ere a '(t_n), que a su vez m-re ere a '(t_{n+1}). Algo parecido sucede tambien con las secuencias yablezcas de oraciones como en (7.7). El codigo de cada oracion 8w8u > n(w = t(u=pvq) ! '(w)) (= t(n)) de la secuencia es claramente mayor a n, porque la codi cacion es monotona. Pero, a la vez, esta oracion q-re ere a toda oracion cuyo codigo sea mayor a n, porque, como t(u=pvq) representa una funcion, para cada k > n se puede probar que

$$q^{+} ` 9w(k > n ^ w = t(k=pvq))$$

y, a fortiori, que

$$q^{+} ` 9w(t(n) > n ^ w = t(num(t(n)=pvq)))$$

Luego, por la clausula 1.b) de la de nicion de q-referencia, todas las oraciones de la secuencia yablezca son autorreferentes.

Estas consecuencias no deben achacarse a los conceptos de referencia que introduje en esta seccion, sino mas bien a la carencia de L^{+}_{pa} de constantes de individuo y predicado, nombres simples, para oraciones y sus propiedades correspondientes.

Claramente, el concepto de buena fundacion de nido en 7.10 esta muy lejos, v.g., del concepto de fundacion de Kripke (1975) o de Leitgeb (2005), donde todas las oraciones de L^{+}_{pa} estan fundadas porque expresan `hechos no semanticos', aun cuando, como en el caso de (7.3), no esten bien fundadas de acuerdo con la de nicion 7.10. Las nociones de buena fundacion aletica que introduzco en la siguiente seccion tampoco respetan las intuiciones de un concepto de fundacion pero son mucho mas cercanas a este.

7.3. Referencia aletica

Esta investigacion se centra principalmente en el estudio de las oraciones que dan lugar a paradojas semanticas. Si los patrones de referencia que subyacen a estas expresiones son su caracter stica distintiva, el foco de atencion debe ponerse principalmente L_T , el lenguaje que resulta de expandir L^{+}_{pa} con el s mbolo monadico de predicado T para la verdad. Lamentablemente, las nociones de referencia dadas en el apartado anterior no pueden emplearse para investigar la referencia de las expresiones de L_T , porque estan unicamente de nidas para oraciones de un lenguaje L para el cual existe ya un modelo pretendido N^{L}. Pero este modelo es precisamente el resultado de la busqueda de una teor a de la verdad, lo que todav a no se tiene.

Como lo que se busca es una teor a desentrecomilladora de la verdad y para for-mularla hay que saber primero que oraciones pueden dar lugar a instancias `seguras' del Esquema-T, lo cual, por el momento conjeturo, puede hacerse en terminos de sus patrones referenciales, es necesario averiguar en primera instancia cuales son estos pa-trones para recien despues emplearlos en la construccion de una teor a de la verdad. Considerese, por ejemplo, la siguiente oracion:

$$8x(T\, x\ !\ Bew_{pa^{+}}\, (x))$$

>A que re ere de acuerdo con la de nicion 7.8 de referencia del apartado anterior? Para saberlo, deber a averiguarse que oraciones satisfacen el predicado T , para lo cual ser a necesario saber primero cuales enunciados dan lugar a instancias del Esquema-T, lo cual no es posible.

En consecuencia, esta seccion esta dedicada a una familia de nociones especiales que giran en torno a la referencia relativa al predicado de verdad, a traves del predicado de verdad, que llamo, por esta razon,`referencia aletica'. La referencia aletica es, a gran-des rasgos, una restriccion de la referencia a oraciones estudiada en el apartado anterior al predicado de verdad, con algunas salvedades.

Como anticipe, en 7.3.1 doy una nocion de referencia aletica semantica que, al igual que los conceptos de referencia a numeros y a oraciones, esta de nida en terminos de N^{+}. Esta nocion, si bien es materialmente adecuada y rescata las intuiciones detras de la nocion tecnica de autorreferencia de Priest, es inde nible en el lenguaje de la aritmeti-ca, al igual que aquellas. En consecuencia, restringir el Esquema-T utilizando criterios formulados en base a esta nocion semantica introducir a nociones que exceden la sintaxis en los principios para la verdad y, al mismo tiempo, di cultar a su axiomatizacion, lo cual da lugar a incompatibilidades con el de acionismo y el proyecto minimalista de Horwich (vease el apartado 5.3), no alcanzando el objetivo central de la tesis.

Consecuentemente, en 7.3.2 doy una nocion mas simple de referencia aletica, en la cual se preserva buena parte de las virtudes del concepto semantico pero la idea de verdad en el modelo estandar es reemplazada por la de demostrabilidad en una teor a que axiomatice, al menos parcialmente, ese modelo; las nociones semanticas son reemplaza-das por nociones de teor a de la prueba, dando lugar a la referencia aletica sintactica o

referencia aletica, simpliciter. Esta sera la nocion que jugar un rol central en la construc-cion de teor as axiomaticas desentrecomilladoras de la verdad en el cap tulo siguiente, sistemas no solo correctos sino deductivamente poderosos y, lo que es mas importante, capaces de ser adoptados por el de acionismo y el minimalismo.

En ambos casos, muestro que la tesis referencialista ortodoxa es falsa, no toda paradoja involucra autorreferencia y, a la vez, doy una buena cantidad de evidencia a favor de la tesis referencialista general, mostrando que todas las paradojas conocidas son mal fundadas.

7.3.1. Referencia aletica semantica

Al tratarse de referencia a traves del predicado de verdad , solo oraciones que contengan

T podran referir aleticamente a otras, pero hay muchas mas sutilezas. Por ejemplo, p'q = p q ^ T p q m-re ere intuitivamente a ', a y a , pero solo a esta ultima a traves del predicado de verdad; y 8x(x = h ! T :x) re ere prima facie directamente a la oracion de Henkin y a su negacion, pero solo re ere directamente a su negacion a traves del predicado de verdad, porque `dice' que :Bew_{pa}+ (h) es verdadera, pero no dice nada de la verdad de Bew_{pa}+ (h). En consecuencia, ademas de la cuestion central, de los condicionales relativizados a expresiones que contienen el predicado veritativo, algunos detalles de las de niciones de m y q-referencia a oraciones de la seccion anterior deben ser modi cados para dar conceptos adecuados de referencia aletica, lo cual ocupa el siguiente apartado.

7.3.1.1. Nociones basicas y su ejempli cacion

Al trabajar con un predicado primitivo como unico `generador de referencia', los problemas que los terminos complejos de $L^{+}_{pa}$ generaban a la hora de de nir la m-referencia, ya sea a numeros o a oraciones, quedan atras. Ahora es posible considerar unicamente los terminos `enteros' que ocurren en las oraciones e ignorar sus subterminos propios. Tambien los problemas alrededor de la presunta transitividad de la referencia dejan de existir, porque T es claramente un predicado para el cual la referencia indirecta es deseable.

Notese que las nociones de m-referencia a numeros y a oraciones en las de ni-ciones 7.1 y 7.4 no recurren a ninguna nocion semantica, no hablan de la verdad en el modelo estandar del lenguaje de ninguna oracion. Por ende, su `restriccion' al predicado de verdad no da lugar a una nocion semantica de m-referencia aletica. En efecto, la de nicion que sigue servira para de nir tanto la referencia aletica semantica como la sintactica. El caracter semantico de las nociones de referencia que introduzco proviene siempre de la q-referencia.

De nicion 7.11 (M-referencia aletica). Sean ' y oraciones de L_T . ' m-re ere aleticamente a sii Tt es una suboracion de ' y q^{+} ` t = p q.

Esta de nicion cubre las intuiciones con respecto a la oracion fuertes del mentiroso (reforzado):

$$q^{+} ` l = p:Tlq$$

y muchas otras. En general, cualquier oracion que se obtenga diagonalizando fuertemente formulas '(v) 2 L_T sobre la variable v donde Tv ocurre en ' como una subformula m-referira a s misma. Dos casos paradigmaticos aparte del mentiroso son una version formal fuerte de la oracion del honesto, esto es,

$$t = pTtq$$

una oracion que dice de s misma que es verdadera, y una oracion fuerte de Curry,

$$c = (pTcq!\,.p0\ 6= 0q)$$

que dice de s misma que implica una falsedad.

Sin embargo, versiones alternativas del mentiroso y Curry, como

$$l^0 = \ulcorner T : l^0 \urcorner \tag{7.9}$$

que dice de s misma que es falsa, y

$$c^0 = \ulcorner T(\ulcorner c^0 \urcorner) \to \ulcorner 0 = 0 \urcorner \urcorner \tag{7.10}$$

que dice de s misma que es verdad que implica una falsedad, que se obtienen aplicando el lema de diagonalizacion fuerte a las formulas T :.v y T v !.p0 6= 0q, respectivamente, no resultan autorreferentes, porque, por ejemplo, en T :.l^0, no se predica verdad de T :.l^0 sino de :T :.l^0. Esto no va a ser fuente de problemas, como se vera mas adelante. Ademas, tiene cierto atractivo intuitivo porque, en lo que al predicado de verdad T concierne, (7.9) no dice nada acerca de la verdad de s misma sino de su negacion, al igual que (7.10), donde solo T (c^0!.p0 6= 0q) ! 0 = 0 cae bajo el alcance de T . Por otro lado, el proceso de diagonalizacion s arroja oraciones autorreferentes, aunque no las que se espera, i.e., :T :.l^0 y T (c^0!.p0 6= 0q) ! 0 = 0, en cada caso.

La de nicion de m-referencia aletica es muy semejante a la m-referencia a oraciones del apartado anterior. Para la q-referencia aletica, en cambio, hay que hacer una serie de modi caciones adicionales porque, como ya se~nale, todav a no puede saberse la extension de T y las clausulas de la de nicion 7.5 no ayudan. Lo unico que se mantiene invariable es que la q-referencia aletica tambien esta cerrada bajo conectivas proposicio-nales.

En primer lugar, los cuanti cadores super uos ya no podran ser fuente de q-referencia, porque esta no ser a a traves del predicado veritativo. Luego, una ocurrencia de un cuanti cador 8v en una oracion ' generar instancias de q-referencia aletica solo si v esta libre en la subformula de ' que le sigue inmediatamente. Si v no esta libre en , 8v y q-referiran aleticamente a lo mismo. No ser a sensato ir mas all y pedir que v est bajo el alcance de T en , por casos como 8x(x = l ! 8y(y = x ! :Ty)), donde la variable x esta realizando cierto trabajo para que la oracion re era al mentiroso, pero no cae bajo el alcance de T .

Segundo, oraciones de la forma 8v$_1$: : : v$_n$Tt no referiran ya a todas las oraciones de L$_T$ sino solo a aquellas que `caigan bajo el alcance' de T , esto es, a todas las oraciones denotadas por terminos t[k$_1$ =v$_1$] : : : [k$_n$=v$_n$], donde k$_1$; : : : k$_n$ 2 !. 8xTx, por ejemplo, q-referira aleticamente a todo, pero 8xT :.x solo a negaciones. Al igual que las oraciones de Yablo dadas por

$$q^{+`}(n) = \ulcorner 8x(x > n ! :T(x)) \urcorner \tag{7.11}$$

q⁺ ` (n) = p8y(9z(y = (z) ^ z > n) ! :T y)q; (7.12)

expresiones como 8xT :̣x pueden pensarse como 8x(9y x = :̣y ! T x), donde los cuan-ti cadores estan relativizados a un predicado.

Lo mismo vale para oraciones de la forma 8v1 : : : vn: ; solo que para estas es un poco mas complejo. [k1=v1] : : : [kn=vn] puede contener un termino `nuevo', que no estaba ya en , que denote una oracion, pero este termino puede no estar bajo el alcance de T , con lo cual no contar a. Por ejemplo, no ser a correcto decir que 8x(:̣x = :̣x ^T (x!̣x)) q-re ere aleticamente a todas las negaciones sino solo a los condicionales, aunque toda oracion :' es denotada por un termino :̣p'q que ocurre en (:̣x = :̣x ^ T (x!̣x)[p'q=x]. Ademas, puede ocurrir que [k1=v1] : : : [kn=vn] re era aleticamente a una oracion, no por mencion sino por cuanti cacion. Por ejemplo, en 8x:8y(T (x!̣y)), :8y(T (p'q!̣y)) no m-re ere a ' ni a nada pero q-re ere a todas las oraciones condicionales. Luego, lo mejor es adoptar una clausula recursiva para expresiones dadas por cuanti cadores seguidos pos negaciones. Grosso modo, 8v1 : : : vn: q-referira aleticamente a todo aquello que 8v1 : : : vi 1vi+1vn: [k=vi], donde k 2 !, re era. Esta es la version aletica de la cuanti cacion irrestricta.

Por ultimo, con respecto a oraciones de la forma 8v1 : : : vn(!), solo se puede hablar de cuanti cacion restricta mediante formulas que no contengan T , porque para las que lo contienen no se sabe en principio todav a que objetos las satisfacen. Luego, para evitar riesgos, si el predicado veritativo aparece tanto en como en , la expresion sera tratada como si fuera una negacion, con cuanti cacion irrestricta; pero, si solo apa-rece en el antecedente o solo en el consecuente, hay posibilidad de restringir la referencia. Si T ocurre solo en , en principio 8v1 : : : vn(!) referir a unicamente a aquellas ora-ciones que satis cieran y, viceversa, si T ocurre solo en el , la oracion q-referir a en principio unicamente a aquellas oraciones que satis cieran la negacion del consecuente.

Esto funciona muy bien para expresiones de la forma 8v(! T v), donde T no ocurre en y se aplica a la misma variable sobre la cual se esta cuanti cando. Sin embargo, en el caso de expresiones de la forma 8v(! T f(v)), donde tampoco T ocurre en y f es un s mbolo de funcion del lenguaje, deber a decirse, como se hizo en la de nicion 7.5, que tambien re eren a las oraciones codi cadas por imagenes a traves de la funcion representada por f de los numeros que satisfacen . De hecho, si se habla unicamente de referencia aletica, en analog a con lo dicho en dos parrafos atras, solo estas ultimas relaciones de referencia son relevantes, y no aquellas que ligan 8v(! T f(v)) con oraciones meramente porque sus codigos satisfacen . Luego, se dir a que, si T ocurre en y no en , $8v_1 : : : v_n$(!) q-re ere aleticamente a lo que m-re ere cada $[k_1 = v_1] : : : [k_n = v_n]$, donde $k_1; : : : ; k_n$ 2 ! y N + $[k_1 = v_1] : : : [k_n = v_n]$. Pero, al igual que en el caso de universales seguidos de negaciones en el parrafo anterior, se deber a considerar que, para estos $k_1; : : : ; k_n$, $[k_1 = v_1] : : : [k_n = v_n]$ puede, no solo m-referir aleticamente a otras oraciones sino tambien q-referir. Por eso, nuevamente, se recurrira a una clausula recursiva. De hecho, doy una de nicion mas general, cuanti cada y menos esquematica, en terminos de cuanti cadores existenciales, como en la de nicion 7.5 de q-referencia del apartado anterior.

De nicion 7.12 (Q-referencia aletica semantica) . Dadas dos oraciones '; 2 L_T , ' q-re ere aletica y semanticamente a sii T ocurre en ' y se cumple una de las condiciones 1-3:

1. ' := $8v_1 : : : v_n$ y

   a) := Tt o := : y, para algunos $k_1; : : : ; k_n$ 2 !, $[k_1 = v_1] : : : [k_n = v_n]$ q-re ere aletica y semanticamente a , o contiene una ocurrencia de Ts como suboracion que no ocurre en tal que q^+ ` s = p q; o

   b) := ! y

      i. y contienen T y, para algunos $k_1; : : : ; k_n$ 2 !, $[k_1 = v_1] : : : [k_n = v_n]$ q-re ere aletica y semanticamente a , o contiene una ocurrencia de Tt como suboracion que no ocurre en tal que q^+ ` t = p q, o

      ii. solo contiene T y existen k 2 ! e 1 i n tales que

      N +

      $9v_1 : : : v_{i\ 1} v_{i+1} : : : v_n\ [k = v_i]$

      y $8v_1 : : : v_{i\ 1} v_{i+1} : : : v_n$(!)$[k = v_i]$ q-re ere aletica y semanticamente a , o contiene una ocurrencia de Tt como suboracion que no ocurre en tal que q^+ ` t = p q, o

      iii. solo contiene T y existen k 2 ! e 1 i n tales que

      N +

      $9v_1 : : : v_{i\ 1} v_{i+1} : : : v_n : [k = v_i]$

      y $8v_1 : : : v_{i\ 1} v_{i+1} : : : v_n$(!)$[k = v_i]$ q-re ere aletica y semanticamente a o contiene una ocurrencia de Tt como suboracion que no ocurre en tal que q^+ ` t = p q.

2. ' := : y q-re ere aletica y semanticamente a .

3. ' := ! y o q-re ere aletica y semanticamente a .

Luego, si en 8v$_1$: : : v$_n$ T no ocurre aplicado a ningun termino abierto, toda

oracion de la forma T t que ocurra en [k$_1$ =v$_1$] : : : [k$_n$=v$_n$] ya habr ocurrido en y no dar lugar, por ende, a una relacion de q-referencia; 8v$_1$: : : v$_n$ podra m-referir pero no q-referira aleticamente a nada. Esto garantiza la inocuidad de los cuanti cadores super uos.

La oracion del mentiroso que se obtiene en pat aplicando el lema de diagonali-zacion debil a :T v, i.e.,

pat ` $:T p q;

dada por

8u(u = p8v(Diag(u; v) ! :T v)q ! 8v(Diag(u; v) ! :T v))

q-re ere aleticamente a s misma, porque, por la clausula 1.b)ii de la de nicion 7.12, q-re ere a todo lo que

8v(Diag(p8v(Diag(u; v) ! :T v)q; v) ! :T v)

re ere, que, por la misma clausula y la de nicion del predicado Diag, q-re ere a todo lo que

:T p q

re ere. Y, en general, las oraciones que se obtienen a diagonalizando debilmente sobre un predicado que contiene T v como una subformula resultan q-autorreferenciales.

En cambio, aquellas en las cuales esto no sucede, pueden no ser autorreferencia-les. Basta con considerar casos analogos a las oraciones (7.9), (7.10) donde el lema de diagonalizacion debil se aplica en lugar del fuerte. Nuevamente, esto no conlleva gran-des inconvenientes y es coherente con la nocion de referencia a traves del predicado de verdad.

De nicion 7.13 (Referencia directa aletica semantica) . Dadas dos oraciones '; 2 L$_T$, ' re ere directa, aletica y semanticamente a sii m-re ere o q-re ere directa, aletica y semanticamente a .

De nicion 7.14 (Cadenas de referencia directa aletica semantica). Una secuencia de oraciones $_0$; : : : ; $_n$ 2 L$_T$, n 2 !, es una cadena de referencia directa aletica semantica sii, para cada i < n, $_i$ re ere directa, aletica y semanticamente a $_{i+1}$.

De nicion 7.15 (Referencia aletica semantica) . Sean ' y oraciones de L$_T$. ' re e-re aletica y semanticamente a sii existe una cadena de referencia semantica aletica $_0$; : : : ; $_n$ tal que $_0$ = ' y $_n$ = .

A partir de las nociones dadas se pueden definir autorreferencia y buena fundacion aleticas.

Definicion 7.16 (Autorreferencia aletica semantica). Sea φ una oracion de L_T. φ es autorreferente aletica y semanticamente sii refiere aletica y semanticamente a sí misma.

Definicion 7.17 (Buena fundacion aletica semantica). Sea φ una oracion de L_T. φ es aletica y semanticamente bien fundada sii ninguna cadena de referencia aletica y semantica que empiece en φ es indefinidamente extensible.

Las oraciones de la secuencia de Yablo, tanto en su formulacion original en (7.11) como en su formulacion alternativa (7.12), resultan aleticamente mal fundadas pero no autorreferentes. En el primer caso, cada termino (n) denota una oracion de la forma

$$\forall x(x > n \to \neg T(x))$$

que, por la definicion 7.11, no m-refiere a nada, y por la definicion 7.12 q-refiere a todas

aquellas oraciones denotadas por (k) tales que $k > n$, es decir, cada oracion de la lista refiere directamente solo a las oraciones que se encuentran mas adelante en la lista. Luego, por la definicion 7.15, refieren simpliciter a estas oraciones exclusivamente. Y por la definicion 7.16, ninguna de las oraciones de la formulacion original de la lista de Yablo es aleticamente autorreferente. Por otro lado, como todo segmento inicial de la lista de Yablo (7.11) es una cadena de referencia aletica, todos sus miembros son mal fundados de acuerdo con la definicion 7.17.

Con respecto a la formulacion alternativa en (7.12) se puede decir lo mismo: cada termino (n) denota la oracion

$$\forall y(\exists z(y = (z) \wedge z > n) \to \neg T y)$$

que no m-refiere aleticamente a nada y q-refiere solo a aquellas oraciones a las cuales cada $\neg T k$ refiere, donde $k \in$! y N^+ $\exists z(k = (z) \wedge z > n)$, i.e., a todas aquellas denotadas por k, donde $k = (z) \wedge z > n$.

Las nociones presentadas tambien dan un veredicto intuitivamente correcto sobre otras secuencias de oraciones semejantes a la de Yablo, que tambien dan lugar a !-inconsistencias junto con sus correspondientes instancias del Esquema-T. Por ejemplo, las siguientes oraciones conforman lo que se conoce como `lista dual de Yablo' (cf. Cook

(2014a)):

$$:8x(x > 0 ! T (x)) \tag{7.13}$$

$$:8x(x > 1 \quad ! T (x))$$

$$:8x(x > 2 \quad ! T (x))$$

$$: : :$$

donde cada (n) con n 2

! denota la n-esima oracion en la secuencia. Estas pueden obtenerse en q^{+} mediante un argumento diagonal al igual que las oraciones de Yablo. Intuitivamente cada una de las oraciones en la lista dice que alguna de las expresiones que se encuentran mas adelante no es verdadera. Siendo que el patron de referencia es el mismo que el que subyace a la lista de Yablo, cada una de estas oraciones es mal fundada pero no autorreferencial.

