G

Acerca de la lógica del cambio de teorías

Dos modelos para funciones de revisión de creencias

Autor:
Arló Costa, Horacio Luis

Tutor:

1988

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título Licenciatura de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires en Filosofía

Grado

ACERCA DE LA LOGICA DEL CAMBIO DE TEORIAS: DOS MODELOS PARA FUNCIONES DE REVISION DE CREENCIAS

(Tesis de Licenciatura)

Director: Carlos E. Alchourrón

Alumno: Horacio Luis Arló Costa

L.U.: 1013/81

TESIS 1-1-22

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo central de este trabajo consiste en investigar algunas de las propiedad de una función utilizada en lógica epistémica: la función de revisión de creencias.

De una manera general entendemos por revisión el resultado del mínimo ca que es necesario hacer en un cierto estado de creencias de manera de aceptar una ciert creencia cuya negación fué aceptada antes, consiguiendo que el nuevo estado de creencias sea consistente.

En particular nos interesará estudiar las propiedades de una especial noción de revisión de creencias: la utilizada por Peter Gärdenfors para generar una semántica epistemica de la lógica condicional VC de David Lewis.

Una de las ideas centrales para desarrollar esta semántica consistía en vincular la noción de revisión con el test de Ramsey para la aceptación de condicionales en un conjunto de creencias. Según el test de Ramsey, $A > B$ es aceptado en un conjunto de creencias K, si y sólo si, B pertenece al resultado del mínimo cambio hecho en K; necesario para aceptar A en K, lo que utilizando la función de revisión puede reformularse como $A > B$ pertenece a K SII B pertenece a K revisado con A.

Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors y David Makinson en varios trabajos posteriores centraran su interés, no en la construcción de la semántica epistémica, sino en caracterizar de una manera general la propia noción de revisión utilizada para construírla. Pet Gärdenfors, en especial, axiomatizó una tal noción de revisión de creencias.

Pronto se observó que estos axiomas correspondientes a una revisión "intuitiva" -qu aquí llamaremos "clásica"- no coincidían exactamente con las utilizadas por Gärdenfors para construir una semántica epistémica de los condicionales.

La nueva noción de revisión, a su vez, puede probarse, no es reductible a la clásica, ya que varios de los axiomas de una y otra axiomatización son inconsistentes entre sí.

Se tratará en este trabajo de comprender algunas propiedades sorprendentes de la nueva noción de revisión, especialmente una propiedad "holística" de esta noción de revisión consistente en que la revisión de un cierto conjunto incluyente de otro determina el resultado de la revisión del conjunto incluido (esto puede expresarse de otra manera de la siguiente forma: la noción clásica de revisión no cumple la propiedad de monotonía -si un conjunto está incluido en otro, la revisión del conjunto incluido está incluida en la revisión del conjunto incluyente- mientras que la nueva función de revisión sí cumple la propiedad de monotonía).

Ambas nociones de revisión se compararán de manera indirecta comparando modelos de ambas en mundos posibles.

En la sección I se expondrán conceptos generales acerca de las nociones más comunes de cambio racional de creencias: expansión, contracción, y revisión. Se expondrán asimismo los axiomas "clásicos" propuestos por Gärdenfors para las funciones de contracción y revisión y un teorema de representación propuesto para la función de revisión.

En la sección II se expondrá y probará un teorema de representación propuesto por Adam Grove para la función de revisión usando un sistema de esferas similar al usado por David Lewis para construir una semántica de contrafácticos.

En la sección III expondremos el trabajo de Peter Gärdenfors en el cual construye una semántica epistémica para la lógica de VC de David Lewis. Asimismo se expondrá un modelo de creencias "derivado" del de Lewis para el modelo de creencias utilizado en la semántica epistémica de los contrafácticos.

En la sección IV comenzaremos una comparación de los dos conceptos de revisión: el clásico y el usado para los contrafácticos. Se analizarán las relaciones entre los axiomas que caracterizan a una y otra noción. Se mostrarán asimismo algunos teoremas que muestran la inconsistencia entre postulados de una y otra función de revisión. Asimismo se verá que los resultados de inconsistencia se mantienen ante cambios del test de Ramsey.

También se ofrecerá un teorema de inconsistencia para la función de contracción

En la sección V se aplicará el tipo de demostración usado para dar un teorem de inconsistencia para la contracción, a la demostración de otro teorema de inconsiste para la revisión.