Tambien es posible formular secuencias de oraciones alternativas, con patrones de referencia diferentes, dando lugar a !-inconsistencias, como la siguiente:

$$8(x > 0 ! :8y(y > x ! T (y))) \tag{7.14}$$

$$8(x > 1 \quad ! :8y(y > x ! T (y)))$$

$$8(x > 2 \quad ! :8y(y > x ! T (y)))$$

$$: : :$$

donde cada (n) con n 2 ! denota la n-esima oracion de la lista. Esta re ere directamente a lo que cada :8 y(y > k ! T (y)) donde k > n re ere, esto es, a todas las oraciones T (m) donde m > k > n. Luego, cada oracion de la lista re ere a todas las que se encuentran dos o mas lugares adelante, pero no a la que le sigue inmediatamente. Por ende, son tambien mal fundadas y no autorreferenciales.

Apelando a la proposicion 1.11 es posible tambien generar !-cadenas de oraciones que contengan T tales que cada una m-re era aleticamente a la que le sigue en la cadena. Por ejemplo, la siguiente es una cadena de honestos:

$$t_0 = pT\ t_1q \tag{7.15}$$

$$t_1 = pT\ t_2q$$

$$t_2 = pT\ t_3q$$

$$: : :$$

Por la de nicion 7.15 de referencia aletica semantica, cada oracion T t_n re ere, no solo a la que le sigue, sino a todas las que estan por debajo suyo y, como todo segmento inicial de esta cadena es una cadena de referencia por la de nicion 7.14, todas sus oraciones son mal fundadas. Pero, a diferencia del veredicto dado por la nocion de referencia directa no aletica de la seccion anterior, como se hizo para la cadena de oraciones (7.3) de L^{+}_{pa}, ninguna de estas expresiones es autorreferente, porque solo importan los terminos t_i, i 2 !, no sus subterminos.

Para otras oraciones como 8xT f(x; p0 = 0q), donde f(0; p'q) := p'q y f(S(x); p'q) := pT num(f(x; p'q)) q (f antepone x veces el predicado de verdad a ') y la oracion de McGee, la referencia aletica tambien se corresponde con lo que dicta la intuicion. 8xT f(x; p0 = 0q) dice que todas las iteraciones de T sobre 0 = 0 son verdaderas. De acuerdo con la clausula 1.a) de la de nicion 7.12 de q-referencia, re ere a todas aquellas oraciones denotadas por f(k; p0 = 0q) para cada k 2 !, i.e., a 0 = 0, denotada por f(0; p0 = 0q), a T p0 = 0q, denotada por f(1; p0 = 0q), a T pT p0 = 0qq, denotada por f(2; p0 = 0q), etc. Cada una de estas oraciones re ere directamente a un numero nito de oraciones, v.g., T pT p0 = 0qq re ere a T p0 = 0q y, por transitividad, a p0 = 0q. Luego, no existe una cadena de referencia inde nidamente extensible que comience en 8xT f(x; p0 = 0q): es una oracion bien fundada.

Por su parte, la oracion :8xT f(x; m) de McGee, i.e.,

$$q^{+} \text{ ` } m = p{:}8xT\ f(x; m)q \tag{7.16}$$

que bajo ciertas condiciones da lugar a !-paradojas, como se vio en el apartado 3.3, re ere tambien a las oraciones denotadas por f(k; m) para cada k 2 ! y, por ende, re ere a s misma, es mal fundada.

La nocion de buena fundacion dada por la de nicion 7.17 no coincide con las no-ciones de fundacion de Kripke (1975) o Leitgeb (2005) (veanse los apartados 3.1 y 3.2), aunque no esta demasiado alejada. Por ejemplo, 8x(T x ! T x) re ere aleticamente a toda oracion, pero esta fundada en el sentido de Leitgeb, porque es verdadera en toda ex-tension de N^{+}. Asimismo, si t = pt = t_T tq se obtiene en q^{+} diagonalizando x = x _T x, re ere aleticamente a s misma y, por tanto, esta mal fundada, pero esta fundada tanto para Kripke como para Leitgeb. En general, y a diferencia de muchos otros abordajes, ac todas las oraciones autorreferentes, directa o indirectamente, resultan mal fundadas, porque es posible producir para ellas cadenas de referencia aletica repetitivas inde ni-damente extensibles. La autorreferencia es, desde este punto de vista, un tipo especial de mala fundacion.

Observacion 7.18. Si ' es una oracion aleticamente autorreferente de L_T , ' no esta aleti-camente bien fundada.

7.3.1.2. Inde nibilidad y axiomatizacion

Al estar de nida en terminos del predicado de verdad-en-N^{+}, la q-referencia aletica semantica no es de nible en L^{+}_{pa} y, por tanto, tampoco la referencia aletica semantica directa, como muestro en este apartado. Luego, estas nociones no puede emplearse di-rectamente en la formulacion de una teor a axiomatica de la verdad en L_T . Es preciso introducir en el lenguaje un predicado primitivo binario $R_q{}^{s}(u; v)$ para expresarla y luego incorporar axiomas a pat que gobiernen su comportamiento. En este apartado ofrezco una axiomatizacion con estas caracter sticas.

Dada una codi cacion de las expresiones de L_T con numeros naturales, la nocion de m-referencia aletica de u a v puede de nirse directamente en L^{+}_{pa} mediante la siguiente expresion:[7]

$$Sent_{L_T}(u \mathbin{!_{.}} v) \wedge 9t < u(SubF orm(u; T t)_{p.q} \wedge t = v) \quad (7.17)$$

En castellano, tanto u como v son oraciones de L_T |porque el condicional que tiene a u como antecedente y a v como consecuente lo es| y existe un termino cerrado t que denota v tal que T t es una subformula de u. La noto $R_m(u; v)$. Al ser una expresion *1* (vease el apartado 1.2.5), R_m representa la m-referencia aletica directa en q^{+} y esta es, por ende, una nocion recursiva.

Si la referencia aletica semantica directa fuera de nible en L^{+}_{pa} mediante una formula $R^{s}(u; v)$, la q-referencia tambien lo ser a, por medio del predicado $R_q{}^{s}(u; v) := R^{s}(u; v) \wedge :R_m(u; v)$. En vista de la de nicion 7.12 de q-referencia aletica semantica, este predicado deber a satisfacer los siguientes principios:

qrs1 $8x; y(Sent_{L^{+}_{pa}}(x) \,!\, :R^{s}_{q}(x; y))$

qrs2 $8x; y(At_{L_T}(x) \,!\, :R_q{}^{s}(x; y))$

qrs3 $8x; y; z; u(U(x; z; T_{.}\, u) \wedge Sent_{L_T}(y) \,!\, (R_q{}^{s}(x; y) \,\$\, 9w(lg(w) = lg(z) \wedge$
$9t(SubF orm(\sim s_{.}(T_{.}\, u(p0q=t); w); T t) \wedge t = y))))$

qrs4 $8x; y; z; w(U(x; z; :_{.}u) \wedge Sent_{L_T}(y) \,!\, (R_q{}^{s}(x; y) \,\$\, 9w(lg(w) = lg(z) \wedge$
$(R_q{}^{s}(\sim s_{.}(:_{.}u; w); y) \_ 9t(SubF orm(\sim s_{.}(:_{.}u(p0q=t); w); T t) \wedge t = y)))))$

qrs5 $8x; y; z; u; v(U(x; z; u \dot{!} v) \wedge Sent_{L_T}(y) \wedge :F orm_{L^{+}_{pa}}(u) \wedge :F orm_{L^{+}_{pa}}(v) \,!\, (R^{s}_{q}(x; y) \,\$$
$9w(lg(w) = lg(z) \wedge (R_q{}^{s}(\sim s_{.}(u!_{.}v; w); y) \_ 9t(SubF orm(\sim s_{.}(u!_{.}v(p0q=t); w); T t) \wedge t = y)))))$

[7] *Vease el apartado 1.2.3* para detalles de notacion.

qrs6 8y(F orm$_{L_{pa+}}$ (pq) ^ :F orm$_{L_{pa+}}$ (p q) ^ Sent$_{L_T}$ (y) ! (R$_q^s$(p8v$_1$: : : v$_n$(!)q; y) $

9x $_{i=1}^{n}$(9v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$: : : v$_n$ [x=v$_i$]^(R$_q^s$(p8v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$: : : v$_n$(!)q(x=pv$_i$q); y)_
t(SubF orm((0 =t)(x= v); T t) t = y)))))
9 p q p q ¯ p q ^

qrs7 8x; y; z; w; u; v(U(x; z; u!.v) ^ U(w; z; :.v!.:.u) ! (R$_q^s$(x; y) $ R$_q^s$(w; y)))

qrs8 8x; y(R$_q^s$(:.x; y) $ R$_q^s$(x; y))

qrs9 8x; y; z(R$_q^s$(x!.z; y) $ R$_q^s$(x; y) _ R$_q^s$(z; y))

donde ! 2 L$_T$ tiene como variables libres a v$_1$; : : : ; v$_n$.

`qrs' es un acronimo de `Q-Referencia Semantica'. qrs1 indica que las oraciones del lenguaje de la aritmetica no q-re eren, mientras que qrs2 establece lo mismo para formulas atomicas. Los axiomas qrs3 y qrs4 se corresponden con la clausula 1.a) de la de nicion 7.12 de q-referencia, qrs5 y qrs6 con 1.b)i y ii, respectivamente, qrs7, con la ayuda de qrs6, garantiza la clausula 1.b)ii y qrs8 y qrs9 formalizan las condiciones 2 y 3, correspondientemente. A modo de aclaracion, el predicado 9t(SubF orm(~s(x(p0q=t); u); T t) ^ t = y)) establece que hay un termino cerrado t tal que sustituir t por 0 en (la formula) x y luego sustituir todos los argumentos de la secuencia u por cada una de las variables libres en esta formula da por resultado una formula que tiene a T t como subformula y t denota (la oracion) y. En otras palabras, t ocurre en la sustitucion de las variables libres en x por los miembros de u como resultado de esta sustitucion, no estaba antes. Asimismo, las formulas de la forma

9x $_{=1}^{n}$(9v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$: : : v$_n$ [x=v$_i$] ^ ') son abreviaturas de

9x((9v$_2$: : : v$_n$ [x=v$_1$] ^ ') _ _ (9v$_1$: : : v$_n$ $_1$ [x=v$_n$] ^ '))

No obstante, si una teor a formulada en L$_T$ satis ciera estas clausulas, ser a inconsistente.

Proposicion 7.19 (Inde nibilidad de la q-referencia aletica semantica). Si th q$^+$ es una teor a formulada en L$_T$ y este lenguaje contiene un predicado R$_q^s$(u; v) que satisface qrs6 en th, th es inconsistente.

Demostracion. Aplicando el lema de diagonalizacion fuerte (teorema 1.8) a la formula :R$_q^s$(8.pvq(u!.pT-vq); p'q), donde ' es una oracion de L$^+_{pa}$, se obtiene un termino t tal que

q$^+$ ` t = p:R$_q^s$(8.pvq(t!.pT vq); p'q)q (7.18)

Intuitivamente, :R_q^S(8.pvq(t!.pT-vq); p'q) es una oracion que dice de s misma que ' no la satisface; en una suerte de oracion del mentiroso. Instanciando qrs6 en

8v(:R_q^S(8.pvq(t!.pT-vq); p'q) ! T v)

se obtiene en th

R_q^S(p8v(:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q) ! T v)q; y) $ 9x(:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q) ^
9t(SubF orm(pT xq; T t) ^ t = y))

e, instanciando y con ',

R_q^S(p8v(:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q) ! T v)q; p'q) $ 9x(:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q) ^
9t(SubF orm(pT-xq; T t) ^ t = p'q))

$:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q)
^ 9t(t = p'q)

$:R_q^S(8.pvq(t!.pT vq); p'q)

lo cual es una contradiccion, en virtud de (7.18). □

Luego, como anticipe, no existe una formula de L^{+}_{pa} que de na la q-referencia aletica semantica y, por ende, tampoco la referencia aletica semantica directa. Mediante un razonamiento analogo es sencillo probar resultados semejantes para las nociones de q-referencia a numeros y q-referencia a oraciones dadas por las de niciones 7.2 y 7.5, respectivamente.

Luego, si se desea un abordaje axiomatico de la referencia aletica semantica, sera preciso incorporar el s mbolo de predicado R_q^S como un primitivo junto con axiomas para que regulen su comportamiento. Sea L_R = L_T [fR_q^Sg. Los candidatos obvios a axiomas son los mismo principios qrs1-qrs9, que ya no daran lugar a inconsistencias porque el esquema qrs6 solo admite instancias dadas por formulas de L_T , que no contie-nen el nuevo s mbolo de predicado R_q^S. La siguiente es una axiomatizacion esquematica de la q-referencia aletica semantica.[8]

De nicion 7.20 (qrs). qrs L_R es la teor a que extiende el resultado de formular la aritmetica de primer orden en L_R, con todas las instancias del esquema de axioma de induccion dadas por formulas de este lenguaje, mediante los axiomas qrs1-qrs9.

[8]Como el predicado `N+ ' no es traducible a ningun lenguaje de primer orden, existen dos modos de expresar las clausulas de la de nicion 7.2 en una extension de L^{+}_{pa}: o bien se recurre a esquemas, como en qrs6, o bien al predicado de verdad T . Dado que que objetivo es axiomatizar T en funcion de R_q^s y no a la inversa, como todav a no se sabe nada de T , tomo el primer camino. La desventaja principal es que la teor a resultante agregar in nitos axiomas para R_q^s.

Proposicion 7.21. qrs es !-consistente.

Demostracion. Siendo los axiomas de qrs formalizaciones directas de las clausulas de la de nicion recursiva de q-referencia aletica semantica, el modelo hN^{+}; ?; Ri, que extiende N^{+} a todo L_R asignando el conjunto ? a T y R a $R_q{}^{s}$ como sus interpretaciones, tal que R = fh#('); #( )i : '; 2 L_T y ' q-re ere aletica y semanticamente a g es un modelo de qrs. □

A partir de la de nicion de m-referencia en (7.17) y la axiomatizacion de la q-referencia aletica semantica dada por la teor a qrs, puede de nirse la referencia aletica semantica directa en L_R mediante la formula

$$R_d{}^{s}(u; v) := R_m(u; v) \_ R_q{}^{s}(u; v)$$

$R^{s}_{d}(u; v)$ se aplica a (los codigos de) dos oraciones u; v |i.e., u re ere aletica, semantica y directamente a v| si y solo si u m-re ere o q-re ere aletica, semantica y directamente a v.

Siendo la relacion de referencia semantica la union de la m-referencia y la q-referencia y dado que la primera es recursiva, la referencia hereda la complejidad de la q-referencia. Bajo el modelo estandar de qrs de nido en la prueba de la proposicion 7.21 pueden a rmarse muchos mas casos de referencia que los que esta teor a informa. Por ejemplo, la oracion 8x(:Bew_{qrs}(x) ! Tx) q-re ere semanticamente a 0 6= 0, porque qrs es una teor a consistente y, por ende, no prueba 0 6= 0, pero, como indica el segundo resultado de incompletitud de G•odel (teorema 1.13), qrs no tiene modo de saber esto ultimo, precisamente porque es consistente.

Notese que la nocion de q-referencia que he dado esta de nida exclusivamente pa-ra oraciones de L_T , so pena de trivialidad. Sin embargo, una vez axiomatizada, parece natural extenderla a oraciones del lenguaje de la nueva teor a, esto es, L_R. Despues de todo, las oraciones que contienen el predicado $R_q{}^{s}$ tambien pueden q-referir. Intuitiva-mente, v.g., 8x($R_q{}^{s}$(p8xT :.xq; x) ! Tx) q-re ere a todo aquello a lo que 8xT :.x q-re ere, esto es, a todas las oraciones que son negaciones.

Como muestra el teorema de inde nibilidad, extender la axiomatizacion dada en 7.20 a oraciones del lenguaje completo de la teor a no es sencillo. Si bien puede facilmente extenderse qrs1 a formulas de L_R fT g, qrs2 a formulas atomicas de la forma $R_q{}^{s}$(t; s) y relativizar los axiomas qrs3-qrs5 y qrs7-qrs9 a oraciones de L_R en lugar de L_T , el esquema de axioma qrs6 requiere mas trabajo; extenderlo simplemente a formulas y pertenecientes a todo L_R lleva a contradiccion.

Un modo relativamente simple de extender los axiomas de qrs a oraciones de L_R consiste en establecer una jerarqu a de lenguajes y teor as. En qrs6 es preciso que las oraciones a la derecha del bicondicional no contengan el predicado de referencia que se en-cuentra a la izquierda. Luego, se precisa una secuencia de predicados $R_q^0; R_q^1; : : : ; R_q^n; : : :$, que incluso podr a extenderse trans nitamente, postulando un predicado R_q para cada ordinal α. Un segundo camino, que evita las jerarqu as, consiste en restringir el axioma qrs6 a oraciones `no problematicas', como pretendo hacer con el Esquema-T en el cap tulo 8. Pero se supon a que la misma nocion de referencia era la que iba a hacer este trabajo. Este camino parece llevar a un regreso in nito.

En de nitiva, el problema de la referencia semantica es al menos tan complejo como el de la verdad y, en alguna medida, uno se reduce al otro. La nocion es permeable a paradojas practicamente identicas a la del mentiroso, como se vio en la proposicion 7.19. Por tanto, aunque tiene interes en s mismo, no parece tener demasiado sentido investigar la referencia aletica semantica para dar una solucion al problema de la verdad.

Por otro lado, como argument en la seccion 5.3, si lo que se desea es emplear una nocion de referencia en la construccion de teor as de acionistas de la verdad, la nocion es preferentemente de nible en el lenguaje de la aritmetica. Pero la proposicion 7.19 establece lo contrario; la nocion de referencia aletica semantica es demasiado compleja, como lo son la fundacion de Kripke (1975) y la dependencia de Leitgeb (2005) (veanse los apartados 3.1 y 3.2).

En la seccion que sigue ofrezco nociones analogas a la q-referencia y referencia aletica semantica pero reemplazando la nocion semantica de verdad-en-N^+ por la nocion sintactica de teoremicidad. Naturalmente, el resultado son nociones mucho mas simples, de nibles en el lenguaje de la aritmetica pero, a la vez, menos generales, dependientes de la teor a a la cual la nocion de teoremicidad que se est utilizando corresponda.

7.3.2. Referencia aletica sintactica

Una familia de conceptos similares a los de la seccion anterior pero mas simples, que llamo `sintacticos', puede de nirse reemplazando de la nocion de verdad en el modelo estandar en las clausulas 1.b)ii-iii de la de nicion 7.12 de q-referencia aletica semantica por una nocion de prueba en una teor a. Por supuesto, las nociones resultantes van a depender, ya no solo del lenguaje para el cual estan formuladas, sino tambien de esta teor a cuya nocion de prueba se ha utilizado en la de nicion.

Prima facie, se estar a ignorando una inmensa cantidad de casos de referencia que `suceden' en el modelo estandar de la teor a sobre la cual se trabaje, pero que esta es incapaz de probar; mas adelante se veran algunos ejemplos. Sin embargo, si se piensa desde el punto de vista de la teor a, que es lo que importa a la hora de analizar paradojas, porque estas, para serlo, deben dar lugar a una inconsistencia o a a rmaciones incorrectas en la teor a, no queda claro que sea correcto a rmar esas relaciones de referencia que solo tienen lugar en algunos pero no en todos sus modelos. En cualquier caso, espero, se juzgar a los conceptos que ac introduzco por su utilidad mas que por los detalles de su formulacion.

En el apartado siguiente introduzco nociones de q-referencia, referencia directa, referencia, autorreferencia y buena fundacion aleticas sintacticas y muestro, respectivamente, que todas ellas son de nibles en el lenguaje de la aritmetica de primer orden. En 7.3.2.2 se~nalo ciertos inconvenientes que estos conceptos sintacticos traen con sigo y ofrezco una solucion posible. Finalmente, en 7.3.2.3 introduzco una nocion que permite aislar los inconvenientes se~nalados en el apartado precedente.

7.3.2.1. Nociones basicas, de nibilidad y ejemplos

Sea th cualquier teor a formulada en L_T que extienda pat con axiomas pertenecientes a L^{+}_{pa} que sean verdaderos en N^{+}. Notese que la m-referencia aletica no precisa una rede nicion en terminos de teor a de la prueba porque, tal como se la presento en la de nicion 7.11, ya es un concepto plenamente no semantico. Las nociones sintacticas (en el sentido de `teor a de la prueba', `proof-theoretic') que presento a continuacion deber an ser acompa~nadas por este cali cativo, que omito por cuestiones de legibilidad. Por ejemplo, en lugar de hablar de q-referencia aletica sintactica hablo de q-referencia aletica a secas para referirme a ella.

De nicion 7.22 (Q-referencia aletica). Dadas dos oraciones '; 2 L_T , ' q-re ere aleticamente a en th sii T ocurre en ' y se cumple una de las condiciones 1-3:

1. ' := 8v_1 : : : v_n y

   a) := Tt o := : y, para algunos k_1; : : : ; k_n 2 !, [k_1=v_1] : : : [k_n=v_n] q-re ere aleticamente a , o contiene una ocurrencia de Ts como suboracion que no ocurre en tal que q^{+} ` s = p q; o

   b) := ! y

      i. tanto como contienen T y, para algunos k_1; : : : ; k_n 2 !, [k_1=v_1] : : : [k_n=v_n] q-re ere aleticamente a o contiene una ocurrencia de Tt como suboracion que no ocurre en tal que q^{+} ` t = p q, o

ii. solo contiene T y existen k 2 ! e 1 i n tales que

th ` 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn [k=vi]

y 8v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn(!)[k=vi] q-re ere aleticamente a o contiene una ocurrencia de Tt que no ocurre en tal que q+ ` t = p q, o

iii. solo contiene T y existen k 2 ! e 1 i n tales que

th ` 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn: [k=vi]

y 8v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn(!)[k=vi] q-re ere aleticamente a o contiene una ocurrencia de Tt que no ocurre en tal que q+ ` t = p q.

2. ' := : y q-re ere aleticamente a .

3. ' := ! y o q-re ere aleticamente a .