En la misma sección se trata de dar una expresión formal (en la Observación ...) a la propiedad "holística" que comentamos antes, así como una explicación de esta y otras propiedades un tanto perplejizantes de la nueva noción de revisión, en base a la comparación de las propiedades del modelo derivado del de Lewis, con el modelo de Grove para la revisión standard.

I. NOCIONES GENERALES ACERCA DEL CAMBIO RACIONAL DE CREENCIAS

1. INTRODUCCION

1.1.

La lógica del cambio racional de creencias se ocupa de modelizar los procesos de cambio de creencias que ocurren en un individuo racional.

Estos cambios de creencia son pensados en la lógica de creencias como los diferentes tipos de modificaciones, que ocurren en los estados de creencias del sujeto en cuestión ante los distintos inputs epistémicos que recibe o los outputs que produce.

Por estado de creencias entendemos aquí alguna representación elegida del estado cognitivo (actual o posible) de un sujeto en un cierto instante.

La teoría que expondremos (desarrollada en una serie de papeles por: Carlos E. Alchourron, David Makinson y Peter Gärdenfors) representa los estados de creencias de un individuo, por conjuntos de sentencias que este individuo acepta. A su vez, y en virtud de que se analizan los cambios de creencias en un individuo racional, se pedirá que estos conjuntos de creencias del individuo en cuestión, contengan además las consecuencias lógicas de las sentencias aceptadas.(1)

Sin duda este último criterio es razonable en tanto ideal de racionalidad, aunque parece poco sensato pedir clausura lógica para los correspondientes estados de creencias modelizados. El punto es que los estados epistémicos no deben pensarse aquí como entidades psicológicas sino como idealizaciones racionales de estados cognitivos. Esto no significa, sin embargo, que el individuo cuyos estados de creencias se representan sea omnisciente. En efecto, los conjuntos modelo elegidos (BS en la literatura) no tienen por qué ser maximales en el sentido, de que para una sentencia A dada cualesquiera y un cierto BS, B, o bien A pertenece a B, o bien la negación de A pertenece a B.

Ahora bien, dado que los BS son lo que técnicamente los lógicos llaman una teoría, la lógica del cambio racional de creencias que exponemos puede ser vista además como una teoría del cambio racional de teorías. En lo que sigue, de hecho, suele usarse el término teoría para hacer referencia a los estados cognitivos modelizados, (aunque "teoría" puede sustituirse por "BS" donde aparezca el término teoría.).

Con el objeto de caracterizar con más precisión el concepto de teoría, introduciremos una operación de consecuencia (Cn). Una operación de consecuencia es cualquier operación Cn de conjuntos de sentencias a conjuntos de sentencias, tal que satisface las siguientes condiciones para cualquier conjunto de sentencias A.

C1- $A \subseteq Cn(A)$ (inclusión)

C2- $Cn(Cn(A)) = Cn(A)$ (iteración)

C3- Si $A \subseteq B$ entonces, $Cn(A) \subseteq Cn(B)$ (monotonía)

C4- Si $x \in Cn(A)$ entonces, hay un $B \subseteq A$ tal que B es finito y $x \in Cn(B)$ (comcidad)

C5- $(x \supset y) \in Cn(A)$ sii $y \in Cn(A \cup \{x\})$

C6- Existe una sentencia $x \in S$, tal que $Cn(\{x\}) = S$.(2)

Una teoría, entonces será cualquier conjunto de sentencias X, tal que o bien $X = Cn(X)$, o bien $X = Cn(Y)$ para algún conjunto de sentencias Y (al que llamaremos '[illegible]e de X).

1.2 Cambios de creencias

Las tres formas más sencillas y mejor exploradas de cambio racional de creencias, son lo que aquí llamaremos expansión, contracción y revisión.

Por expansión de un estado de creencias dado entendemos el proceso por el cual una cierta creencia se añade al conjunto de creencias que constituye ese estado.

Por contracción en cambio, entendemos el cambio de creencias que consiste en dejar de aceptar alguna creencia que fue aceptada en un anterior estado de creencias.

Finalmente, por revisión entendemos el resultado del mínimo cambio que es necesario hacer en un cierto estado de creencias de manera de aceptar una cierta creencia cuya negación fue aceptada antes, consiguiendo que el nuevo estado de creencias sea consistente.