Al igual que la q-referencia semantica, la q-referencia aletica sintactica puede extenderse naturalmente a un lenguaje con conjunciones y existenciales como s mbolos primitivos. Asimismo, es capaz de dar cuenta de la autorreferencialidad de todas las formulas que se obtienen aplicando el lema diagonal debil (cf. teorema 1.7) a una formula que contiene como subformula a Tv. Aplicando el lema diagonal debil a una formula '(v) con estas caracter sticas, se obtiene que una oracion tal que

pat ` $ '(p q);

cuya verdadera forma es

8u(u = p8v(Diag(u; v) ! '(v))q ! 8v(Diag(u; v) ! '(v)))

Como q+ prueba todas las identidades verdaderas, por la clausula 1.b)ii de la de nicion 7.22, esta oracion q-re ere aleticamente a todo lo que

8v(Diag(p8v(Diag(u; v) ! '(v))q; v) ! '(v))

re ere, que, por la misma clausula y el hecho de que el predicado Diag representa la relacion de diagonalizacion en q+ (vease el apartado 1.2.3), q-re ere a todo lo que '(p q) re ere que, como contiene una ocurrencia de T p q, re ere a .

En cambio, si Tv no ocurre en ', al igual que la nocion semantica, la de ni-cion 7.22 no garantiza que su diagonalizacion debil sea autorreferente, lo cual, como argument para la nocion semantica, es intuitivamente correcto.

A diferencia de lo que ocurr a en la de nicion 7.12 de q-referencia semantica,

ya no es preciso saber si un numero satisface en el modelo estandar de la teor a el

antecedente de un condicional precedido por una tira de cuanti cadores en una oracion para decidir si la oracion re ere o no a un enunciado dado, sino que meramente hay que averiguar si la teor a prueba o no que el numero satisface el antecedente. Dado que el conjunto de teoremas de una teor a axiomatizable es siempre semirecursivo, la q-referencia sera asimismo una relacion semirecursiva y, por tanto de nible en $L^{+}{}_{pa}$ L_T y debilmente representable en q^{+} mediante una formula

$_1$. Porque es posible programar una maquina que tome dos argumentos x e y y responda `s ' cuando tanto x como y codi quen oraciones y x q-re era aleticamente a y, y se cuelgue o responda \no" cuando este no sea el caso.

La maquina recibe como entradas dos numeros naturales, x e y, y averigua pri-mero si ambos codi can oraciones de L_T y si en x ocurre un termino abierto bajo el alcance de T . En caso negativo, responde \no" y para. En caso a rmativo, remueve los cuanti cadores super uos en cada componente proposicional de x en el cual ocurre un termino abierto bajo el alcance de T y les asigna una etiqueta [0]; [1]; : : : a cada una de las formulas resultantes, de acuerdo con el orden en el que aparecen en x.[9] De ahora en mas la maquina opera con las siguientes tres fases, comenzando por la fase 1 y la formula etiquetada [0]:

Fase 1: La maquina recibe una oracion etiquetada [j]. Si [j] := 8v$_1$: : : v$_n$, donde es una oracion atomica, una negacion o un condicional en el cual T ocurre tanto en el antecedente como en el consecuente, la maquina pasa a la fase 2 con , la primera n-tupla hk$_1$; : : : ; k$_n$i 2 !^{n} que no ha sido utilizada todav a para esta etiqueta (de acuerdo con una codi cacion dada de tuplas mediante numeros naturales), las variables v$_1$; : : : ; v$_n$ y la oracion y. Si [j] := 8v$_1$: : : v$_n$(!) donde T ocurre solo en ( ), la maquina chequea si el primer par hm; ki que no ha sido aun considerado para esta etiqueta (nuevamente, de acuerdo con una enumeracion ja) es tal que, para algun 1 i n, m es el codigo de una prueba de 9v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$v$_n$ [k=v$_i$] (9v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$v$_n$: [k=v$_i$]) en th. Si no lo es, reinicia la fase 1 con la formula etiquetada [j + 1], de existir; de lo contrario, con [0]. Si lo es, inicia la fase 2 con 8v$_1$: : : v$_i$ $_1$v$_{i+1}$: : : v$_n$(!), m, v$_i$ e y.

[9] *Los componentes proposicionales $_1$; : : : ; $_n$ de una formula ' de L son las subformulas mas cortas de ' tales que, si p es una letra proposicional, el resultado de sustituir en ' las formulas $_1$; : : : ; $_n$ por p es una formula del lenguaje de la logica proposicional. Intuitivamente, los componentes proposicionales de una formula ' son las subformulas que aparecen en una rama del arbol constructivo de ' en el primer nodo a partir del cual solo se agregan conectivas proposicionales. Son siempre formulas atomicas o formulas cuya conectiva principal es un cuanti cador. Por ejemplo, los componentes de :(8x(0 = 0 ^ lg(x) = 1) ! 2 + 0 = 5) son 8x(0 = 0 ^ lg(x) = 1) y 2 + 0 = 5. Listar los componentes proposicionales de una formula dada en su orden de aparicion es claramente un procedimiento computable.*

Fase 2: La maquina recibe como entradas una formula ', numeros $k_1; \ldots; k_n$, variables

$v_1; \ldots; v_n$ y una oracion , y chequea si '$[k_1=v_1]$ ... $[k_n=v_n]$ contiene una nueva ocurrencia de Tt, donde t es un termino cerrado, tal que t = p q. En caso negativo, inicia la fase 3 con '$[k_1=v_1]$ ... $[k_n=v_n]$ y como entradas. En caso a rmativo, responde \s " y para.

Fase 3: La maquina toma como entradas dos oraciones ' y , remueve todos los cuan-

ti cadores super uos de cada componente proposicional de ' en el cual ocurre un termino abierto bajo el alcance de T y etiqueta los enunciados universales resultantes con [n]; [n + 1]; ... de acuerdo con el orden de aparicion en ', comenzando por el m nimo numero no utilizado ya como una etiqueta y vuelve a la fase 1.

En las tres fases solo hay procesos recursivos involucrados. Si ' de hecho q-re ere a , la maquina lo dira en algun momento. Si no lo hace puede deberse a razones diversas. Si es porque ' no contiene cuanti cadores, la maquina dira en efecto que ' no q-re ere a . Si es porque ' := $8v_1 \ldots v_n$(!) tal que T ocurre solo en y no existen k 2 ! y 1 i n para los cuales puede probarse que $[k=v_i]$ y $8v_1 \ldots v_{i\,1} v_{i+1} \ldots v_n$ (!)$[k=v_i]$ q-re ere a , la maquina seguira para siempre sin dar una respuesta, recorriendo todos los numeros para ver si alguno satisface . Sea $R_q(u; v)$ la formula $_1$ que de ne la q-referencia aletica en L_{pa}^+ y la representa debilmente en q^+.

De nicion 7.23 (Referencia directa aletica). Dadas dos oraciones '; 2 L_T , ' re ere aletica y directamente a en th sii m-re ere o q-re ere aleticamente a en th.

Esta relacion puede tambien de nirse en L^+_{pa} y debilmente representarse en q^+ mediante la formula

$$R_d(u; v) := R_q(u; v) \_ R_m(u; v) \tag{7.19}$$

Como R_m es un predicado $_1$ (cf. (7.17)), mientras que R_q es solo $_1$, R_d es tambien $_1$.

El siguiente resultado sera util para establecer conexiones entre la nocion de referencia aletica directa (sintactica) y la nocion de dependencia de Leitgeb en el cap tulo 8. Estas conexiones son lo que va a posibilitar las demostraciones de consistencia y !-consistencia de las teor as que proveo mas adelante en ese cap tulo.

Proposicion 7.24. Sean '; y formulas de L_T .

1. Si ' 2 L_{pa}^+, ' no re ere aletica y directamente a .

2. ' re ere aletica y directamente a sii :' re ere aletica y directamente a .

3. ' ! re ere aletica y directamente a sii tanto ' como son oraciones de L_T

y alguna de ellas re ere aletica y directamente a .

Demostracion. El punto 1 se sigue del hecho de que tanto la de nicion 7.11 como la 7.22 requieren que ' contenga T para que re era a una oracion. Los puntos 2 y 3 se deben a que ni la m-referencia ni la q-referencia se ven afectadas por la presencia o ausencia de conectivas, como indican la de nicion 7.11 y los puntos 3 y 4 de la de nicion 7.22. □

En consecuencia, la referencia aletica directa es composicional, a diferencia de las nociones de Putnam, Goodman y Urbaniak y, por ende, no lleva a los inconvenientes que estas nociones padecen, como se~nale en el apartado 6.3.

De nicion 7.25 (Cadenas de referencia aletica directa). Una secuencia de oraciones $_0; : : : ; _n$ 2 L_T , n 2 !, es una cadena de referencia aletica directa en th sii, para cada i < n, $_i$ re ere aletica y directamente a $_{i+1}$ en th.

El conjunto de secuencias que son cadenas de referencia aletica directa es asimismo semirecursivo, pues es de nible en L^+_{pa} a partir del predicado R_d mediante la siguiente expresion:

$$Cref(v) := Seq(v) \wedge 8i < lg(v)R_d((v)_i; (v)_{i+1})$$

de acuerdo con la cual v es una cadena de referencia si codi ca una secuencia de oraciones tales que cada una re ere directamente a la que sigue en la secuencia. La formula es $_1$ porque Seq es $_0$, por ser un predicado recursivo (vease el apartado 1.2.3), R_d es $_1$ y el cuanti cador 8i < lg(x) esta acotado.

De nicion 7.26 (Referencia aletica). Sean ' y oraciones de L_T . ' re ere aleticamente a en th sii existe una cadena de referencia aletica $_0; : : : ; _n$ en th tal que $_0$:= ' y $_n$:= .

Dado que la nocion de referencia esta de nida en terminos de cadenas de referen-cia, que son de nibles en L^+_{pa}, esta tambien lo es, mediante la expresion

$$R(u; v) := 9x(Cref(x) \wedge u = (x)_0 \wedge v = (x)_{lg(x)}) \tag{7.20}$$

que establece que u re ere a v si son los extremos de una secuencia que es una cadena de referencia. Su complejidad es nuevamente $_1$, porque $Cref(x)\wedge u = (x)_0 \wedge v = (x)_{lg(x)}$ es $_1$ por lo dicho anteriormente y el unico operador logico que la antecede en la formula es un cuanti cador existencial. Luego, la referencia aletica sintactica es una relacion semirecursiva, aunque no recursiva.

Al igual que en los apartados anteriores, a partir de las nociones dadas se pueden de nir autorreferencia y buena fundacion aleticas que seran, en consecuencia, tambien de nibles en L^{+}_{pa}.

De nicion 7.27 (Autorreferencia aletica). Una oracion ' 2 L_T es autorreferente en th sii re ere aleticamente a s misma en th.

Naturalmente, la siguiente formula de ne autorreferencia aletica en L^{+}_{pa}:

$$SR(v) := R(v; v) \tag{7.21}$$

De nicion 7.28 (Buena fundacion aletica). Una oracion ' 2 L_T esta aleticamente bien fundada en th sii no hay una cadena de referencia en th inde nidamente extensible que empiece en '.

Si bien todav a de nible en L_{pa}^{+} por medio de la formula

$$W f(v) :=Sent_{LT} (v) \text{ ^ } 8x(Cref(x) \text{ ^ } (x)_{0} = v \text{ ! } \tag{7.22}$$

$$9y > lg(x)8z(Seq(z) \text{ ^ } lg(z) = y \text{ ^ } 8i \quad lg(x)(x)_i = (z)_i \text{ ! } :Cref(z)))$$

esta nocion es levemente mas compleja que las anteriores. De acuerdo con (7.22), para toda cadena de referencia x que comience en v hay un y tal que toda secuencia de longitud y que extienda x no es una cadena de referencia, esto es, bloquea la extensibilidad inde nida. Si (7.22) es la formula mas sencilla que de ne la buena fundacion aletica, siendo $_2$, el conjunto de oraciones bien fundadas no es siquiera semirecursivo.

Al igual que las nociones semanticas presentadas en el apartado 7.3.1, las ora-ciones de la secuencia de Yablo en (7.11) y, su version alternativa, en (7.12), su version dual en (7.13) y otras listas como (7.14) resultan aleticamente mal fundadas pero no autorreferentes desde el punto de vista sintactico, lo cual puede verse por medio de ra-zonamientos analogos a los dados en ese apartado. Naturalmente, lo mismo sucede con las cadenas, como (7.15), pero tambien con la oracion de McGee (7.16). Asimismo, vale el siguiente resultado.

Proposicion 7.29. Si ' es una oracion aleticamente autorreferente de L_T , ' no esta aleti-camente bien fundada.

Sin embargo, existen ciertas oraciones cuyos patrones referenciales son capturados por las nociones semanticas pero no por las sintacticas, como muestro en el siguiente apartado.

7.3.2.2. Incompletitud y jerarqu as

Al ser una relacion semirecursiva, la q-referencia aletica sintactica es debilmente representable en pa^{+}, esto es, pa^{+} prueba todos los casos positivos de q-referencia. A diferencia de cualquier axiomatizacion de la q-referencia semantica, en el modelo estandar de L^{+}_{pa} no hay mas casos de q-referencia en th que lo que pa^{+} th informa, porque pa^{+} prueba todas las oraciones *1* de L^{+}_{pa} que son verdaderas en el modelo estandar es decir, pa^{+} es *1* completa.

No obstante, esto trae algunas consecuencias prima facie contraintuitivas.[10] Con-siderese, por ejemplo, la oracion

$$8x(:Bew_{th}(x) ! :T x) \tag{7.23}$$

Es claro que th no prueba este enunciado (recuerdese que th solo extiende pat con oraciones verdaderas de L^{+}_{pa} en N^{+}), razon por la cual este satisface su propio antecedente y, en consecuencia, re ere a s mismo, de acuerdo con la nocion de q-referencia aletica semantica introducida en la de nicion 7.12. Sin embargo, que (7.23) satisfaga su propio antecedente no es su ciente para concluir que re ere aleticamente a s misma en th; es preciso que th pruebe que lo hace, i.e., que

$$th ` Bew_{th}(p:Bew_{th}(p8x(:Bew_{th}(x) ! :T x)q)q)$$

o, lo que es lo mismo, que

$$th ` :Bew_{th}(p8x(:Bew_{th}(x) ! :T x)q)$$

lo cual es imposible por el segundo resultado de incompletitud de G•odel (teorema 1.13). (7.23) no q-re ere a s misma en th, sino solo en una teor a mas poderosa, que sea capaz de probar que el enunciado satisface su propio antecedente. Esta es una parte de lo que llamo `incompletitud de la referencia aletica sintactica'.

Si bien parece que la referencia aletica semantica da el veredicto correcto cuan-do su contraparte sintactica falla, mientras que esta ultima permite un tratamiento axiomatico sin costos, ninguna axiomatizacion de la referencia semantica sera capaz de dar cuenta de todas las relaciones de referencia de oraciones de L_T ; en particular, ningu-na axiomatizacion th tal podra probar que (7.23) es autorreferencial, que el lo relevante para esta investigacion.

[10] Este ejemplo me fue sugerido hace tiempo por Halbach como un contraejemplo o caso contraintuitivo para la referencia sintactica. Hoy lo veo como una simple consecuencia o, si se quiere, `muerdo la bala'.

Al mismo tiempo, buena parte de los casos negativos de q-referencia sintactica en th no son demostrables en pa^{+} ni en th pa^{+}. Por ejemplo, th no es capaz de probar que la oracion

$$8x(x = p0 = 0q\ !\ T\ x) \tag{7.24}$$

no q-re ere en th, v.g., al mentiroso :T l, a s misma o a cualquier otra oracion porque, nuevamente, por el segundo resultado de incompletitud de G•odel, al ser !-consistente th no puede probar :Bew$_{th}$(pl = p0 = 0qq), :Bew$_{th}$(pp8x(x = p0 = 0q ! T x)q = p0 = 0qq) ni, en general, :Bew$_{th}$(p'q) para ninguna oracion ', i.e., su propia consistencia. Esta es la otra parte de la incompletitud de la referencia aletica sintactica.

Naturalmente, al ser inde nible, ninguna axiomatizacion de la referencia aletica semantica sera capaz de probar todos los casos negativos de referencia, pero una teor a como qrs s logra demostrar muchos mas que cualquier teor a th con respecto a la referencia aletica sintactica. Notese que, v.g., para probar en qrs que enunciados de la forma 8v(' ! T v) donde T no ocurre en ' no q-re eren a una oracion basta con probar :'[p q=v], lo cual es en principio posible, mientras que en th es preciso demostrar :Bew(p'[p q=v]q), que es ciertamente imposible en th.

La razon principal por la cual desarrollo nociones de referencia aletica para ora-ciones de L$_{T}$ es el estudio de los patrones de referencia que subyacen a las parado-jas semanticas y otras expresiones patologicas, para la posterior formulacion de teor as axiomaticas de la verdad (!-)consistentes y, a la vez, abarcativas y poderosas, basadas en una caracterizacion de las patolog as en terminos de sus patrones referenciales. Como se ha visto, en muchos casos la autorreferencia y la mala fundacion resultan ser patro-nes peligrosos, en tanto ciertas oraciones autorreferentes o mal fundadas, como :Tl y las oraciones de Yablo, dan lugar a paradojas u !-paradojas. Luego, por un lado, si la teor a de la referencia en la cual trabajo no logra identi car ciertas expresiones a todas luces autorreferentes o mal fundadas, como (7.23), las teor as de la verdad que formule basandome en la nocion de referencia provista correran el riesgo de ser inconsistentes u !-inconsistentes. Y, por otro, si la teor a de la referencia no es capaz de se~nalar que ora-ciones obviamente `inocentes', como (7.24), no son autorreferenciales ni mal fundadas, no hay esperanzas de contar con una teor a lo su cientemente abarcativa y poderosa, como quiere Horwich (1998b) (vease el apartado 5.3.1).

La incompletitud de la referencia aletica sintactica, la escasa informacion sobre la presencia o ausencia de ciertas relaciones de referencia aletica pone en juego el proyecto. Pero hay una solucion evidente, esto es, agregar axiomas que permitan probar mas relaciones de referencia y refutar mas relaciones de no referencia aletica. A diferencia de las axiomatizaciones de la nocion semantica de referencia aletica, estas no necesitan de un s mbolo de predicado primitivo, ni un metalenguaje, ni esquemas ni el predicado de verdad, sino meramente enunciados de L^{+}_{pa} que son verdaderos en N^{+}, como muestro a continuacion. Esto pone a la nocion sintactica en clara ventaja con respecto a la nocion semantica, al menos en lo que concierne a la posibilidad de formular teor as de la verdad axiomaticas de acionistas y minimalistas en L_T .

El axioma mas natural parece ser el que establece que si th refuta, esto es, prueba la negacion de todas las clausuras existenciales del antecedente ' (o negacion del consecuente :) de un condicional ' ! en el cual solo (') contiene T , reemplazando cada variable libre v_1; : : : ; v_n en ' por k, con k 2 !, y, de todas las instancias de 8v_1 : : : v_i 1v_{i+1} : : : v_n(' !) para cada 1 i n, solo 8v_1 : : : v_i 1v_{i+1} : : : v_n(' !)[k=v_i] re ere directamente a en th, entonces 8v_1 : : : v_n(' !) no q-re ere a en th. La formulacion de este principio en L_T dar a lugar a una formula demasiado complicada. En su lugar, recurro a una formulacion equivalente mucho mas sencilla:

$$8x(Bew_{th}(:.x) ! :Bew_{th}(x)) \quad \text{(qr)}$$

Supongase que 8v(' !) es una oracion de L_T tal que ' no contiene T , s , th ` :'(k), k 2 !, y que, si m 6= k, (' ! )[m=v ] no re ere directamente a en th. Luego, 8x($Bew_{th}$(:.x) ! :$Bew_{th}$(x)) implica que th 0 '(k) y, por ende, 8v(' ! ) no q-re ere a en th. Y, a la inversa, si 8v(' ! ) es una oracion de $L_T$ tal que ' no contiene T , s , th ` :'(k), k 2 !, y, si m 6= k, (' !)[m=v] no re ere directamente a en th, Bew_{th}(:.p'(k)q) implica que 8v(' !) no q-re ere a en th y, por ende, que : Bew_{th}(p'(k)q). Y lo mismo puede extenderse a una cantidad arbitraria de variables de individuo v_1; : : : ; v_n.

De nicion 7.30 (qr(th)). qr(th) L_T que extiende th por medio del axioma qr.

Como el principio qr establece la consistencia de th, que por estipulacion es verdadera en toda extension de N^{+}, se tiene que

Proposicion 7.31. qr(th) es !-consistente.

Siendo la identidad un predicado recursivo, qr(th) permite saber ahora que (7.24) q-re ere unicamente a 0 = 0, y tambien que, por ejemplo,

$$8x(Bew_{th}(x) ! Tx) \quad (7.25)$$

no q-re ere a 0 6= 0, porque th ` $Bew_{th}$(p:0 6= 0q) y, por qr, qr(th) ` :Bew_{th}(p0 6= 0q). Asimismo, si bien no es posible establecer en th que las oraciones de Yablo no son autorreferenciales en th, s lo es en qr(th).

Naturalmente, qr(th) no es su ciente para convertir a th en una teor a completa con respecto a la negacion, porque es una teor a axiomatica consistente que extiende pa$^+$ y, por ende, esta sujeta a los resultados de incompletitud de G•odel. Por ejemplo, qr(th) no permite concluir que (7.25) no re ere a la oracion :T l del mentiroso en th.

Si bien $R_q(x; y)$ es una formula de L^+_{pa} y, por ende, por medio de formulas como (7.19), (7.20), (7.21), etc. se puede contar con predicados R_d, R, SR, etc. que de nen las nociones de la familia de la referencia aletica aplicables a oraciones que contienen ellas mismas estos predicados, i.e., no tipeados, los conceptos referencia sintactica estan en alguna medida estrati cados. Por ejemplo, qr(th) genera cierta estrati cacion, porque da lugar a nuevos casos de referencia dados por lo que se puede probar en qr(th) y no en th. Considerese la oracion

$$8x(:R_q(p8x(x = 0 ! T x)q; x) ! T x) \tag{7.26}$$

Intuitivamente, (7.26) q-re ere a toda oracion a la cual 8x(x = 0 ! T x) no q-re ere. Como qr(th) implica que esta ultima no q-re ere a, v.g., :T l, (7.26) deber a referir a :T l en th. Pero no lo hace, porque th no es capaz de probar que :T l satisface el antecedente de (7.26). En cambio, como qr(th) s lo es, (7.26) q-re ere a :T l en qr(th).

Lo mismo sucede con (7.23). Esta oracion es autorreferencial, no en th, sino en qr(th). En ninguno de estos casos se da que hay una relacion de q-referencia en th que th no puede probar, porque la nocion es $_1$. E simplemente falso que (7.26) re ere al mentiroso y que (7.23) es autorreferente en th. Las nociones de referencia en th y qr(th) no coinciden sino que la primera es un subconjunto de la segunda, porque ambas estan formuladas en terminos de su correspondiente predicado de prueba. Ante la nueva nocion de q-referencia que qr(th) conlleva, surge, en aras de la completitud, la nece-sidad/posibilidad/utilidad de incorporar axiomas analogos a qr pero ahora relativos al predicado de prueba de qr(th), que a su vez dar lugar a una nueva teor a con su propia nocion de q-referencia, etc. y que, tal vez, permitan probar, v.g., la autorreferencialidad de (7.23).

Para evitar esta estrati cacion, la distincion entre teor a y metateor a, ser a ideal una teor a qr (th), identica a qr(th) excepto en que las apariciones de Bew_{th} en (7.22) y qr son reemplazadas por $Bew_{qr\ (th)}$. Lamentablemente, cualquier teor a que cumpla con estos requisitos es trivialmente trivial. Notese que qr(th) prueba la consistencia de th. Si fuera posible una teor a como qr (th), esta probar a su propia consistencia y, por el segundo teorema de incompletitud de G•odel, ser a inconsistente.

Trabajo entonces con una jerarqu a de teor as pat := qr_0; qr_1; qr_2; : : : y sus no-ciones de referencia aletica correspondientes, de nibles en L^+_{pa} por las formulas $R^0(u; v)$,

$R^1(u; v)$, $R^2(u; v)$; 2 $_1$, siguiendo la de nicion 7.22.[11] Es posible incluso extender esta jerarqu a a niveles trans nitos. Esto permitira saber mas acerca de las relaciones de referencia aletica que se dan entre las oraciones de L_T pero tambien sobre las que no se dan.

De nicion 7.32. Sea qr_0 := pat y, si 0 < $_0$, qr extiende pat con el siguiente esquema de axioma, para cada ordinal < :

qr 8x(Bew$_{qr}$ (:.x) ! :Bew$_{qr}$ (x))

A diferencia de la m-referencia aletica, para cada ordinal hay una nocion de q-referencia aletica relativa a qr , como muestra la de nicion 7.22, que es de nible en L^+_{pa} y debilmente representable en pa^+ por una formula que noto R_q . Luego, existen tambien jerarqu as para cada una de las nociones que estan de nidas en terminos de la q-referencia aletica sintactica, esto es, la referencia directa, la referencia simpliciter, la autorreferencia y la buena fundacion aleticas. Si < $_0$, las noto R_d (u; v), R (u; v), SR (v) y W f (v), respectivamente.

Proposicion 7.33. Si $_0$, qr es !-consistente.

Demostracion. A partir del hecho de que pat es verdadera en toda extension de N^+ a L_T , por induccion trans nita sobre . □

Hasta donde es correcto avanzar en la jerarqu a quedar determinado por el ordinal prueba-teorico de la teor a base, pat, puesto que los axiomas de cada qr son $_1$ y agregar oraciones $_1$ verdaderas en el modelo estandar a th no da lugar a nuevas instancias de induccion trans nita.[12] Luego, la teor a mas poderosa de la jerarqu a que es razonable aceptar es qr $_0$.

Observacion 7.34. Sean $_0$ y t y s dos terminos cualesquiera de L^+_{pa}. Si qr ` $R_q$ (t; s), entonces, para todo > , qr ` R_q (t; s).

Esta proposicion establece que, si una oracion q-re ere aleticamente a otra relativamente a una teor a en la jerarqu a, lo har en todas las teor as que se encuentren por encima de ella, esto es, establece la acumulatividad de las relaciones positivas de referencia en la jerarqu a. En cambio, no se da que, para todas las oraciones ' 2 L_T , si una teor a en la jerarqu a prueba que ' no q-re ere a otra oracion relativamente a

[11] ***Notese que en la de nicion 7.22*** th ***puede ser cualquier teor a que extienda*** pat ***con oraciones*** ' 2 L^+_{pa} ***tales que*** N^+ '***, requisito que satisfacen todas las teor as que extienden*** pat ***con axiomas de la forma de*** qr***, si el sub ndice*** th ***que ah ocurre cumple tambien la condicion mencionada.***

[12] ***Dado que los predicados de prueba estandar Bew$_{th}$(x) son formulas $_1$. Cf. Michael Rathjen (1999).***

otra teor a de la jerarqu a, entonces no q-referira relativamente a ninguna de las teor as que aparecen posteriormente a esta ultima; la jerarqu a de teor as qr no es acumulativa con respecto a los casos negativos de q-referencia.

Notese que esto puede representar un grave inconveniente. Si acaso se concluyo, relativamente a una teor a qr de la jerarqu a, que, por ejemplo, ' re ere unicamente a 0 = 0 y, por ende, esta bien fundada, ser a deseable poder a rmar que es una instancia segura del Esquema-T. No obstante, por la no acumulatividad, podr a ocurrir que en un nivel superior > , ' re era no solo a 0 = 0 sino, v.g., a s misma, tornandose
una instancia `peligrosa' del Esquema-T. Luego, que una teor a qr asigne patrones seguros a una expresion no es garant a alguna de que su instancia correspondiente del Esquema-T no generar problemas y, por ende, las nociones de referencia aletica parecen ser inutiles.

Sin embargo, este razonamiento es demasiado apresurado. Si bien para algunas oraciones la no referencia no es estable, para muchas s lo es. Para estas ultimas, es posible dar veredictos correctos con respecto a sus patrones referenciales subyacentes y, por tanto, con respecto a su `peligrosidad' qua instancias del Esquema-T. En el apartado siguiente identi co la clase de estas oraciones cuya referencia es estable a partir de un punto en la jerarqu a, que denomino `r-decidibles', y pruebo su estabilidad en la jerarqu a de teor as qr , con $_0$.

7.3.2.3. Referencia estable

En este apartado caracterizo las oraciones cuya q-referencia es estable o decidible en alguna teor a de la jerarqu a, esto es, aquellas para las cuales, si para algun $_0$, qr prueba que estas oraciones no q-re eren a ciertas otras relativamente a una teor a de la jerarqu a, no existe una teor a qr , > que pruebe que s q-re eren relativamente a ninguna otra teor a. Primero es preciso de nir algunas nociones auxiliares.

De nicion 7.35 (Decidibilidad). Una formula ' 2 L_{pa}^{+} con $v_1; : : : ; v_n$ como sus unicas variables libres es decidible en th sii, para cualesquiera $k_1; : : : ; k_n$ 2 !, th ` '($k_1; : : : ; k_n$) o th ` :'(k_1 ; : : : ; k_n).

Las formulas decidibles en th son precisamente aquellas que representan en th la relacion entre numeros naturales que de nen. Lamentablemente, conjeturo que esta nocion no es siquiera recursivamente enumerable; la formula de menor complejidad que, he encontrado, la expresa en L^{+}_{pa} es $_2$:

$$F\,orm_{L}\mathbf{+}_{pa}(v) \mathbin{\hat{}} 8x(Seq(x) \mathbin{\hat{}} lg(x) = f\,ree(v)\ !\ Bew_{th}(\sim s_{.}(v; x))\ \_\ Bew_{th}(:_{.}\sim s_{.}(v; x)))$$

La noto $Dec^{th}(v)$. De acuerdo con este predicado, si v es una formula de L^{+}_{pa} y x (el codigo de) una secuencia de (los codigos de) las variables libres en v, th es capaz probar, o bien el resultado de reemplazar en v cada variable libre por cada miembro de x, o bien su negacion. Si bien esta formula es demasiado compleja, existen muchos casos de formulas decidibles para las cuales se puede probar que lo son en pa^{+}. Por ejemplo, para todas las formulas equivalentes a formulas $_1$, que son decidibles.

Proposicion 7.36. Si ' 2 L^{+}_{pa} es equivalente en th a una formula $_1$, entonces th ` Dec^{th}(p'q).

Demostracion. Sea ~v una abreviatura de v_1; : : : ; v_n. Sean '(~v); (~v) 2 L_{pa}^{+} tales que th ` ' \$ y es $_1$. Luego, existen formulas (~v) 2 $_1$ y (~v) 2 $_1$, ambas logica y, por tanto, demostrablemente equivalentes a y, por ende, a ' en th. Notese que : es asimismo $_1$. Como pa^{+} sabe de su propia completitud $_1$ y, a fortiori, de la de th ($_1$ L^{+}_{pa}), si (~v) 2 $_1$,[13]

$$pa^{+} \quad \grave{} \quad (\vec{v}) \; ! \; Bew_{th}(p \; (\vec{v})q) \tag{7.27}$$

Ademas, de acuerdo con la tercera condicion de L•ob para los predicados de prueba estandares Bew (vease el apartado 1.2.3),

$$pa^{+} \grave{} \; Bew_{th}(px!.yq) \; ! \; (Bew_{th}(x) \; ! \; Bew_{th}(y)) \tag{7.28}$$

Luego, razono en th. Por un lado,

(~v) ! Bew_{th}(p (~v)q) por (7.27)

! Bew_{th}(p'(~v)q) por (7.28)

y, por otro,

: (~v) ! Bew_{th}(p: (~v)q) por (7.27)

! Bew_{th}(p:'(~v)q) por (7.28)

Luego, como ' _ :' implica _ : ,

th ` Bew_{th}(p'(~v¯)q) _ Bew_{th}(p:'(~v¯)q)

[13] *Vease Craig Smorinsky (1985, p. 61, teorema 6.22) y Stephen G. Simpson (2009, p. 370-371, de nicion IX.3.4, lema IX.3.5 y teorema IX.3.6). La prueba puede facilmente adaptarse a pa^{+}, extendiendo la interpretacion canonica de L_{pa} en el lenguaje de pra a L^{+}_{pa}, porque el lenguaje de pra* contiene terminos para cada funcion p.r.

o, lo que es lo mismo,

$$\text{th ` } 8v_1 : : : v_n(\text{Bew}_{\text{th}}(\text{p}'(v_1; : : : ; v_n)\text{q}) \_ \text{Bew}_{\text{th}}(\text{p}:'(v_1; : : : ; v_n)\text{q})):$$

□

Notese que, si bien todas las formulas que son logicamente equivalentes a una formula $_1$ son ellas mismas $_1$, este no es necesariamente el caso para formulas que no son equivalentes logicamente sino solo en pa^+ o en th. Luego, la proposicion 7.36 implica que mas formulas son decidibles que aquellas que son $_1$.

De nicion 7.37 (Rd-decidibilidad). Una oracion ' 2 L_T es rd-decidible en th sii en todas sus subformulas de la forma ! , en las cuales una variable libre ocurre bajo el alcance de T y solo o solo contienen T , son tales que la que no contiene T es decidible.

Intuitivamente, las oraciones rd-decidibles en th son aquellas cuya referencia directa queda completamente determinada por la teor a; no es posible que en una teor a consistente que incluya th la oracion re era directamente a mas cosas que en th, como muestra la proposicion 7.39. Por ejemplo, 8x(x = I ! Tx) es rd-decidible, porque la identidad es un predicado recursivo. Ademas, cada una de las oraciones de la lista de Yablo en (7.11) son rd-decidibles en th, porque u > v es una formula decidible en cualquier th q^+, y lo mismo para sus formulaciones alternativas. Y 8x(Bew_{th}(x) ! TI) es rd-decidible porque ninguna variable libre aparece bajo el alcance de T . En cambio, 8x(Bew_{th}(x) ! Tx) no es rd-decidible en th, porque Bew_{th}(x) no es decidible en th.

La rd-decidibilidad es claramente de nible en L_T en terminos de Dec^{th}(v), digamos mediante la formula RdDec^{th}(v). Dado que Dec^{th} es $_2$ y no aparece bajo el alcance de una negacion en la de nicion 7.37, RdDec^{th} es tambien $_2$.

De nicion 7.38 (R-decidibilidad). Una oracion ' 2 L_T es r-decidible en th sii es rd-decidible y solo re ere aleticamente a oraciones rd-decidibles.

Las oraciones r-decidibles son aquellas para las cuales la referencia aletica simpli-citer queda ja en una teor a, no se modi ca en teor as consistentes con mayor poder de prueba, como indica el corolario 7.40. El conjunto de oraciones r-decidibles en th es de nible en L^+_{pa} en terminos de RdDec^{th} mediante la formula

$$\text{RdDec}^{\text{th}}(v) \wedge 8x(R(v; x) \, ! \, \text{RdDec}^{\text{th}}(x))$$

que abrevio RDec^{th}(v). Como R(u; v) 2 $_1$, RDec^{th} es tambien $_2$.

Si !, sea hN^+; i la interpretacion en que extiende N^+ a todo L_T , asignando a T como su extension.

Proposicion 7.39. Sean ' y oraciones de L_T tales que ' es rd-decidible en th, sean hN^+; i th^0 th para algun ! y sean R_d y $R_d{}^0$ las formulas que debilmente representan la referencia aletica directa de cada una de estas teor as, respectivamente, en L_T . Si hN^+; i :R_d(p'q; p q), entonces hN^+; i :$R_d{}^0$(p'q; p q).

Demostracion. Como la referencia aletica directa es la union de la m y la q-referencia, basta probar el resultado para cada una de estas por separado. Para la m-referencia es obvio. Pruebo el resultado para la q-referencia por induccion sobre la complejidad de '. Asumo que ' contiene T ; de lo contrario la prueba es trivial. Si ' es atomica, entonces no q-re ere ni en th ni en th^0, por la de nicion 7.22.

Supongase que para toda oracion de menor complejidad que ' el enunciado de la proposicion es verdadero. Si ' := : y ' no q-re ere a en th, entonces tampoco, por la clausula 3 de la de nicion 7.22. Por hipotesis inductiva, no q-re ere a en th^0 y, por ende, tampoco '. El caso para el condicional es analogo .

Sea ' := 8v_1 : : : v_n tal que no q-re ere a en th. Si := Tt, para cada k_1; : : : ; k_n 2 !, [k_1 =v_1] : : : [k_n=v_n] no contiene un termino que denote y, por ende, no q-re ere a en th^0 tampoco. Luego, ' no re ere a en th^0. Si := : , para cada k_1; : : : ; k_n 2 !, [k_1=v_1] : : : [k_n=v_n] no q-re ere a en th ni contiene un termino `nuevo' que denote . Por hipotesis inductiva, [$k_1$=$v_1$] : : : [$k_n$=$v_n$] no q-re ere a en th$^0$ ni, obviamente, contiene un termino `nuevo' que denote , para ningun k_1; : : : ; k_n 2 !. Luego, v_1 : : : v_n no q-re ere a en th^0.

Finalmente, si := ! , caben tres opciones: que tanto como contengan T , que no contenga T y s y, viceversa, que contenga T y no. El primer caso es analogo al de la negacion, y los dos ultimos son semejantes entre s . Lo pruebo solo para el segundo. Como ' no q-re ere a en th, para todo k 2 ! y todo 1 i n, si 8v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n(!)[k=v_i] q-re ere a en th o contiene una ocurrencia de Tt que no esta en ' tal que q $^+$ ` t = p q, th 0 9$v_1$ : : : $v_i$ $_1v_{i+1}$ : : : $v_n$ [k=$v_i$]. Como ' es rd-decidible, debe ser decidible, con lo cual th ` :9v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i]. Y, como th th , th v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i]. Ademas, como es consistente, 0 9 8 ! th 0 v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i] tambien. Luego, si v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n( )[k=v_i] q-re ere a en th o contiene una ocurrencia de Tt que no esta en ' tal que q$^+$ ` t = p q, th 0 $v_1$ : : : $v_i$ $_1v_{i+1}$ : : : $v_n$ [k=$v_i$]. Por otro lado, por hipotesis inductiva, si $v_1$ : : : $v_i$ $_1v_{i+1}$ : : : $v_n$( )[k=$v_i$] q-re ere a en th (o contiene una ocurrencia de Tt que no esta en ' tal que q$^+$ ` t = p q), tambien lo hace en th. En consecuencia, si v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n( )[k=v_i] q-re ere a en th o contiene una ocurrencia de Tt

+ ` 0 9

que no esta en ' tal que q t = p q, th 0 v_1 : : : v_i $_1v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i], con lo cual, por la de nicion 7.22, ' no q-re ere a en th^0. □

Corolario 7.40. Sean ' y oraciones de L_T tales que ' es r-decidible en th, sean hN^+; i th^0 th para algun ! y sean R y R^0 las formulas que debilmente representan la referencia aletica de cada una de estas teor as, respectivamente, en L_T . Si hN^+; i :R(p'q; p q), entonces hN^+; i :R^0(p'q; p q).

Corolario 7.41. Si $_0$ y ' y son oraciones de L_T , si N^+ :R_q (p'q; p q) y ' es rd-decidible en qr , entonces, para todo , N^+ :R_q (p'q; p q).

Los resultados de este apartado seran de suma importancia en el cap tulo 8, donde formulo teor as de la verdad en las cuales el Esquema-T esta restringido a ciertas oraciones segun los patrones de referencia que las subyacen. Grosso modo, las oraciones que generen instancias del Esquema-T deberan ser r-decidibles, porque solo de ellas se puede tener certeza de que sus patrones referenciales son seguros.

La r-indecidibilidad guarda cierta analog a con las adscripciones ciegas de verdad, como \Lo ultimo que dijo Tarski es verdadero" dicho por alguien que no sabe que es lo ultimo que Tarski dijo.[14] Del mismo modo en el que estas adscripciones de verdad podr an resultar autorreferenciales o mal fundadas |v.g., en el caso en que lo ultimo que Tarski haya dicho fuera precisamente \Lo ultimo que dijo Tarski es falso"| tambien podr an resultar autorreferenciales o mal fundadas ciertas oraciones r-indecidibles en una teor a dada, aunque al momento parezcan inofensivas. En lo que a la teor a para la cual se de ne referencia respecta, las oraciones r-indecidibles contienen adscripciones de ver-dad relativizadas a predicados sobre cuya extension no se tiene conocimiento completo. Luego, podr an, en principio, resultar autorreferenciales o mal fundadas en sistemas mas poderosos, donde se tenga mas informacion sobre los predicados relativizantes.

§

A lo largo de este cap tulo he provisto cuatro nociones de referencia diferentes, dos para L^+_{pa} y dos para L_T , todas ellas adecuadas con respecto a la nocion intuitiva esbozada por Leitgeb (2002) y, por ende, hiperintensionales, es decir, fallan la condi-cion de equivalencia (vease el apartado 6.1.2). Dejando la hiperintensionalidad de lado, los nuevos conceptos han logrado superar las di cultades que afectan los abordajes de Putnam, Goodman y Urbaniak al contenido referencial, as como el desaf o de Leitgeb.

Mientras que tanto la referencia a numeros (de nicion 7.1) como la referencia a oraciones (de nicion 7.8) son compleciones de la nocion intuitiva de Leitgeb, esta ultima

[14]Estoy agradecida con Halbach por hacerme ver este punto.

rescata tambien la intuicion detras de la nocion tecnica de autorreferencia que Leitgeb adjudica a Priest, en tanto explica como los lemas de diagonalizacion son capaces de establecer autorreferencia. Como consecuencia, da cuenta del caracter autorreferencial de las oraciones de G•odel y Henkin, as como de la circularidad de los ciclos y la mala fundacion de las cadenas.

Por su parte, las nociones de referencia aletica que presento en 7.3 no solo capturan las nociones intuitiva y tecnica, aunque unicamente a traves del predicado de verdad, sino que dan veredictos intuitivamente correctos sobre todas las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas consideradas. Consecuentemente, la siguiente observacion ha perdido validez:

> The relation of dependence as given by [de nicion 3.26] may thus|at best|be regarded as a formal substitute for the pre-theoretic relation of aboutness concerning semantic properties. Such a substitution, which certainly exceeds the boundaries of an explicatory de nition, seems to be admissible in view of the di culties of grasping the proper notion of aboutness since the latter is perhaps even inherently unclear [. . .]. (Leitgeb, 2005, p. 176, sus italicas)

Las nociones de referencia aletica han permitido superar el estado de preceinti cidad de la referencia que not Leitgeb en su momento.

Esto vuelve plausible la formulacion de la vision referencialista sobre las paradojas semanticas en terminos de estas nuevas nociones. Dado que la lista de Yablo y sus formulaciones alternativas resultan mal fundadas pero no autorreferenciales de acuerdo con ambas nociones de referencia aletica, la version ortodoxa de la tesis referencialista queda refutada.

Habiendo mostrado que la nocion de referencia aletica semantica es inde nible en L^{+}_{pa} y, por ende, poco util para la formulacion de teor as axiomaticas de la verdad que restrinjan el Esquema-T a instancias cuyos patrones de referencia sean `seguros', en 7.3.2 explor un concepto semejante en el cual las nociones semanticas, las ocurrencias del predicado de verdad-en-N^{+}, son reemplazadas por nociones sintacticas, por ocurrencias del predicado de prueba de la teor a para la cual se quiera de nir referencia. El resultado, la referencia aletica sintactica, es una relacion sintactico-aritmetica, de nible en L^{+}_{pa}, como he mostrado, aunque presenta ciertos inconvenientes originados en los fenomenos de incompletitud de G•odel, que se~nale en el apartado 7.3.2.2. Tomando algunos recaudos indicados en 7.3.2.3, la referencia aletica sintactica esta lista para ser utilizada en la formulacion de restricciones sintacticas sobre instancias del Esquema-T que den lugar a teor as axiomaticas de la verdad de acionistas y minimalistas, lo cual va a con rmar la tesis referencialista general en el proximo cap tulo.