Para el modelo elegido de estado cognitivo, el resultado de expandir con una proposición x a un cierto estado de creencias representado por la teoría Cn (A) estará representado a su vez por el conjunto de consecuencias lógicas resultantes de añadir conjuntísticamente x a Cn (A), o sea Cn $(Cn (A) \cup \{x\})$.

El proceso de expansión presenta, entonces, dos propiedades interesantes: 1) par una cierta teoría Cn (A) y una cierta proposición x, el resultado de la expansión de .. teoría por el agregado de x, arroja un resultado único (si se usa "$\dot{+}$" como signo de expansión, puede definirse Cn $(A) \dot{+} x = Cn (Cn (A) \cup \{x\})$). 2) la expansión que resulta de agregar x a la base de una cierta teoría arroja el mismo resultado que la que resulta de agregar x a la teoría entera. En efecto puede probarse (teniendo, en cuenta Ci-C6) que: $Cn (A \cup \{x\}) = Cn (Cn (A) \cup \{x\})$

Paralelamente la noción de contracción consistirá en eliminar de una cierta teoría dada tanto una proposición x, como cualquier conjunto de sentencias que implique a x.

Desdichadamente, no se verifican para la contracción análogos de las propiedades 1) y 2) de la expansión. Ni el resultado es único, ya que dada una teoría A hay más de un subconjunto de A que no implica una cierta proposición x (que se quiere extraer de A), ni tampoco es indiferente que la contracción se realice sobre la teoría entera o sobre su base.

Idéntico problema aparece con la revisión. Supongamos, para hacer intuitivo el problema, que una persona en un cierto instante cree que:

(1) No hay animales peligrosos en la calle Corrientes

y

(2) Las arañas pollito son animales peligrosos

En nuestra representación, el estado cognitivo del sujeto consistirá en un BF al que pertenecen las sentencias (1) y (2). También pertenecerá:

(3) No hay arañas pollito en la calle Corrientes

que se infiere de (1) y (2), ya que al BS. pertenecen todas la consecuencias lógicas de las sentencias aceptadas.

Supongamos también que el sujeto, en función de un súbito encuentro con una araña pollito en Corrientes y Paraná, se ve obligado a introducir la siguiente sentencia en su anterior BS (al que llamaremos BS_1)(3)

(4) Hay arañas pollito en la calle Corrientes

La introducción de (4) exigirá revisar BS_1 para evitar inconsistencias. Como se ve la revisión podría realizarse eliminando de BS_1 tanto la sentencia (1) como la (2) o ambas. La tercera posibilidad podría ser desechada, dado que cuando se revisa una teoría se pide que los cambios que restauran la consistencia deben ser mínimos. Aún así el resultado de la revisión no es único. Sólo introduciendo factores de índole pragmática podríamos hacer que este resultado sea único (por ejemplo introduciendo una relación que ordene las sentencias del BS de acuerdo a su peso epistémico).

En lo que sigue utilizaremos dos estrategias para representar formalmente los conceptos de contracción y revisión. En primer lugar se supondrá que para cualquier BS. A y cualquier sentencia x hay una única revisión, $A \dot{+} x$, y una única contracción $A \dot{-} x$, y se darán postulados que tanto las funciones de contracción como de revisión deberían satisfacer. En segundo lugar se construirán explícitamente funciones de contracción y revisión.

2. POSTULADOS

2.1. Contracción

La siguiente es una lista de postulados propuesta por Gärdenfors(4) para las funciones de contracción.

($\dot{-}$1) $A \dot{-} x$ es una teoría, si A es una teoría (clausura)

($\dot{-}$2) $A \dot{-} x \subseteq A$ (inclusión)

($\dot{-}$3) Si $x \notin Cn(A)$, entonces $A \dot{-} x = A$ (vacuidad)

($\dot{-}$4) Si $x \notin Cn(\phi)$, entonces $x \notin Cn(A\dot{-}x)$ (éxito)

($\dot{-}$5) Si $Cn(x) = Cn(y)$ entonces $A\dot{-}x = A\dot{-}y$ (preservación)

($\dot{-}$6) Si A es una teoría $A \subseteq Cn((A\dot{-}x) \cup \{x\})$ (recuperación)

($\dot{-}$1) simplemente pide que el producto de la contracción de una teoría sea a su vez también un BS.

($\dot{-}$2) refleja la idea de que, dado que $A\dot{-}x$ se forma solamente eliminando ciertas creencias de un BS, no pueden ocurrir nuevas creencias en el producto de la contracción.