8

Verdad minimalista

> \. . . assume every concept to be signi cant everywhere except for certain `sin-gular points' or `limiting points', so that the paradoxes appear as something analogous to dividing by zero."
>
> { Kurt G•odel, Russell's mathematical logic

En el cap tulo 7 introduje nociones correctas de referencia para expresiones del lenguaje de la verdad, adecuadas para el estudio de patrones de referencia que subyacen las expresiones paradojicas. El paso siguiente, que ocupa este cap tulo, es identi car las notas comunes que estos patrones tienen entre s y utilizarlas para restringir el conjunto de oraciones que generan instancias leg timas del Esquema-T. Dado que la nocion de referencia que empleo es de corte sintactico, los criterios de restriccion de instancias de este principio tambien lo seran y, por ende, daran lugar a teor as desentrecomilladoras axiomaticas de la verdad que cuadraran con las demandas del proyecto minimalista de Horwich y, aun mas, serviran de plataforma para la construccion de teor as de acionistas.

Asimismo, los sistemas resultantes seran evidencia a favor de la vision referen-cialista de las paradojas, i.e., la idea segun la cual las paradojas semanticas y otras expresiones patologicas pueden ser identi cadas a traves de sus patrones de referencia. Si bien popular y mayormente incuestionada, esta tesis jamas ha sido propiamente eva-luada hasta hoy, principalmente por la falta de nociones precisas y correctas, o al menos decentes, de referencia de oraciones a oraciones en el lenguaje de la verdad (vease el cap tulo 6), falta que he reparado en el apartado 7.3.

En 8.1 ofrezco una serie de resultados que conectan la nocion de referencia aletica sintactica con el concepto de dependencia de Leitgeb (veanse los apartados 7.3.2 y 3.2). Estos puentes son los que van a permitir establecer la consistencia u !-consistencia, segun el caso, de las teor as de la verdad que introduzco mas adelante en el cap tulo. 8.2 provee cuatro sistemas consistentes desentrecomilladores, examina sus propiedades y los evalua en funcion de las clausulas minimalistas (a)-(d) y las clausulas de acionistas (1)-(3) en los apartados 8.2.1-8.2.4, correspondientemente. Mientras que todos ellos resultan adecuados desde el punto de vista minimalista, solo los tres primeros satisfaran las demandas del de acionismo. En cada caso, las propiedades de los sistemas provistos permitiran extraer conclusiones acerca de los patrones de referencia subyacentes a las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas y con rmaran la tesis referencialista.

8.1. Conexiones entre referencia aletica y dependencia

Los siguientes resultados son la clave para establecer la consistencia u !-consistencia, segun el caso, de las teor as que presento mas adelante en el cap tulo. Prueban ciertas conexiones entre la referencia aletica sintactica y la dependencia de Leitgeb que van a permitir importar resultados de satisfacibilidad del apartado 3.2 sobre esta ultima a resultados acerca de la referencia aletica.

Sea th L_T una extension de pat mediante oraciones de L^+_{pa} verdaderas en N^+.

Proposicion 8.1. Sean ' y oraciones de L_T tales que la primera es rd-decidible en th. Si ' no re ere aletica y directamente a en th, hay un del cual ' depende tal que 2= .

Demostracion. Por induccion sobre la complejidad de '. Si ' es una oracion atomica, o bien ' 2 L^+_{pa} o bien ' := Tt, donde q^+ ` t 6= p q, porque ' no re ere a . Luego, por los puntos 1 y 2 de la proposicion 3.31, ' depende de un tal que 2= .

Supongase ahora que para toda oracion con menos operadores logicos que ' que no re ere a hay un del cual depende tal que 2= . Si ' := : , como ' no re ere a , por el punto 2 de la proposicion 7.24, tampoco re ere a . Por hipotesis inductiva, hay un del cual depende tal que 2= . Y por el punto 3 de la proposicion 3.31, ' tambien depende de . El caso para oraciones de forma condicional es analogo.

Sea ' := 8v_1 : : : v_n . Si es una formula atomica, una negacion o un condicional donde el antecedente contiene T sii el consecuente tambien, como ' no re ere a en th, para ningun k 2 ! ni 1 i n sucede que 8v_1 : : : v_i $_1 v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i] re ere a . Por hipotesis inductiva, para cada k 2 ! y 1 i n, hay un del cual 8v_1 : : : v_i $_1 v_{i+1}$: : : v_n [k=v_i] depende tal que 2= . Luego, por el punto 5 de la proposicion 3.31, hay un del cual 8v_1 : : : v_n depende tal que 2= .

Finalmente, sea ' := 8v1 : : : vn(!), donde contiene T sii no. Suponga-

se sin perdida de generalidad que no contiene T . Como ' no re ere a , para to-
do k 2 ! y todo 1 i n, si 8v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn(!)[k=vi] re ere a , th 0

9

v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn [k=vi]. Como ' es rd-decidible, por la de nicion 7.37, es decidi-

ble, esto es, th ` :9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn [k=vi]. Como th es verdadera en toda extension
de N + a LT , N + 2 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn [k=vi]. Luego, para todo k 2 ! y todo 1 i n,
si N + 9v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn [k=vi], 8v1 : : : vi 1vi+1 : : : vn(!)[k=vi] no re ere a .
Por hipotesis inductiva, para cada una de estas instancias existe un del cual depende tal
que 2= . Y, por el punto 5 de la proposicion 3.31, hay un del cual 8v1 : : : vn(!)
depende tal que 2= . □

Idealmente no habr a que restringirse a formulas rd-decidibles para que la dependencia implique la referencia aletica directa. Lamentablemente, un enunciado como 8.1 donde no se especi que que ' es rd-decidible ser a falso. Ya he puesto ejemplos de oraciones que, si bien no re eren a otras en una teor a th, si lo hacen en otras mas abarcativas (vease el apartado 7.3.2.2). Por ejemplo, 8x(:Bewth(x) ! Tx), que contiene la oracion de G•odel de th en todo conjunto del cual depende, no re ere en th a la oracion de G•odel de th, aunque s lo hace en qr(th). Que una oracion no re era directamente a otra en una teor a no es prueba su ciente de que no depende de ella; a menos que sea rd-decidible en la teor a, como indica la proposicion 7.39: si ' es rd-decidible en una teor a th sobre la cual no re ere directamente a otra oracion , tampoco lo har sobre teor as que expandan th con oraciones verdaderas en N+, sean o no axiomatizables.

La proposicion 8.1 conecta la dependencia de Leitgeb con la referencia aletica y permite probar las siguientes conexiones entre la buena fundacion aletica y el conjunto de oraciones d-fundadas de Leitgeb, pf (veanse las de niciones 3.34, 3.33 y 7.28), por un lado, y la autorreferencia aletica y la autodependencia (veanse las de niciones 3.32 y 7.27), por otro.

Corolario 8.2. Sea ' una oracion de LT . Si ' es r-decidible y esta aleticamente bien fundada en th, ' 2 pf .

Demostracion. De acuerdo con la de nicion 7.28, una oracion ' de LT esta aleticamente bien fundada en th sii no es posible una cadena de referencia aletica inde nidamente extensible que comience con ella en esta teor a. Sea m' := maxfn : existe una cadena de referencia aletica directa en th que comienza en ' de longitud ng. m' > 0 puede ser un ordinal trans nito, como en el caso, v.g. de la oracion 8xT xp0 = 0q. Pruebo por induccion trans nita sobre m' > 0 que toda ' r-decidible y aleticamente bien fundada pertenece a m' , donde i es como en la de nicion 3.33.

Si m' = 1, en virtud de la de nicion 7.25, ' no re ere aleticamente a nada en th. Luego, por la proposicion 8.1, depende de ? y, por ende, ' 2 $_1$.

Supongase que, para toda oracion r-decidible y aleticamente bien fundada en th, si m < , 2 $_m$. Si ' tal que m' = es r-decidible y aleticamente bien fundada en th, re ere unicamente a oraciones rd-decidibles en th tales que m < que, por la hipotesis inductiva, pertenecen a $_m$. Luego, por la proposicion 8.1, ' depende de S $_{i<}$ $_i$ y, por ende, pertenece a .

Como puede verse en el paso inductivo de la demostracion de este corolario, es necesario que ' sea r-decidible, no basta con que sea rd-decidible. Efectivamente, si solo se pide esto ultimo, el enunciado es falso, hay contraejemplos. Considerese el ciclo de mentirosos dado por las identidades

$$t_1 = pTt_2q$$

$$t_2 = p8x(_{pat} \wedge x = t_1 ! :Tx)q$$

donde $_{pat}$ es la oracion de G•odel de pat que se obtiene aplicando el lema de diagonalizacion debil (teorema 1.7) a :Bew$_{pat}$(v). Tt$_2$ es rd-decidible y re ere solo a 8x($_{pat}$ ^ x = t$_1$! :Tx), que, en pat esta bien fundada, porque nada satisface el antecedente. Pero no ser a l cito concluir que Tt$_2$ 2 $_{pf}$.

Los siguientes enunciados tambien se siguen de la proposicion 8.1.

Corolario 8.3. Sea ' una oracion de L$_T$. Si ' es r-decidible y no aleticamente autorreferente en th, ' no es autodependiente.

Corolario 8.4. Sea ' una oracion de L$_T$. Si ' es rd-decidible y depende esencialmente de un conjunto nito de oraciones , entonces re ere aletica y directamente solo a los miembros de .

Estos tres corolarios, junto con los resultados obtenidos en el apartado 3.2, son su cientes para establecer la consistencia y, en algunos casos, la !-consistencia, de las teor as de la verdad a las cuales dan lugar los criterios de seleccion de instancias del Esquema-T basados en la nocion de referencia aletica sintactica que introduje en el cap tulo anterior, como se vera mas adelante.

8.2. Referencia y desentrecomillacion

Como se vio en el cap tulo 5, el Esquema-T no es estrictamente necesario ni estrictamente su ciente para garantizar la utilidad logico-expresiva del predicado veritativo. Por ejemplo, en contextos clasicos la direccion de izquierda a derecha del bicondicional, esto es,

T p'q ! ' (T-Out)

que no engendra contradiccion alguna per se, basta para ese proposito. En consecuencia, las paradojas semanticas que el Esquema-T irrestricto engendra (cf. teorema 2.9) no son razon su ciente para abandonar la logica clasica si se adopta una postura de acionista, de acuerdo con la cual el predicado de verdad solo existe para cumplir estos roles logico-expresivos y, mas aun, solo tiene sentido en el plano formal por sus usos estrictamente logicos. No obstante, como tambien se~nale en el cap tulo 5, contar adicionalmente con ciertas instancias del Esquema-T puede resultar util para llevar a cabo otras funciones secundarias y son, en general, principios deseables en aras de la descriptividad y la com-pletitud, en tanto no engendren inconsistencias o tengan consecuencias contraintuitivas o incorrectas.

La seleccion de instancias no es sencilla, en particular cuando se desea obtener una teor a correcta, abarcativa, axiomatizable, explicativa y bien motivada, i.e., cuando se busca satisfacer las condiciones (a)-(d) del proyecto minimalista, enunciadas y exami-nadas en el apartado 5.3.1. Por un lado, el teorema de McGee (teorema 3.25) muestra que la mera consistencia no es un criterio viable, por ser demasiado amplio y dar lugar a conjuntos de instancias del Esquema-T demasiado complejos. Por otro, los criterios alternativos propuestos hasta el momento no resultan del todo satisfactorios tampoco. Mientras que la distincion tarskiana entre lenguaje y metalenguaje en teor as como tb

(vease el apartado 2.3.3) es demasiado restrictiva, los criterios basados en la idea de fundacion dan lugar a teor as demasiado complejas, como la teor a semantica de Leitgeb dada por fhN^{+}; $_{pf}$ ig (vease el apartado 3.2) y la restriccion del Esquema-T a instancias donde el predicado de verdad ocurre positivamente (vease el apartado 3.1.3.2) resulta demasiado arbitraria y poco explicativa.

Tanto como la fundacion o la dependencia, la idea de utilizar un criterio de res-triccion

basado en los patrones referenciales que subyacen a las oraciones de L_T tiene ciertamente gran atractivo desde el punto de vista de la condicion (d), esto es, tiene poder explicativo, en tanto se cree comunmente que la causa de las paradojas yace en ciertos patrones referenciales `peligrosos' como la autorreferencia y, desde que la paradoja de Yablo entro en escena, la mala fundacion. Como se~nale en el apartado 6.3, la v a no ha sido explorada aun por la falta de nociones adecuadas de referencia, en particular para lenguajes formales como

L_T . Dado que he reparado esta falta en 7.3, el proyecto toma un nuevo impulso. Aun mas, como una de las nociones de referencia aletica que intro-duzco, la sintactica, es aritmetica,

i.e., de nible en L^{+}_{pa}, las teor as desentrecomilladoras resultantes, a diferencia de aquellas basadas en las nociones de fundacion, satisfaran la condicion (c), es decir, recurriran unicamente a restricciones sintactico-aritmeticas.

Habiendo ya introducido nociones apropiadas para estudiar los patrones de referencia que subyacen a las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas, el siguiente paso es detectar las notas que estos patrones tienen en comun y utilizarlas para restringir el conjunto de oraciones de L_T que generan instancias leg timas del Esquema-T.

Naturalmente, toda inferencia que se haga sobre los patrones de referencia comu-nes a las paradojas sera inductiva e informal, porque solo se tiene una muestra limitada: por un lado, oraciones autorreferenciales como las distintas versiones del mentiroso, las oraciones de Curry y de McGee, y sus correspondientes ciclos. Por otro, listas de ora-ciones en las cuales cada miembro re ere directamente solo a los que se encuentran mas adelante. Todas estas expresiones tienen en comun el ser aleticamente mal fundadas, ya sean autorreferenciales, como las primeras, o no, como las segundas.

No obstante, este analisis podr a resultar poco re nado. Quizas no todos los pa-trones de mala fundacion sean problematicos, sino solo aquellos que comparten ciertas caracter sticas. Mas adelante se vera que este es efectivamente el caso. En consecuencia, no existe un unico modo de restringir el Esquema-T de acuerdo con los patrones refe-renciales de las oraciones que dan lugar a sus instancias. En los cuatro apartados que siguen exploro cuatro criterios de restriccion diferentes, cada uno de los cuales da lugar a una teor a desentrecomilladora para la cual demuestro que es consistente y al menos deductivamente tan poderosa como $\mathrm{rt}_{<\,0}$; putb y kf (cf. de niciones 2.14, 3.19 y 3.13), las teor as axiomaticas clasicas mejor consideradas de la literatura.

8.2.1. Verdad bien fundada

Como se~nale, un criterio evidente es el que restringe las instancias del Esquema-T a oraciones bien fundadas, de acuerdo con la de nicion 7.28. De hecho, el mismo Horwich parece favorecer un abordaje por el estilo en el siguiente pasaje, ya citado en el cap tulo 5:

> The intuitive idea is that an instance of the equivalence [T-]schema will be acceptable, even if it governs a proposition concerning truth (e.g. \What John said is true"), as long as that proposition (or its negation) is grounded|i.e. is entailed either by the non-truth-theoretic facts, or by those facts together with whichever truth-theoretic facts are `immediately' entailed by them (via the already legitimized instances of the equivalence schema), or . . . and so on. (Horwich, 2005, p. 81)

Como indique entonces, si por `grounded' se entiende fundacion, ya sea en el sentido de Kripke (1975) o de Leitgeb (2005) (d-fundacion, veanse los apartados 3.13.2), se viola la condicion (c) del proyecto minimalista. Pero si, en lugar de fundacion, se entiende algo mas bien sintactico, como la buena fundacion aletica (de nicion 7.28), lo cual es claramente una interpretacion caritativa de la cita de Horwich, una teor a minimalista en esas l neas es posible.

En lugar de RDec^{qr} (v), esto es, la formula que de ne la nocion de r-decidibilidad en qr (cf. de nicion 7.32) dada por la de nicion 7.38, como en el cap tulo anterior, escribo directamente RDec (v), por cuestiones de legibilidad. Del mismo modo, en lugar de Bew_{qr} (v) escribo Bew . Los predicados W f (v), con < $_0$, de nen la buena fundacion aletica en cada qr , como indique en el apartado 7.3.2.2. Dados (codigos de) terminos $t_1; :::; t_n$ y una formula '(v) 2 L_T , '(v($t_1; :::; t_n$)) abrevia la formula

$$9x('(\sim s_.(v; x)) \wedge lg(x) = n \wedge (x)_1 = t_1 \wedge ::: (x)_n = t_n)$$

esto es, v($t_1; :::; t_n$) es el resultado de reemplazar en v la primera variable libre por lo que t_n denota, la segunda por lo que t_2 denota, . . . , la n-esima por lo que t_n denota.

La siguiente teor a restringe las instancias del Esquema-T Uniforme, esto es,

$$8t_1 \; ::: t_n (T \ulcorner '(t_{.1}; :::; t_{.n}) \urcorner \$ '(t_1; :::; t_n)) \qquad \text{(Esquema-T Uniforme)}$$

donde ' 2 L_T tiene n variables libres, a expresiones r-decidibles y bien fundadas o, mas precisamente, a todas aquellas que sean equivalentes en qr $_0$ a un enunciado r-decidible y bien fundado.[1]

De nicion 8.5 (wfutb). wfutb L_T extiende qr $_0$ con el siguiente esquema de axioma, para cada < $_0$ y cada ' 2 L_T con exactamente n variable libres:

$$\text{wfutb } 8t_1 ::: t_n 9x(\mathrm{RDec}\,(x(t_1; :::; t_n)) \wedge W\,f\,(x(t_1; :::; t_n)) \wedge$$

$$\mathrm{Bew}_0 (p'(t_{.1}; :::; t_{.n})q\$_.x(t_1; :::; t_n)) \,!\, (T\,p'(t_{.1}; :::; t_{.n})q \$ '(t_1; :::; t_n)))$$

wfutb (por `Well-founded Uniform Tarski Biconditionals') se limita a oraciones r-decidibles porque as lo requiere la prueba del corolario 8.2, que ayudar a probar la !-consistencia de la teor a a continuacion. wfutb establece que, si < $_0$ y el resultado de sustituir en una formula x sus (posibles) n variables libres por los terminos $t_1; :::; t_n$ es una oracion r-decidible y bien fundada en qr , entonces toda oracion a la cual es equivalente en qr $_0$ tiene una instancia correspondiente del Esquema-T. Esto incluye,

---

[1] *Vease el apartado* 1.2.3 para detalles de notacion.

ademas de las oraciones r-decidibles bien fundadas, oraciones como

8x((T I ! T I) ^ x = p0 = 0q ! T x)

y

:8x(T x ! T x)

que, de acuerdo con la de nicion 7.22, re eren a todo y, por tanto, no estan aleticamente bien fundadas. Por otro lado, excluye inevitablemente muchas oraciones intuitivamente seguras, v.g., 8x(Bew$_{pa^+}$ (x) ! T x), aunque esto no debe confundirse con los teoremas de pa$^+$, que s tienen instancias correspondientes del Esquema-T en wfutb.

Proposicion 8.6. wfutb es !-consistente.

Demostracion. Por la proposicion 3.35 y el corolario 8.2, dado que $_{pf}$ esta cerrado bajo equivalencia, como indica la proposicion 3.29. □

De hecho, vale tambien el siguiente resultado.

Observacion 8.7. wfutb + T-Out es !-consistente.

Demostracion. Por el corolario 3.38 y los corolarios 8.2, 8.3 y 8.4. □

wfutb y las teor as que presento mas adelante, que son extensiones de wfutb, son deductivamente poderosas. Por ejemplo, prueban los mismos teoremas de L$^+_{pa}$ que rt$_{< 0}$, porque son capaces de de nir, para cada ordinal < $_0$ predicados de verdad que satisfagan los axiomas de esta teor a.

Proposicion 8.8. rt$_{< 0}$ es relativamente interpretable en wfutb.[2]

Demostracion. Para probarlo, muestro que los predicados T con < $_0$ de rt$_{< 0}$ son de nibles en wfutb (de nicion 1.1). Si '(v) es una formula de L$_T$ que contiene T , sea L$_'$ L$_T$ el lenguaje que resulta de extender L$^+_{pa}$ con '(v) como un s mbolo primitivo y cerrarlo bajo operadores logicos, como es usual. T aparece en L$_'$ solo en el contexto de '(t) para cualquier termino t. La relacion entre (los codigos de) una formula v y una oracion u de L$_T$ que se da cuando u es una oracion de L$_V$ es claramente recursiva y, por tanto, representable en pa$^+$ por una formula Sent(u; v) 2 $_1$. Considerese la siguiente

[2]Vease la de nicion 1.1.

formula de L_T :

t ; t (x = (t =t) ^ t = t) _ (8.1)

9 1 2 1 . 2 1 2

9u((Sent$_{L+pa}$ (u) _ 9 ySent(u; w(¯¯=pyq))) ^ x = :.u ^ :T w(y=pyq)(u=pxq)) _

9u; v((Sent$_{L+pa}$ (u!.v) _ 9 y(Sent(u; w(¯¯=pyq)) ^ Sent(v; w(¯¯=pyq)))) ^

x = (u!.v) ^ (T w(y=pyq)(u=pxq) ! T w(y=pyq)(v=pxq))) _

9u; v((Sent$_{L+pa}$ (8.vu) _ 9 ySent(8.vu; w(¯¯=pyq))) ^ x = 8.vu ^

8tT w(y=pyq)(pu(t=¯¯v)q=pxq)) _

9t9 y((Sent$_{L+pa}$ (t) _ 9 Sent(t ; w(¯¯=pyq))) ^ x = w(¯¯=pyq)(t=pxq) ^

T w(¯¯=pyq)(t=pxq))

Aplicando el lema de diagonalizacion sobre w, se obtiene un predicado #(x; y), que noto $\#_y(x)$, tal que

pat ` $\#^y$ (x) $ 9t^1 ; t (x = (t =t^2) ^ t = t) _ (8.2)

2 1 . 1 2

9u(Sent$_{<y}$(x) ^ x = :.u ^ :T p$\#_y$(u)q) _

9u; v(Sent$_{<y}$(u) ^ Sent$_{<y}$(v) ^ x = (u!.v) ^ (T p$\#_y$(u)q ! T p$\#_y$(v)q)) _

9u; v(Sent$_{<y}$(8.vu) ^ x = 8.vu ^ 8tT p$\#_y$(u(t=¯¯v))q) _

9t9 y(Sent< (t) ^ x = p# _(t.)q ^ T p# _(t.)q)

donde Sent$_{<v}$(u) es un modo abreviado de escribir Sent$_{L+pa}$ (u) _ 9 vSent(u; p# _(u)q) para cualquier variable sobre ordinales .

A continuacion muestro que, si 1 < < ^{0}, existen predicados # (x) para cada < que satisfacen los axiomas de rt< . Para hacerlo, pruebo que

8 t(T # 8 p (t) _ . q $ # (t)) (8.3)

es un teorema de wfutb, que a su vez, en virtud de su axioma, se sigue de

88t(RDec (p# _ (t.)q) ^ W f (p# _ (t.)q)) (8.4)

para algun < $_0$, que demuestro a continuacion.

El lado derecho del bicondicional en (8.3) es una variante notacional de

:(:(8t1; t2(x = (t1=.t2) ! t1 6= t2) ! :8u(:

(Sent<y(u) ! x 6= :.u) ! T p#y(u)q)) ! - -

(8u; v(:(:(Sent<y(u) ! :Sent<y(v)) ! x 6= (u!.v)) ! :(T p#y(u)q ! T p#y(v)q)) ! :8u; v(:
(Sent<y(8.vu) ! x 6= 8.vu) ! :8tT p#y(u(t=v))q)))!

:8t8 y(:(Sent< (t) ! x 6= p# _(t.)q) ! :T p# _(t.)q)

con la cual directamente identi co #y(x) (habiendo aplicado el lema diagonal fuerte a (8.1) sin abreviaturas). Luego, para todo termino t y todo , # (t) es claramente rd-decidible (y se puede demostrar en pa+, como indica la proposicion 7.36) y re ere directamente solo a formulas de la forma # (s) con , esto es, # (t) es r-decidible.

Falta probar que, para todo t y todo , # (t) esta aleticamente bien fundada en qr para algun < 0. Como todas las formulas de esta forma son r-decidibles, si estan bien fundadas en qr tambien lo estaran en qr para todo > . Pruebo el resultado mediante dos inducciones internas anidadas. La principal, una induccion trans nita sobre los | lo cual es posible por lo dicho en el apartado 1.4, (IT 0)|; la secundaria, sobre la complejidad de la oracion codi cada por t. Si :Sent< (t), el resultado es trivial porque # (t) no re ere a nada. Si t es una formula atomica |i.e., una identidad o una formula de la forma # (s), donde | su complejidad es 0. Cada s mbolo logico que se agregue a t aumenta su complejidad en 1.

Supongase que, si , # (t) esta bien fundada en alguna teor a de la jerarqu a para todo t. Hay que ver que, para cada t, # (t) est bien fundada. Si t = (t1=.t2), el resultado es trivial. Si t = p# (s)q, donde ^ Sent< (s), # (t) re ere exclusivamente a # (s) que, por hipotesis inductiva, esta bien fundada. Luego, # (t) tambien. Supongase ahora que para todo s que denota una formula de menor complejidad que t # (s) esta aleticamente bien fundada. Si t = 8.vu, # (t) re ere unicamente a las oraciones de la forma # (u(s=v)). Como la complejidad de u(s=v) es menor a la de t pues contiene un cuanti cador universal menos, para todo s # (u(s=v)) esta bien fundada y, por lo tanto, tambien lo esta # (t). Los casos para la negacion y el condicional son analogos.

Ahora se esta en condiciones de probar en wfutb todos los axiomas de rt< . Lo muestro solo para rt< 4, rt< 5 y rt< 6. Los otros casos son analogos al de rt< 4. Sean < < .

Sent< (8˙vu) ! (# (8˙vu) $ 8tT p# (u(t=v))q)	por (8.2), 4ta l nea, y =
$ 8t# (u(t=v)))	por (8.3)

Esto completa la prueba de rt< 4.

Sent (t) ! (# (p#

(t.)q) $ T p# (t.)q) por (8.2), 5ta l nea, y =

< por (8.3)

$ # (t))

Esto completa la prueba de rt< 5.

Pruebo el axioma rt< 6 mediante una induccion interna sobre la complejidad de la formula denotada por t, donde Sent< (t). Si t = (t1=.t2),

(p# _(t.)q) $ T p# _(t.)q por (8.2), 5ta l nea, y =

$ # (t1=.t2) $ por (8.3) por (8.2), 1ra l nea, y =

t1 = t2 $ #

(t1=.t2) por (8.2), 1ra l nea, y =

Si t = p# (s)q, donde ,

(p# _(t.)q) $ T p# _(t.)q por (8.2), 5ta l nea, y =

$ # (p# (s)q) por (8.3) por (8.2), 5ta l

$ # (s) nea, y =

$ # (p# (s)q) por (8.2), 5ta l nea, y =

Supongase ahora que, para todo s que denota una formula de menor complejidad que t, # (# _(s)) $ # (s). Si t = (s),

p q

. :.

(p# _(t.)q) $ T p# _(t.)q por (8.2), 5ta l nea; y =

$ # (:.(s)) $ por (8.3) por (8.2), 2da l

:# (s) nea, y =

$:# (p# _(s.)q)

$

$:# (s) por (8.2), 5ta l nea, y =

Hipotesis inductiva por

$ # (:.(s)) (8.2), 2da l nea, y =

Los otros casos son analogos. Esto completa la prueba de rt< 6.

Consiguientemente, para cada 1 < < 0, wfutb contiene predicados que satisfacen los axiomas de rt< y, por ende, esta teor a puede de nir los predicados de verdad de rt< 0 .

Estrictamente hablando, los predicados # (x) no son de niciones de los predicados T (x) de rt< 0 porque las oraciones a las cuales se aplican son sintacticamente diferentes:

mientras que los primeros se aplican a ciertas oraciones de LT , los segundos a oraciones de L< *0* . Para circunvenir este problema y completar la prueba de interpretabilidad relativa es preciso traducir las oraciones de L< *0* a LT reemplazando las ocurrencias de los predicados T (t) por # (t) y estipular que una oracion de L< *0* es verdadera sii su traduccion lo es. Es preciso reemplazar, no solo los predicados de verdad que ocurren en cada oracion de L< *0* sino los que ocurren en las expresiones a las cuales estas oraciones re eren. Por ejemplo, T!(pT*0*(p0 = 0q)q) no puede traducirse como #!(pT*0*(p0 = 0q)q) sino que es necesario tambien reemplazar T*0* por #*0* dentro del termino cerrado pT*0*(p0 = 0q)q. Para eso es posible aplicar el teorema de recursion de Kleene para obtener la siguiente funcion de traduccion : L< *0* ! LT .[3]

8
>'   si ' 2 L^{+}_{pa} o ' 2= L< *0*
: ( )   si ' := :
(') = < ( ) ! ( )   si ' := ! si ' :=
8v ( )   8v
:
(. (t))   si ' := T t

donde . es un termino que representa en pa^{+} (asumo que L^{+}_{pa} tiene de hecho s mbolos de funcion su cientes como para construir este termino). Bajo esta traduccion, es sencillo probar que, si rt< *0* ` ', wfutb ` ('). □

Corolario 8.9. kf y putb son relativamente interpretables en wfutb.

Demostracion. Directamente, por los teoremas 3.17 y 3.23, la proposicion 8.8 y la tran-sitividad de la interpretabilidad relativa. □

Luego, wfutb es (a) !-consistente, (b) lo su cientemente abarcativa como para interpretar relativamente kf, i.e., una teor a composicional de la verdad, a pesar de ser wfutb una teor a desentrecomilladora, (c) que emplea criterios de restriccion lo su cientemente simples como para ser de nibles en L^{+}_{pa}, esto es, criterios sintactico-aritmeticos, y (d) loso camente bien motivada tanto por la cita de Horwich a comienzos del cap tulo como por la tesis referencialista y el analisis de ciertas paradojas como el mentiroso, curry, Yablo y diversas variaciones de esta ultima, en el apartado 7.3. Luego, puede considerarse una muy buena teor a minimalista. Asimismo, al ser consistente con T-Out, wfutb + T-Out es una buena teor a de acionista de la verdad.

Si bien wfutb es capaz de probar los axiomas composicionales de rt< *0* para formulas # (v) de LT para cada < *0*, eso no quiere decir que ella misma sea una teor a

[3] *Vease* ***Halbach*** ***(2011***, p. 37, lema 5.2).

composicional de la verdad, porque puede que no pruebe ningun principio composicional para su propio predicado de verdad, T . De hecho, al ser compatible con T-Out, es sencillo ver que wfutb no prueba el principio composicional que establece la conmutatividad de T con la negacion,

$$8x(Sent_{LT}\ (x)\ !\ (T\ :\!.x\ \$\ :T\ x)) \tag{8.5}$$

ni el que expresa la validez interna de las reglas de introduccion y eliminacion del con-dicional:

$$8x(Sent_{LT}\ (x!.y)\ !\ (T\ (x!.y)\ \$\ (T\ x\ !\ T\ y))) \tag{8.6}$$

porque T-Out es inconsistente con ambos. Por un lado, la instancia de T-Out generada por :T I,

$$T\ I\ !\ :T\ I$$

es equivalente a :(T :.pT Iq ! :T I), incompatible con

$$8x(Sent_{LT}\ (x)\ !\ (T\ :\!.x\ !\ :T\ x)) \tag{8.7}$$

Por otro, la instancia de T-Out generada por T (c^0 !. p 6 q 0 = 0) es

$$T\ c^0\ \ !\ T\ (c^0\ \ 0 = 0\ )\ \ !.p\ \ 6\ q$$

que, junto con (8.6) implica T c^0 (T c^0 T 0 = 0). Como 0 = 0 tambien tiene una instancia asociada del Esquema-T en wfutb, que implica que :T p0 6= 0q, se tiene que T c^0 y, por tanto, que T c^0 ! p 6 q T 0 = 0 . Luego, nuevamente por (8.6), esto implicar a T c^0, lo cual es un absurdo.

Nada de esto permite descartar la posibilidad de que wfutb sea capaz de probar principios composicionales tipeados, como

$$8x(Sent_{L+pa}\ (x)\ !\ (T\ :\!.x\ \$\ :T\ x))$$

y

$$8x(Sent_{L+pa}\ (x!.y)\ !\ (T\ (x!.y)\ \$\ (T\ x\ !\ T\ y)))$$

aunque conjeturo que no es el caso, basandome en un resultado analogo para putb en Halbach (2009, x6).

wfutb es el primer fruto del trabajo argumentativo y propositorio que he rea-lizado a lo largo de toda la tesis. Por un lado, el analisis conceptual sobre la posicion de acionista acerca de la verdad, que desemboc en la necesidad de elaborar teor as for-males de la verdad que cumplan las condiciones (1)-(3) en el apartado 5.3. Por otro, la exploracion de diferentes nociones de referencia, que dio por resultado una nocion aletica y sintactica en el apartado 7.3.2, no solo adecuada para el estudio de las paradojas que afectan a las teor as formales de la verdad, sino para la formulacion de criterios restrictivos sintacticos del Esquema-T que se adapten as condiciones de acionistas. Ambos dieron lugar a este sistema formal desentrecomillador que no solo cuadra perfectamente con las condiciones (1)-(3) al expandirse con T-Out sino que, por s solo, es un perfecto candidato para el proyecto minimalista de Horwich presentado en el apartado 5.3.1, a la vez que permite veri car la tesis referencialista de las paradojas semanticas. En los apartados restantes continuo en esta direccion, puliendo algunas aristas de este primer resultado y proveyendo nueva evidencia en favor de la tesis referencialista.

8.2.2. Verdad y referencia nita

Una mirada un poco mas de cerca a las expresiones que dan lugar a paradojas y !-paradojas revela que en el caso de oraciones no autorreferenciales estas siempre re eren directamente a un numero in nito de otras oraciones, como las oraciones de Yablo en

(n) = p8x > n:T (x)q (8.8)

y sus variantes, como

(n) = p:8x(x > n ! T (x))q

y

(n) = p8(x > n ! :8y(y > x ! T (y)))q

Luego, un segundo criterio un poco mas re nado pero arriesgado podr a consistir en incluir todas las oraciones fundadas y todas las mal fundadas que no sean autorreferen-ciales y solo re eran directamente a un numero nito de otras oraciones.

La siguiente formula de L_T expresa que la oracion v re ere directa y aleticamente en qr solo a un numero nito de oraciones:

Rf in (v) := $Sent_{L_T}$ (v) ^ 9x(Seq(x) ^ 8y(R_d (v; y) ! 9i lg(x)$(x)_i$ = y))

Literalmente, v es una oracion de L_T y hay una secuencia nita de numeros que contiene todos los codigos de cada una de las oraciones a las cuales v re ere aletica y directamente en qr .

De nicion 8.10 (frutb). frutb L_T extiende wfutb con el siguiente esquema de axioma, para cada < 0 y cada ' con exactamente n variable libres:

frutb 8t1 : : : tn(RDec (p'(t.1; : : : ; t.n)q)^:SR (p'(t.1; : : : ; t.n)q)^Rf in (p'(t.1; : : : ; t.n)q) !
(T p'(t.1; : : : ; t.n)q $ '(t1; : : : ; tn)))

frutb (por Finite Reference Uniform Tarski Biconditionals) materializa una ver-sion debilitada del criterio de seleccion propuesto; en tanto no es posible dejar de lado el requisito de la r-decidibilidad, por las mismas razones que antes. El axioma frutb establece que, si < 0 y el resultado de sustituir en ' sus n variables libres con los terminos t1; : : : ; tn es una oracion r-decidible, no aleticamente autorreferente y re ere aletica y directamente a un numero nito de oraciones en qr , entonces esta oracion tiene una instancia correspondiente del Esquema-T. Esto incluye, por ejemplo, las cade-nas de oraciones mal fundadas que se obtienen aplicando la proposicion 1.11 a formulas
que contienen una variable libre bajo el alcance de T , como la cadena de honestos

t0 = pT t1q

t1 = pT t2q

t2 = pT t3q

: : :

y tambien

l0 = p:T l1q

l1 = p:T l2q

l2 = p:T l3q

: : :

pero no las secuencias yablezcas, donde cada oracion es mal fundada y re ere
directa-mente a un numero in nito de otras expresiones.

Proposicion 8.11. frutb es !-consistente.

Demostracion. Por la proposicion 3.37 y los corolarios 8.2, 8.3 y 8.4. □

Este resultado puede reforzarse aun mas.

Corolario 8.12. frutb + T-Out es !-consistente.

Demostracion. Por los corolarios 3.38, 8.2, 8.3 y 8.4. □

Corolario 8.13. rt< 0 , kf y putb son relativamente interpretables en frutb.

Demostracion. Directamente, por la proposicion 8.8, el corolario 8.9 y el hecho de que frutb wfutb. □

No obstante, quizas frutb permite instancias del Esquema-T que no son del todo deseables. Por ejemplo, para oraciones que, si bien no son autorreferenciales, re eren a otras que s lo son. La oracion del mentiroso (reforzado) :T l, donde

$$q^{+} ` l = p{:}T\ lq$$

es claramente autorreferente y, por ende, no tiene una instancia asociada del Esquema-T en frutb. Si la tuviera, la teor a ser a inconsistente, como muestra el teorema de Tarski (teorema 2.9). Sin embargo,

$$8x(x = l\ !\ {:}T\ x)$$

que es logicamente equivalente a :T l, s tiene una instancia del Esquema-T en la teor a, porque es rd-decidible, no autorreferente y solo re ere a :T l. Si bien no da lugar a inconsistencias, casos extra~nos de este tipo implican que la teor a es incompatible con un axioma que cierre la aplicacion del predicado veritativo bajo equivalencia. No es posible decir, so pena de caer en contradiccion, que si una oracion es equivalente a otra que satisface el predicado RDec (v) ^ :SR (v) ^ Rf in (v) entonces hay una instancia del Esquema-T para ella.

Otro caso extra~no esta dado por el mentiroso alternativo

$$q^{+} `\ l^{0} = pT\ {:}\,l^{0}q$$

Como :.l^{0} no denota T :.l^{0} sino :T :.l^{0}, T :.l ^{0} no es autorreferente, como se vio en el apartado 7.3.1.1; frutb contiene la instancia del Esquema-T dada por T :.l^{0}. No obstante, :T :.l^{0} s resulta autorreferente y, por ende, no hay una instancia de este principio para ella en la teor a. Mientras que la instancia del Esquema-T para esta ultima oracion,

$$T\ p{:}T\ {:}\,l^{0}q\ \$\ {:}T\ {:}\,l^{0}$$

dar a lugar inmediatamente a una inconsistencia, porque p:T :.l^{0}q = :.l^{0}, la instancia para T :.l^{0},

$$T\ pT\ {:}\,l^{0}q\ \$\ T\ {:}\,l^{0};$$

no genera inconsistencias sino simplemente establece que frutb es incompatible con el principio composicional (8.5), al igual que kf y putb (veanse los apartados 3.1.3.1 y 3.1.3.2). Mientras que en kf y putb esto puede estar motivado por la logica interna paracompleta, no parece que en este contexto est disponible una motivacion semejante para frutb.

Asimismo, frutb es incompatible con 8.6, porque la oracion de Curry T (c^{0}! p0 6= 0q) es rd-decidible y re ere unicamente a T (c^{0}! p0 6= 0q) ! 0 6= 0, que es tambien rd-decidible y solo re ere a s misma. Luego, T (c^{0}! p0 6= 0q) no es autorreferente y, por ende, tiene una instancia correspondiente del Esquema-T en frutb, que implica

T c^{0} $ T (c^{0}! p0 6= 0q):

Luego, junto con (8.6), T c^{0} $ (T c^{0} ! T p0 6= 0q). Como 0 6= 0 tambien tiene una instancia asociada del Esquema-T en frutb, que implica que :T p0 6= 0q, se tiene que T c^{0} $:T c^{0}.

Si se desea contar con ciertos principios composicionales para T , frutb resulta inaceptable. Sin embargo, dado que la prioridad desde el punto de vista de acionista es contar con T-Out, que ya bloquea la posibilidad de adoptar principios como (8.5) y (8.6), la incompatibilidad de frutb con ellos no parece ser un problema real.

No obstante, desde una perspectiva loso ca, el criterio de restriccion de frutb puede resultar demasiado permisivo, porque ciertas oraciones mal fundadas, a pesar de no ser autorreferenciales y referir directamente a un numero nito de otras expresiones, exhiben patrones de referencia claramente `peligrosos'. Por ejemplo, T l no es autorreferente y re ere directamente solo a la oracion del mentiroso, pero parece a pesar de eso contener algun tipo de circularidad. Luego, frutb podr a estar violando la condicion (d) del proyecto minimalista de Horwich.

8.2.3. Verdad Equivalente

Si contar con la posibilidad de cerrar el predicado veritativo bajo equivalencia o agregar al menos las versiones parciales de los principios composicionales en (8.7) es un requisito, o resulta contraintuitivo incluir instancias del Esquema-T generadas por oraciones como 8x(x = l ! :T x), T l o T :l^{0}, se puede elaborar un tercer criterio, de alguna manera mas restrictivo que el anterior, que permita instancias del Esquema-T generadas solo por oraciones o bien fundadas o que re eran directamente solo a un numero nito de expresiones, ninguna de las cuales sea autorreferencial. Naturalmente, se perderan por un lado ciertas instancias del Esquema-T, pero a la vez sera posible extender los axiomas resultantes a oraciones equivalentes a las permitidas, ganando nuevas instancias por este otro lado.

De nicion 8.14 (erutb). erutb L_T extiende wfutb con el siguiente esquema de axioma, para cada < $_0$ y cada ' con exactamente n variable libres:

erutb 8t_1 : : : t_n9x(RDec (x(t_1; : : : ; t_n)) ^ :9y(SR (y) ^ R (x(t_1; : : : ; t_n); y)) ^ Rf

in (x(t_1; : : : ; t_n)) ^ Bew $_0$ (p'(t.$_1$; : : : ; t.$_n$)q$.x($t_1$; : : : ; t_n)) !

(T p'(t.$_1$; : : : ; t.$_n$)q $ '(t_1; : : : ; t_n)))

erutb (por Equivalent Reference Uniform Tarski Biconditionals) establece que, si < $_0$ y el resultado de sustituir en una formula x sus (posibles) n variables libres por los terminos t_1; : : : ; t_n es una oracion r-decidible, que no re ere a ninguna oracion autorreferencial y solo re ere directamente a un numero nito de expresiones en qr , entonces toda oracion a la cual es equivalente en qr $_0$ tiene una instancia correspondiente del Esquema-T.

Proposicion 8.15. erutb es !-consistente.

Demostracion. Sea L_T como en las hipotesis de la proposicion 3.37 y, ademas, tal que, si ' 2 y pertenece al conjunto del cual ' depende esencialmente (de ni-cion 3.30), entonces 2 . Sea el conjunto de todas las oraciones de L_T que son equivalentes a algun miembro de en N^+. Luego,

1. y, por ende, es in nito.

2. Todas las oraciones de dependen esencialmente de un conjunto nito, porque son equivalentes en N^+ a una oracion en y oraciones equivalentes dependen de los mismos conjuntos, como indica la proposicion 3.29.

3. Ninguna de las oraciones en es autorreferencial. Si alguna ' 2 lo fuera, se tendr a, por un lado, que ' 2= y que existen oraciones '$_1$; : : : ; '$_n$ de L_T tales que, para todo del cual ' depende, '$_1$ 2 ; si 1 i < n, para todo del cual '$_i$ depende, '$_{i+1}$ 2 ; y, para todo de cual '$_n$ depende, ' 2 . Por otro lado, habr a una oracion 2 equivalente a ' en N^+ que, por la proposicion 3.29, depende de los mismos conjuntos que ', con lo cual, '$_1$ pertenece al conjunto del que depende esencialmente. Y como esta cerrado bajo dependencia, '$_1$ 2 y, por ende, '$_2$ 2 , etc., lo que implica que ' 2 , una contradiccion.

En consecuencia, tambien satisface las hipotesis de la proposicion 3.37. Por los coro-larios 8.2, 8.3 y 8.4, erutb es !-consistente. □

Nuevamente, este resultado puede reforzarse.

Corolario 8.16. erutb + T-Out es !-consistente.

Demostracion. El modelo de la aplicacion de la proposicion 3.37 en la prueba de la proposicion anterior es un modelo de T-Out. □

Corolario 8.17. rt< 0 , kf y putb son relativamente interpretables en erutb.

Demostracion. Directamente, por la proposicion 8.8, el corolario 8.9 y el hecho de que erutb wfutb. □

Luego, erutb es (a) !-consistente, (b) aun mas abarcativa que wfutb y, a fortiori, lo su cientemente abarcativa como para interpretar relativamente las teor as mas populares en la literatura, (c) que emplea criterios sintactico-aritmeticos, y (d) loso - camente bien motivada, basada en el analisis de las paradojas semanticas conocidas y la tesis referencialista. En consecuencia, erutb tambien es una excelente candidata a teor a minimalista. Ademas, por ser consistente con T-Out, erutb + T-Out es asimismo una buena teor a de acionista de la verdad.

8.2.4. Verdad y autorreferencia

Finalmente, tambien es posible dar una teor a consistente de la verdad dada por instancias del Esquema-T generadas por oraciones que simplemente no sean aleticamente autorreferentes |o, mejor dicho, no autorreferentes y r-decidibles, por razones semejan-tes a las dadas en las teor as que introduje previamente| ademas de aquellas dadas por oraciones bien fundadas.

Notese que las paradojas semanticas estudiadas en las cuales no hay oraciones autorreferentes involucradas no dan lugar a inconsistencias sino solo a !-inconsistencias. Si lo unico que importa es evitar contradicciones expl citas, si que la teor a carezca de modelo estandar y tenga consecuencias cuanto menos contraintuitivas no resulta ser un requisito imprescindible en ciertos casos, la siguiente teor a podr a ser una opcion.

De nicion 8.18 (srtb). srtb LT extiende wfutb con el siguiente esquema de axioma, para cada < 0 y cada oracion ' 2 LT :

srtb RDec (p'q) ^ :SR (p'q) ! (T p'q $ ')

srtb (por Self-Reference Tarski Biconditionals) establece simplemente que si ' es r-decidible y no autorreferencial entonces tiene una instancia correspondiente del

Esquema-T. Si bien frutb no es una subteor a de srtb porque adopta un axioma uniforme, todas las instancias de frutb se siguen evidentemente de srtb. En consecuencia, srtb tambien es incompatible con un principio que cierre el axioma srtb bajo equiva-lencia, y con los principios composicionales (8.5) y (8.6).

Corolario 8.19. srtb es consistente.

Demostracion. Por compacidad, la proposicion 3.36 y el lema 8.3. □

Corolario 8.20. srtb + T-Out es consistente.

Demostracion. Nuevamente, por compacidad, la proposicion 3.36 y los corolarios 3.38 y 8.3. ❐

Corolario 8.21. rt< $_0$, kf y putb son relativamente interpretables en srtb.

Demostracion. Directamente, por la proposicion 8.8, el corolario 8.9 y el hecho de que srtb wfutb. □

No obstante srtb no tiene modelo estandar y, por ende, tampoco srtb + T-Out.

Proposicion 8.22. srtb es !-inconsistente.

Demostracion. Es posible probar en qr $_0$ que cada una de las oraciones de Yablo en (8.8) es r-decidible y no aleticamente autorreferente en pat. Luego, srtb prueba el principio LYDP, i.e.,

T p8y > n:T (y)q $ 8y > n:T (y) (LYDP)

para cada n 2 !, que, por la proposicion 6.1, es !-inconsistente sobre pat srtb. □

Si la posibilidad de interpretar la teor a mediante una extension de N^+ no es un requisito, srtb es una teor a atractiva por aplicar un criterio de seleccion de instancias del Esquema-T muy inclusivo y relativamente sencillo. Existen en la literatura otras teor as de la verdad !-inconsistentes, como fs (vease el apartado 3.3), e incluso teor as semanticas de la verdad, como la teor a de la revision $t^{\#}$ de Gupta y Belnap (cf. Gupta & Belnap (1993, cap. 6)), ambas con principios prima facie intuitivos pero usualmente criticadas precisamente por carecer de modelo estandar (cf. Leitgeb (2007), Barrio (2010) y Barrio & Picollo (2013)). En esta tesis no me pronuncio al respecto. En cualquier caso, la eleccion de la teor a de la verdad que se haga dependera de los objetivos que con ella quieran alcanzarse. Desde una perspectiva de acionista, srtb resulta inaceptable, porque, como argument en el apartado 3.1.3.1, prueba enunciados falsos que involucran el predicado veritativo y, por ende, excede de alguna manera la funcion basica de la verdad: no satisface la condicion (2) del de acionismo.

A diferencia de las teor as frutb y erutb, srtb no implica instancias del Esquema-T Uniforme sino solo del Esquema-T para oraciones que no son equivalentes a expresiones r-decidibles y bien fundadas. Si en su lugar se adoptaran instancias uniformes, la teor a resultante ser a simplemente inconsistente.

De nicion 8.23 (srutb). srutbsrutb L_T extiende wfutb con el siguiente esquema de axioma, para cada < $_0$ y cada ' con exactamente n variable libres:

srutb 8t_1 : : : t_n(RDec (p'(t.$_1$; : : : ; t.$_n$)q) ^ :SR (p'(t.$_1$; : : : ; t.$_n$)q)) !

(T p'(t.$_1$; : : : ; t.$_n$)q \$ '(t_1; : : : ; t_n)))

Proposicion 8.24. srutb es inconsistente.

Demostracion. Es posible probar en qr $_0$ que

8t(RDec(p8y > t.:T (y)q) ^ :SR(p8y > t.:T (y)q))

esto es, que todas las oraciones de la secuencia de Yablo en (8.8) son r-decidibles y no aleticamente autorreferentes en pat. Luego, se puede probar en srutb el (UYDP), i.e.,

8t(T p8 y > t :T (y) q \$ 8 y > t :T (y)) (UYDP)

que, por la proposicion 6.2, es inconsistente sobre pat srutb. □

Luego, srutb (por Self-Reference Uniform Tarski Biconditionals) es ciertamente inviable. La interpretacion loso ca que se debe hacer de este resultado de inconsistencia no es obvia. Por un lado, podr a pensarse que entonces la autorreferencia no es el unico patron que estrictamente da lugar a paradojas, esto es, contradicciones y no meramente !-inconsistencias, contrario a la evidencia que provee el analisis de los patrones referenciales expresiones paradojicas en el apartado 7.3.

Otro modo de interpretar el resultado de la proposicion 8.24 es siguiendo a Priest (1997), i.e., entendiendo que la circularidad de las oraciones de Yablo esta en el predicado y es este el que esta dando lugar a instancias inconsistentes, ya no del Esquema-T, porque este no permite la aplicacion de T a predicados, sino del Esquema-T Uniforme. Esto ultimo parece bastante acertado. De hecho, es posible extender las nociones de referencia aletica y sus familiares a formulas y ver que, por ejemplo, predicados como el de Yablo resultan autorreferenciales. Con estos conceptos extendidos tal vez podr a obtenerse nuevas teor as desentrecomilladoras consistentes de la verdad; quizas el objeto de un trabajo futuro.

Sin embargo, por otro lado, habiendo mostrado que teor as dadas por principios uniformes como wfutb, frutb y erutb son !-consistentes, donde no se ha bloqueado la posible autorreferencialidad de ningun predicado sino solo de oraciones, la objecion de Priest pierde fuerza. Lo que en estas teor as se ha prohibido, a diferencia de srutb, son ciertas oraciones mal fundadas y, por tanto, podr a concluirse que esta es una nota comun a las paradojas, en lugar de la autorreferencialidad de oraciones y predicados. Quizas la autorreferencia de predicados se traduzca en mala fundacion de oraciones, como parece suceder en la secuencia de Yablo y otras semejantes. Nuevamente, dejo esto para una futura investigacion. En cualquier caso, queda claro que todas las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas son, no solo mal fundadas sino tambien, o bien autorreferentes, o bien re eren directamente a un numero in nito de otras expresiones.

§

Seguramente sea posible encontrar criterios mas re nados, que permitan una caracterizacion mas detallada de las expresiones que dan lugar a paradojas semanticas y otras patolog as. No pretendo haber agotado los usos de los conceptos de referencia aletica dados para formular teor as de la verdad desentrecomilladoras, minimalistas y de acionistas en este cap tulo, sino mas bien haber ilustrado como esto es posible y en gran medida exitoso. Idealmente, este cap tulo fomentar la formulacion de nuevas y mejores teor as de acionistas y minimalistas de la verdad basadas en el concepto de referencia aletica.

Conclusion

A lo largo de esta investigacion, primeramente, he argumentado que el predicado veri-tativo cumple unicamente roles logico-expresivos en el lenguaje, todos los cuales pueden explicarse por medio de su funcion basica o naturaleza (des)entrecomilladora, i.e., el hecho de que una oracion A y su predicacion de verdad \`A' es verdadera" sean equiva-lentes, y que la segunda tenga a A por su objeto. Luego, he inferido que esta naturaleza desentrecomilladora constituye o encapsula el signi cado de la verdad. Ademas, he de-fendido la idea de que este signi cado puede expresarse por medio de principios de transparencia, i.e., el Esquema T, las inferencias de Introduccion T, Eliminacion T o el principio de Intersustitutividad. Estas tres tesis, sostuve, conforman el nucleo del de acionismo.

Asimismo argument que el de acionismo y cualquiera que crea que la verdad cumple los roles logico-expresivos mencionados debe tener especial interes en hallar quasi logicas o teor as formales de la verdad que garanticen estos usos. He mostrado que esto se traduce lograr que el predicado de verdad de la teor a satisfaga lo que llame \`propiedad de eliminacion' de la verdad.

Creo haber logrado establecer tambien que, en el plano formal, el Esquema-T u otros principios de transparencia no son ni necesarios ni su cientes para otorgar al predicado de verdad la propiedad de eliminacion. Por un lado, sin ciertos principios logicos clasicos los principios de equivalencia son incapaces de hacerlo. Por otro, dados estos principios logicos, T-Out, la direccion de izquierda a derecha de los bicondicionales del Esquema-T, es no solo necesario sino tambien su ciente. Como en contextos clasicos T-Out no engendra paradojas ceteris paribus, he concluido que querer contar con un predicado que permita los usos logicos de la verdad no es razon su ciente para abandonar la logica clasica, porque esta es capaz de otorgar a la verdad las propiedades necesarias para llevar a cabo sus roles expresivos, i.e., la propiedad de eliminacion, sin problemas.

Adicionalmente, defend la idea segun la cual una teor a de la verdad dise~nada para permitir los usos logicos de la verdad debe no solo satisfacer la propiedad de eli-minacion sino tambien contar al menos con una axiomatizacion parcial razonable que garantice esta propiedad, para poder ser efectivamente utilizada como una logica, apli-cada al razonamiento. Ademas, sostuve que, si bien puede resultar deseable contar con mas principios para el predicado veritativo que las instancias de T-Out por cuestiones practicas o descriptivas, para cuadrar con las tesis centrales del de acionismo los prin-cipios de verdad que la teor a valide no deben exceder los principios de transparencia porque, de lo contrario, la tesis segun la cual el estos principios capturan el signi cado de la verdad ser a falsa.

En este sentido, argument que el programa minimalista de Horwich entendi-do como la busqueda de una teor a axiomatica dada por instancias consistentes del Esquema-T que utilice un criterio de restriccion abarcativo, sintactico y explicativo es un proyecto digno de exploracion, si bien hasta el momento no ha habido muchos avances en esta direccion. Propuse como un camino posible a explorar aquel basado en la tesis referencialista sobre las paradojas semanticas, de acuerdo con la cual las expresiones paradojicas, que han de ser excluidas del Esquema-T, pueden identi carse a traves de los patrones referenciales que la subyacen. Esta tesis, si bien considerada de `sentido comun', jamas ha sido evaluada correctamente debido a la falta de nociones adecuadas y precisas de referencia capaces de dar cuenta de los patrones referenciales detras de las expresiones del lenguajes como L_T , como mostre en detalle.

He argumentado que una nocion materialmente adecuada de referencia aplicable a lenguajes formales no debe ser extensional sino hiperintensional, esto es, no debe ser el caso de que dos oraciones logicamente equivalentes re eran necesariamente a los mismos objetos, y he dado condiciones generales que cualquier nocion de referencia por el estilo debe satisfacer, dando argumentos cuando fueron necesarios.

Luego, he mostrado que es posible dar una de nicion materialmente adecuada de referencia para ciertos lenguajes formales de primer orden, i.e., el lenguaje de la aritmetica, as como de referencia aletica para el lenguaje de la verdad, que superen las di cultades que otros abordajes previos han encontrado, satisfaciendo las condiciones mencionadas en el parrafo anterior. Las nociones que di son intuitivamente correctas y explican, entre otras cosas, como los lemas diagonales debil y fuerte son capaces de dar lugar a oraciones autorreferenciales siendo hiperintensionales. He ofrecido nociones de referencia tanto semanticas como sintacticas. Para las primeras demostr un resultado de inde nibilidad, mientras que para las segundas, al contrario, mostre que son de nibles en el lenguaje de la aritmetica.

Debido a la paradoja de Yablo y otras antinomias in nitarias, empleando las no-ciones de referencia aletica que introduje, refut la tesis referencialista ortodoxa sobre las paradojas semanticas: no todas las paradojas semanticas son autorreferentes; el patron de referencia comun a todas las paradojas no es circular.

Mostre tambien que es posible recurrir a la nocion de referencia aletica sintactica para formular criterios de restriccion de instancias del Esquema-T. Mostre primero que, si el criterio incluye, grosso modo, las oraciones equivalentes a expresiones aleticamente bien fundadas, el resultado es una teor a desentrecomilladora de la verdad !-consistente y deductivamente poderosa, lo cual constituye de algun modo una veri cacion de la vision referencialista general sobre las paradojas semanticas: el poder deductivo de la teor a muestra que el criterio de seleccion es poco restrictivo y que, por ende, la mala fundacion esta plausiblemente detras de las paradojas.

En segundo lugar, se~nale como el criterio puede re narse al menos en dos direccio-nes, caracterizando los patrones referenciales que subyacen a las expresiones paradojicas con mas precision. El criterio de seleccion de instancias del Esquema-T que incluye to-das las oraciones que son o bien bien fundadas o bien no autorreferenciales y re eren directamente solo a un numero nito de otras expresiones da lugar a una teor a des-entrecomilladora que tambien es !-consistente y deductivamente poderosa, al igual que aquel que incluye las oraciones que son equivalentes a expresiones que son o bien bien fundadas o bien no re eren a expresiones autorreferentes ni directamente a un numero in nito de enunciados.

Finalmente, he mostrado que empleando la nocion de referencia aletica sintactica es posible construir teor as de la verdad que cuadran con el proyecto minimalista de Horwich. Los tres criterios de seleccion mencionados en los dos parrafos anteriores no solo son explicativos y abarcativos sino que, al estar formulados en terminos de la referencia aletica sintactica, una nocion de nible en el lenguaje de la aritmetica de primer orden, son sintacticos y lo su cientemente simples como para dar lugar a una teor a parcialmente axiomatizable. Ademas, las teor as resultantes no implican principios que exceden el Esquema-T y, por ultimo pero no menos importante, son todas compatibles con T-Out. En consecuencia, sus extensiones mediante este principio tienen la propiedad de eliminacion y son, por ende, buenas candidatas para el de acionismo.

Bibliograf a

Asenjo, Florencio G. A Calculus of Antinomies. Notre Dame Journal of Formal Logic, 7:103{105, 1966.

Austin, John L. Truth. Proceedings of the Aristotelian Society, 24:111{172, 1950.

Barrio, Eduardo A. La Verdad Desestructurada. Eudeba, Buenos Aires, 1998.

Barrio, Eduardo A. Theories of truth without standard models and Yablo's sequences. Studia Logica, 96:375{391, 2010.

Barrio, Eduardo A. De niciones tarskianas de la verdad. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), La Logica de la Verdad, cap. 1, pp. 25{73. Eudeba, Buenos Aires, 2014a.

Barrio, Eduardo A. (Ed.). La Logica de la Verdad. Eudeba, Buenos Aires, 2014b.

Barrio, Eduardo A. (Ed.). Paradojas, Paradojas y mas Paradojas. College Publications, Londres, 2014c.

Barrio, Eduardo A. & Picollo, Lavinia. Notes on !-inconsistent Theories of Truth in Second-Order Languages. Review of Symbolic Logic, 6:733{741, 2013.

Barrio, Eduardo A., Rosenblatt, Lucas & Tajer, Diego. The Logics of Strict-Tolerant Logic. Journal of Philosophical Logic, pp. 1{21, forthcoming.

Beall, J.C. Is Yablo's Paradox non-circular? Analysis, 61:176{187, 2001.

Beall, J.C. Transparent disquotationalism. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, cap. 1, pp. 7{22. Oxford University Press, Oxford, 2005.

Beall, J.C. Spandrels of Truth. Oxford University Press, Oxford, 2009.

Beall, J.C. A simple approach towards recapturing consistent theories in paraconsistent settings. Review of Symbolic Logic, 6:755{764, 2013.

Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.). De ationism and Paradox. Oxford University Press, Oxford, 2005.

Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.). Revenge of the liar. Oxford University Press, Oxford, 2007.

Bell, John L. In nitary Logic. En Edward N. Zalta, (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Primavera edicion, 2012.

Belnap, Nuel D. Tonk, Plonk, and Plink. Analysis, 22:130{134, 1962.

Belnap, Nuel D. Gupta's rule of revision theory of truth. Journal of Philosphical Logic, 11:110{116, 1982.

Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (Eds.). Philosophy of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edicion, 1983.

Beringer, Timo & Schindler, Thomas. Reference-graphs, games for truth, and paradox. manuscrito, 2014.

Blackburn, S. & Simmons, K. (Eds.). Truth. Oxford University Press, Oxford, 1999.

Bolander, Thomas, Hendricks, Vincent F. & Pedersen, Stig A. (Eds.). Self-Reference. CSLI Publications, Stanford, 2004.

Boolos, George. To Be Is To Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables). Journal of Philosophy, 81:430{450, 1984.

Boolos, George. Nominalist Platonism. Philosophical Review, 94:327{344, 1985.

Boolos, George, Burgess, John P. & Je rey, Richard C. Computability and Logic. Cam-bridge University Press, Cambridge, quinta edicion, 2007.

Bringsjord, Selmer & van Heuveln, Bram. The `mental eye' defence of an in nitized version of Yablo's Paradox. Analysis, 63:61{70, 2003.

Cantini, Andrea. Notes on formal theories of truth. Zeitschr. f. math. Logik und Grund-lagen d. Math., 35:97{130, 1989.

Cantini, Andrea. Logical frameworks for truth and abstraction. An axiomatic study, volumen 135 de Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, Ams-terdam, 1996.

Carnap, Rudolf. Logical Syntax of Language. Routledge, Londres, 1937.

Carnielli, Walter, Coniglio, Marcelo & Marcos, Joao. Logics of Formal Inconsistency. En Gabbay, Dov M. & Guenthner, Franz (Eds.), Handbook of Philosophical Logic, volumen 14, pp. 1{93. Springer, Nueva York, segunda edicion, 2007.

Chang, Chen Chung & Keisler, H. Jerome. Model Theory. North Holland, Amsterdam, tercera edicion, 1990.

Cieslinski, Cezary. De ationism, conservativeness and maximality. Journal of Philosop-hical Logic, 36:695{705, 2007.

Cintula, Petr, Ferm•uller, Christian, Godo, Llu s & Hajek, Petr (Eds.). Reasoning Under Vagueness: Logical, Philosophical, and Linguistic Perspectives. College Publications, Londres, 2011.

Cobreros, Pablo, Egre, Paul, Ripley, David & Rooij, Robertvan . Reaching Transparent Truth. Mind, 122:841{866, 2013.

Cook, Roy T. Patterns of paradox. Journal of Symbolic Logic, 69(3):767{774, 2004.

Cook, Roy T. What's wrong with tonk(?). Journal of Philosophical Logic, 34:217{226, 2005.

Cook, Roy T. There are non-circular paradoxes (but Yablo's Isn't One of Them!). The Monist, 89:118{149, 2006.

Cook, Roy T. The Yablo Paradox. An Essay on Circularity. Oxford University Press, Oxford, 2014a.

Cook, Roy T. There is no paradox of logical validity! Logica Universalis, 8:447{467, 2014b.

Coquand, Thierry. Type Theory. En Edward N. Zalta, (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Verano edicion, 2015.

Craig, William & Vaught, Robert L. Finite axiomatizability using additional predicates. Journal of Symbolic Logic, 23:289{308, 1958.

Curry, Haskell B. The inconsistency of certain formal logics. Journal of Symbolic Logic, 7:115{117, 1942.

da Costa, Newton. On the Theory of Inconsistent Formal Systems. Notre Dame Journal of Formal Logic, 15:497{510, 1974.

Davidson, Donald. Truth and Meaning. Synthese, 17:304{323, 1967.

Davidson, Donald. True to the Facts. Journal of Philosophy, 66:748{764, 1969.

Davidson, Donald. The Structure and Content of Truth. Journal of Philosophy, 87: 279{328, 1990.

Dowden, Bradley. Accepting inconsistencies from the paradoxes. Journal of Philosophical Logic, 13:125{130, 1984.

Dummett, Michael. Truth. Proceedings of the Aristotelian Society, 59:141{162, 1958-1959.

Dummett, Michael. Truth and Other Enigmas. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1978.

Enderton, Herbert B. Elements of Set Theory. Academic Press, Londres, 1977.

Etchemendy, John. Tarski on Truth and Logical Consequence. Journal of Symbolic Logic, 53:51{79, 1988.

Etchemendy, John. The Concept of Logical Consequence. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1990.

Feferman, Solomon. Re ecting on incompleteness. Journal of Symbolic Logic, 56:1{49, 1991.

Feferman, Solomon. Axioms for determinateness and truth. Review of Symbolic Logic, 1:204{217, 2008a.

Feferman, Solomon. Tarski's Conceptual Analysis of Semantical Notions. En Patterson, D. (Ed.), New Essays on Tarski and Philosophy, pp. 72{93. Oxford University Press, Nueva York, 2008b.

Field, Hartry. The De ationary Conception of Truth. En MacDonald, G. & Wright, C. (Eds.), Fact, Science and Morality. Blackwell, Oxford, 1986.

Field, Hartry. Critical Notice: Paul Horwich's \Truth". Philosophy of Science, 59:321{ 330, 1992.

Field, Hartry. De ationist views of meaning and content. Mind, 103:249{284, 1994.

Field, Hartry. De ating the Conservativeness Argument. Journal of Philosophy, 96: 533{540, 1999.

Field, Hartry. Saving the Truth Schema from Paradox. Journal of Philosophical Logic, 31:1{27, 2002.

Field, Hartry. A revenge-immune solution to the semantic paradoxes. Journal of Philosophical Logic, 32:139{177, 2003.

Field, Hartry. Variations on a Theme by Yablo. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, pp. 53{74. Oxford University Press, Oxford, 2005.

Field, Hartry. Solving the paradoxes, escaping revenge. En Beall, J.C. (Ed.), Revenge of the liar, pp. 78{144. Oxford University Press, Oxford, 2007.

Field, Hartry. Saving Truth from Paradox. Oxford University Press, Nueva York, 2008.

Fischer, Martin, Halbach, Volker, Stern, Johannes & Kreiner, J•onne. Axiomatizing semantic theories of truth? Review of Symbolic Logic, forthcoming:22, 2015. doi: http://dx.doi.org/10.1017/S1755020314000379.

Forster, Thomas. The signi cance of Yablo's Paradox without self-reference. Logique et Analyse, 47:461{462, 2004.

Frege, Gottlob. Begri sschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Louis Nebert, Halle, 1879. Traducido al ingles como `Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic' en van Heijenoort (1967).

Frege, Gottlob. Der Gedanke: Eine logische Untersuchung. Beitr•age zur Philosophie des Deutschen Idealismus, I:58{77, 1918-19. Traducido al ingles como `The Thought: A Logical Inquiry' en Frege (1956) y reimpreso en Blackburn & Simmons (1999, pp. 85-105).

Frege, Gottlob. The Thought: A Logical Inquiry. Mind, 65:289{311, 1956.

Friedman, Harvey & Sheard, Michael. An axiomatic approach to self{referential truth. Annals of Pure and Applied Logic, 33:1{21, 1987.

Gabbay, Dov M. & G•unthner, Franz (Eds.). Handbook of Philosophical Logic, volumen IV. Reidel, Dordrecht, 1989.

Gabbay, Dov M. & G•unthner, Franz (Eds.). Handbook of Philosophical Logic, volumen 6. Kluwer, Dordrecht, 2002.

Gabbay, Dov M. & G•unthner, Franz (Eds.). Handbook of Philosophical Logic, volumen 14. Springer, Nueva York, 2007.

Garc a-Carpintero, Manuel. The Grounds for the Model-Theoretic Account of the Logical Properties. Notre Dame Journal of Formal Logic, 34:107{131, 1993.

Gentzen, Gerhard. Untersuchungen uber• das Logische Schlie en. Math. Zeitschrift, 39: 176{210, 1934. Traducido al ingles como `Investigations into Logical Deduction' en ?, pp. 68-131.

Glanzberg, Michael. Minimalism and Paradoxes. Synthese, 135:13{36, 2003.

Glanzberg, Michael. Minimalism, De ationism and Paradoxes. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, cap. 8, pp. 107{132. Oxford Univer-sity Press, 2005.

G•odel, Kurt. Uber formal unentscheidebarre Satze• der Principia Mathematica und ver-wandler System I. Monathshefte f•ur Mathematik und Physik, 38:173{198, 1931. Tra-ducido al ingles como `On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I ' en ?, pp. 145-195.

G•odel, Kurt. The present situation in the foundations of mathematics. En ?, pp. 45-53, 1933. Manuscrito para una conferencia de la Asociacion Matematica de America en Cambridge, Mass., 29 y 30 de diciembre.

G•odel, Kurt. Russell's mathematical logic. En Schilpp, Paul A. (Ed.), The Philosophy of Bertrand Russell, volumen III de The Library of Living Philosophers, pp. 125{153. Evanston & Chicago, Northwestern University, 1944. Reimpreso en Benacerraf & Putnam (1983, pp. 447-469).

Gomez-Torrente, Mario. Logical Truth and Tarskian Logical Truth. Synthese, 117: 375{408, 1998/1999.

Gomez-Torrente, Mario. The inde nability of truth in the \Wahrheitsbegri ". Annals of Pure and Applied Logic, 126:27{37, 2004.

Goodman, Nelson. About. Mind, 70:1{24, 1961.

Grover, Dorothy L., Camp, Joseph L. & Belnap, Nuel D. A Prosentential Theory of Truth. Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analy-ticTradition, 27:73{125, 1975.

Gupta, Anil. Truth and Paradox. Journal of Philosphical Logic, 11:1{60, 1982.

Gupta, Anil. A critique of de ationism. Philosophical Topics, 21:57{81, 1993.

Gupta, Anil & Belnap, Nuel D. The Revision Theory of Truth. MIT Press, Cambridge, Mass., 1993.

Halbach, Volker. A System of Complete and Consistent Truth. Notre Dame Journal of Formal Logic, 35:311{327, 1994.

Halbach, Volker. Tarski Hierarchies. Erkenntnis, 43:339{367, 1995.

Halbach, Volker. Disquotationalism and in nite conjunctions. Mind, 108:1{22, 1999.

Halbach, Volker. How Innocent is De ationism? Synthese, 126:167{194, 2001.

Halbach, Volker. Understanding Shapiro's Guru. 2003.

Halbach, Volker. Reducing compositional to disquotational truth. Review of Symbolic Logic, 2:786{798, 2009.

Halbach, Volker. Axiomatic Theories of Truth. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

Halbach, Volker & Horsten, Leon. The De ationist's Axioms for Truth. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, cap. 12, pp. 203{217. Oxford University Press, 2005.

Halbach, Volker & Horsten, Leon. Axiomatizing Kripke's Theory of Truth. Journal of Symbolic Logic, 71:677{712, 2006.

Halbach, Volker & Visser, Albert. Self-reference in Arithmetic I. Review of Symbolic Logic, 7:671{691, 2014a.

Halbach, Volker & Visser, Albert. Self-reference in Arithmetic II. Review of Symbolic Logic, 7:692{712, 2014b.

Hardy, James. Is Yablo's Paradox Liar-Like? Analysis, 55:197{198, 1995.

Heck, Richard Jr. Se -reference and the Languages of Arithmetic. Philosophia Mathematica, III:1{29, 2007.

Henkin, Leon. A problem concerning provability. Journal of Symbolic Logic, 17:160, 1952.

Herzberger, Hans G. Paradoxes of grounding in semantics. Journal of Philosophical Logic, 67:145{167, 1970.

Herzberger, Hans G. Notes on Naive Semantics. Journal of Philosphical Logic, 11: 61{102, 1982a.

Herzberger, Hans G. Naive Semantics and the Liar Paradox. Journal of Philosophy, 79: 479{497, 1982b.

Horsten, Leon. The semantical paradoxes, the neutrality of truth, and the neutrality of the minimalist theory of truth. En Cortois, P. (Ed.), The Many Problems of Realism, pp. 173{187. Tilburg University Press, Tilburgo, 1995.

Horsten, Leon. The Tarskian Turn: De ationism and Axiomatic Truth. MIT Press, Cambridge, Mass., 2011.

Horwich, Paul. De ationary Truth and the Problem of Aboutness. Philosophical Issues, 8, Truth:95{106, 1997.

Horwich, Paul. Meaning. Clarendon Press, Oxford, 1998a.

Horwich, Paul. Truth. Blackwell, Oxford, segunda edicion, 1998b.

Horwich, Paul. A minimalist critique of Tarski on truth. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, pp. 75{84. Oxford University Press, Oxford, 2005.

Jespersen, Bj rn & Duzi, Marie. Introduction to a special issue of Synthese on Hyperintensionality. Synthese, en prensa.

Ketland, Je rey. De ationism and Tarski's paradise. Mind, 108:69{94, 1999.

Ketland, Je rey. Bueno and Colyvan on Yablo's Paradox. Analysis, 64:165{172, 2004.

Ketland, Je rey. Yablo's Paradox and !-inconsistency. Synthese, 145:295{307, 2005.

Kleene, Stephen C. Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols. Memoirs of the American Mathematical Society, 10: 27{68, 1952.

Kreisel, Georg. On a problem of Henkin's. Indagationes Mathematicae, 15:405{406, 1953.

Kremer, Michael. Kripke and the Logic of Truth. Journal of Philosophical Logic, 17: 225{278, 1988.

Kripke, Saul. Outline of a Theory of Truth. Journal of Philosphy, 72:690{716, 1975.

Kripke, Saul. Naming and Necessity. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1980.

Leeds, Stephen. Theories of reference and truth. Erkenntnis, 13:111{129, 1978.

Leitgeb, Hannes. What is a Self-Referential Sentence? Critical remarks on the alleged (non)-circularity of Yablo's Paradox. Logique et Analyse, 177-178:3{14, 2002.

Leitgeb, Hannes. What Truth Depends On. Journal of Philosphical Logic, 34:155{192, 2005.

Leitgeb, Hannes. What Theories of Truth Should be Like (but Cannot be). Philosophy Compass, 2:276{290, 2007.

Levy, Azriel. Basic Set Theory. Springer-Verlag, Berl n, 1979. Reimpreso por Dover Publications, 2003.

Lewis, David. Papers in Philosophical Logic. Cambridge University Press, Cambridge, 1988a.

Lewis, David. Statements partly about observation. En Papers in Philosophical Logic, pp. 125{155. Cambridge University Press, Cambridge, 1988b.

Linnebo, ystein & Rayo, Agust n. Hierarchies Ontological and Ideological. Mind, 121: 269{308, 2012.

L•ob, Martin H. Solution of a Problem of Leon Henkin. Journal of Symbolic Logic, 20: 115{118, 1955.

Martin, Robert L. & Woodru , Peter W. On Representing True-in-L in L. Philosophia, 5:213{217, 1975.

Mart nez, Jose. La Paradoja del Mentiroso. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), Paradojas, Paradojas y mas Paradojas, pp. 11{26. College Publications, Londres, 2014.

McGee, Vann. How Truth-Like can a Predicate Be? A Negative Result. Journal of Philosphical Logic, 14:399{410, 1985.

McGee, Vann. Truth, Vagueness, and Paradox. An Essay on the Logic of Truth. Hackett, Indiana, 1991.

McGee, Vann. Maximal consistent sets of instances of Tarski's schema. Journal of Philosphical Logic, 21:235{241, 1992a.

McGee, Vann. Two Problems with Tarski's Theory of Consequence. Proceedings of the Aristotelian Society, 92:273{292, 1992b.

Montague, Richard. Syntactical Treatments of Modality, with Corollaries on Re ection Principles and Finite Axiomatizability. Acta Philosophica Fennica, 16:153{167, 1963. Reimpreso en Montague (1974, pp. 286-302).

Montague, Richard. Formal Philosophy. Selected Papers of Richard Montague. Yale University Press, New Haven, 1974.

Moretti, Alberto & Hurtado, Guillermo (Eds.). La Paradoja de Orayen. Eudeba, Buenos Aires, 2003.

Moschovakis, Yiannis. Notes on Set Theory. Springer, Nueva York, segunda edicion, 2006.

Nelson, Michael. Existence. En Edward N. Zalta, (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Invierno edicion, 2012.

Orayen, Raul. Una paradoja en la semantica de la teor a de conjuntos. En Moretti, Alberto & Hurtado, Guillermo (Eds.), La Paradoja de Orayen, pp. 35{59. Eudeba, Buenos Aires, 2003.

Pailos, Federico. La Paradoja de Curry. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), Paradojas, Paradojas y mas Paradojas, pp. 41{52. College Publications, Londres, 2014.

Pailos, Federico & Rosenblatt, Lucas. Non-deterministic Conditionals and Transparent Truth. Studia Logica, 2014. doi: 10.1007/s11225-014-9580-1.

Paoli, Francesco. Substructural Logics: A Primer. Kluwer, Dordrecht, 2002.

Patterson, Douglas (Ed.). New Essays on Tarski and Philosophy. Oxford University Press, Nueva York, 2008.

Picollo, Lavinia. La Inocencia del De acionismo. Manuscrito, 33:425{443, 2010.

Picollo, Lavinia. The Old-Fashioned Yablo Paradox. Analisis Filoso co, 32:21{29, 2012.

Picollo, Lavinia. Yablo's Paradox in Second-Order Languages: Consistency and Unsatis ability. Studia Logica, 101:601{617, 2013.

Picollo, Lavinia & Buacar, Natalia. La Teor a Revisionista de la Verdad. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), La Logica de la Verdad, cap. 3, pp. 117{186. Eudeba, Buenos Aires, 2014.

Picollo, Lavinia & Schindler, Thomas. Disquotation and In nite Conjunctions. 2015. En preparacion, 26 paginas.

Pohlers, Wolfram. Proof Theory: The First Step into Impredicativity. Springer, Berl n/Heidelberg, 2009.

Poincare, Henri. Les Mathematiques et la logique. Revue de Metaphysique et de Morale, 14:294{317, 1906.

Priest, Graham. The logic of paradox. Journal of Philosophical Logic, 9:219{241, 1979.

Priest, Graham. In Contradiction. Martinus Nijho , Dordrecht, primera edicion, 1987.

Priest, Graham. Yablo's Paradox. Analysis, 57:236{242, 1997.

Priest, Graham. Paraconsistent logics. En Gabbay, Dov M. & Gunthner, Franz (Eds.), Handbook of Philosophical Logic, volumen 6, pp. 287{393. Kluwer, Dordrecht, 2002.

Priest, Graham. Doubt Truth To Be A Liar. Oxford University Press, Oxford, 2006a.

Priest, Graham. In Contradiction. Oxford University Press, Nueva York, segunda edicion, 2006b.

Priest, Graham. Paraconsistency and Dialetheism. En Gabbay, Dov M. & Woods, John (Eds.), Handbook of the History of Logic, volumen 8: The Nonmonotonic Turn in Logic, pp. 129{204. North Holland, Amsterdam, 2007.

Priest, Graham. An Introduction to Non-Classical Logic. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edicion, 2008.

Prior, Arthur N. Runabout Inference Ticket. Analysis, 21:38{39, 1960/61.

Prior, Arthur N. Conjunction and Contonktion Revisited. Analysis, 24:191{195, 1964.

Prior, Arthur N. Objects of Thought. Clarendon Press, Oxford, 1971.

Putnam, Hilary. Formalization of the Concept of \About". Philosophy of Science, 25: 125{130, 1958.

Putnam, Hilary. A Comparison of Something with Something Else. New Literary History, 17(1, Philosophy of Science and Literary Theory), 1985.

Putnam, Hilary. Representation and Reality. MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.

Quine, Willard Van Orman. Philosophy of Logic. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1970.

Quine, Willard Van Orman. Pursuit of truth. Harvard University Press, Cambridge, Mass., revisada edicion, 1992.

Rabern, Landon, Rabern, Brian & Macauley, Matthew. Dangerous reference graphs and semantic paradoxes. Journal of Philosophical Logic, 42(5):727{765, 2013.

Ramsey, Frank P. Facts and Propositions I. Proceedings of the Aristotelian Society, 7: 153{170, 1927.

Rathjen, Michael. The realm of ordinal analysis. En Cooper, S. Barry & Truss, John K. (Eds.), Sets and Proofs, volumen 258 de London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 219{278. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Rayo, Agust n & Uzquiano, Gabriel. Toward a Theory of Second-Order Consequence. Notre Dame Journal of Formal Logic, 40:315{325, 1999.

Rayo, Agust n & Uzquiano, Gabriel. Introduction. En Rayo, Agust n & Uzquiano, Gabriel (Eds.), Absolute Generality, pp. 1{19. Oxford University Press, Oxford, 2006a.

Rayo, Agust n & Uzquiano, Gabriel (Eds.). Absolute Generality. Oxford University Press, Oxford, 2006b.

Reinhardt, William. Some remarks on extending and interpreting theories with a partial predicate for truth. Journal of Philosophical Logic, 15:219{251, 1986.

Resnik, Michael. Mathematics as a Science of Patterns. Clarendon Press, Oxford, 1997.

Restall, Greg. An Introduction to Substructural Logics. Routledge, Londres, 2000.

Ripley, David. Paradoxes and Failures of Cut. Australasian Journal of Philosophy, 91: 139{164, 2012a.

Ripley, David. Conservatively extending classical logic with transparent truth. Review of Symbolic Logic, 5:354{378, 2012b.

Rosenblatt, Lucas & Pailos, Federico. Paracompletitud So sticada. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), La Logica de la Verdad, cap. 4. Eudeba, 2014.

Russell, Bertrand. The Principles of Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1903.

Russell, Bertrand. Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. American Journal of Mathematics, 30:222{262, 1908.

Russell, Bertrand & Whitehead, Alfred N. Principia Mathematica. Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

Ryle, Gilbert. `About'. Analysis, 1:10{12, 1933a.

Ryle, Gilbert. Imaginary Objects. Proceedings of the Aristotelian Society, volumen suplementario 12:18{43, 1933b.

Schindler, Thomas. Axioms for grounded truth. Review of Symbolic Logic, 7:73{83, 2014a.

Schindler, Thomas. A disquotational theory of truth as strong as Z_2 . Journal of Philosophical Logic, p. 18, 2014b. doi: 10.1007/s10992-014-9327-5.

Shapiro, Stewart. Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic. Oxford University Press, Nueva York, 1991.

Shapiro, Stewart. Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. Oxford University Press, Nueva York, 1997.

Shapiro, Stewart. Proof and Truth: Through Thick and Thin. Journal of Philosophy, 95:493{521, 1998.

Shapiro, Stewart. The Guru, the Logician and the De ationist: Truth and Logical Consequence. Nous, 37:113{132, 2003.

Simpson, Stephen G. Subsystems of Second Order Arithmetic. Cambridge University Press, Cambridge, segunda edicion, 2009.

Smith, Peter. An Introduction to G•odel's Theorems. Cambridge University Press, Cam-bridge, 2007.

Smorinsky, Craig. Self-Reference and Modal Logic. Springer-Verlag, Nueva York, 1985.

Soames, Scott. Understanding Truth. Oxford University Press, Nueva York/Oxford, 1999.

Sorensen, Roy A. Yablo's Paradox and kindred in nite liars. Mind, 107:137{155, 1998.

Strawson, Peter F. Truth. Analysis, 9:83{97, 1949.

Tajer, Diego. Dialete smo: una teor a contradictoria de la verdad. En Barrio, Eduardo A. (Ed.), La Logica de la Verdad, cap. 5, pp. 249{292. Eudeba, Buenos Aires, 2014.

Tarski, Alfred. Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Wydzial III Nauk Matematyczno-Fizycznych, 34, 1933. Traducido al ingles como `The concept of truth in the languages of the deductive sciences' y expandido en ?, pp. 152-278.

Tarski, Alfred. The Semantic Conception of Truth: and the Foundations of Semantics. Philosophy and Phenomenological Research, 4:341{376, 1944.

Tarski, Alfred. Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathe-matics. En Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass. 1950, volumen 1, pp. 705{720, Providence, 1952. American Mathatematical Society.

Tarski, Alfred & Vaught, Robert L. Arithmetical extensions of relational systems. Compositio Mathematica, 13:81{102, 1956.

Tarski, Alfred, Mostowski, Andrzej & Robinson, Raphael M. Undecidable theories. North Holland, Amsterdam, 1953.

Teijeiro, Paula & Szmuc, Damian. Teor a de Puntos Fijos de Kripke. En Barrio, Eduar-do A. (Ed.), La Logica de la Verdad, cap. 2, pp. 73{114. Eudeba, 2014.

Urbaniak, Rafal. Leitgeb, \About," Yablo. Logique et Analyse, 207:239{254, 2009.

Uzquiano, Gabriel. Plural Quanti cation and Classes. Philosophia Mathematica, 11: 67{81, 2003.

van Heijenoort, Jean (Ed.). From Frege to G•odel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879{1931. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

van Rooij, Robert. Vagueness, tolerance and non-transitive entailment. En Cintula, Petr, Ferm•uller, Christian, Godo, Llu s & Hajek, Petr (Eds.), Reasoning Under Vagueness: Logical, Philosophical, and Linguistic Perspectives, pp. 205{223. College Publications, Londres, 2011.

Visser, Albert. Semantics and the liar paradox. En Gabbay, Dov M. & G•unthner, Franz (Eds.), Handbook of Philosophical Logic, volumen IV, pp. 617{706. Reidel, Dordrecht, 1989.

Weir, Alan. Na•ve truth and sophisticated logic. En Beall, J.C. & Armour-Garb, Bradley (Eds.), De ationism and Paradox, pp. 218{249. Oxford University Press, Oxford, 2005.

Welch, Philip. The Complexity of the Dependence Operator, 2014.

Williams, Michael. Epistemological Realism and the Basis of Skepticism. Mind, 97: 415{439, 1988.

Yablo, Stephen. Grounding, Dependence, and Paradox. Journal of Philosophical Logic, 11:117{137, 1982.

Yablo, Stephen. Truth and re exion. Journal of Philosphical Logic, 14:297{349, 1985.

Yablo, Stephen. Paradox without Self-Reference. Analysis, 53:251{252, 1993.

Yablo, Stephen. Circularity and Paradox. En Bolander, Thomas, Hendricks, Vincent F. & Pedersen, Stig A. (Eds.), Self-Reference, pp. 139{157. CSLI Publications, Stanford, 2004.

Yablo, Stephen. Aboutness. Princeton University Press, Princeton, 2014.

Zardini, Elia. Truth Without Contra(di)ction. Review of Symbolic Logic, 4:498{535, 2011.

Indice alfabetico