($\dot{-}$3) simplemente indica el caso límite de que la creencia a eliminar no pertenece al BS en cuestión. En ese caso el resultado de la contracción es A mismo.

($\dot{-}$4) indica que la contracción es exitosa, o sea que la sentencia a contraer no es una consecuencia lógica de las creencias de $A\dot{-}x$, salvo que x sea lógicamente válida.

($\dot{-}$5) asevera que quitar una sentencia de un BS arroja el mismo resultado que quitar otra sentencia lógicamente equivalente a la primera.

($\dot{-}$6) llamado usualmente "recovery" expresa la idea de que cuando contraemos a una teoría (A) quitando una proposición x y luego expandimos agregando la misma proposición, se recupera la teoría de partida A.

Los postulados ($\dot{-}$1) - ($\dot{-}$6) reflejan la idea (cf. ($\dot{-}$6)) de que la pérdida de información cuando se efectúa una contracción debería ser tan pequeña como sea posible. Otra posibilidad sería pedir que $A\dot{-}x$ sea un subconjunto maximal de A tal que no implique x. En ese caso la noción correspondiente de contracción quedaría representada por los postulados ($\dot{-}$1), ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$4) y ($\dot{-}$5) más los siguientes postulados:

($\dot{-}$F) Si $y \in A$ & $y \notin A\dot{-}x$ entonces $y \rightarrow x \in Cn(A\dot{-}x)$

($\dot{-}$L) Si $x \in Cn(\phi)$, entonces $A \subseteq A\dot{-}x$

(($\dot{-}$6) puede derivarse de ($\dot{-}$F). A su vez ($\dot{-}$L) puede derivarse de ($\dot{-}$6), cuando A es una teoría, en caso contrario es necesario agregarlo).

2.2. Revisión

La noción de revisión puede ser definida en función de la de contracción recurriendo a la llamada identidad de Levi,

$$A\dot{+}x = Cn\ ((A\dot{-}\neg x) \cup \{x\})$$

Puede darse para la función de revisión la siguiente lista de postulados, muchos de los cuales tienen un claro correlato con los correspondientes para la contracción

($\dot{+}$1) $A\dot{+}x$ es una teoría

($\dot{+}$2) $x \in A\dot{+}x$

($\dot{+}$3) Si $\neg x \notin Cn(A)$, entonces $Cn(A \cup \{x\}) \subseteq A\dot{+}x$

($\dot{+}$4) Si $\neg x \notin Cn(\phi)$ entonces $A\dot{+}x$ es consistente

($\dot{+}$5) Si $Cn(x) = Cn(y)$ entonces $A\dot{+}x = A\dot{+}y$

($\dot{+}$6) $A\dot{+}x \subseteq Cn(A \cup \{x\})$

Algunas de las presentaciones usuales incluyen el postulado $(A\dot{+}x) \cap A = A\dot{-}\neg x$, si A es una teoría. ($\dot{+}$R)(5)

Consideramos aquí a ($\dot{+}$R) como un esquema para definir operaciones de contracción en función de operaciones de revisión (lo llamaremos identidad de Harper).

En el caso de que el conjunto de postulados hubiese sido seleccionado para representar una noción de revisión tal que $A\dot{+}x$ contenga un subconjunto maximal de A que no contradiga a x, bastará quitar de la lista de postulados dada ($\dot{+}$3) y sustituírlo por:

($\dot{+}$F) Si $y \in A$, entonces o bien $y \in A\dot{+}x$ o bien $-y \in A\dot{+}x$

Utilizando las identidades de Levi y Harper puede probarse que:

Teorema 1. Si la función de contracción "$\dot{-}$" satisface los postulados ($\dot{-}$1) a ($\dot{-}$6), entonces la función de revisión "$\dot{+}$" obtenida por la identidad de Levi satisface los postulados ($\dot{+}$1) a ($\dot{+}$6)

Teorema 2. Si la función de revisión "$\dot{+}$" satisface los postulados ($\dot{+}$1) a ($\dot{+}$6), entonces la función de contracción "$\dot{-}$" generada por la identidad de Harper, satisface ($\dot{-}$1) a ($\dot{-}$6).

Tanto para la revisión como para la contracción este conjunto de seis postulados

$A \dot{-} x = \gamma(A \perp x)$ si $x \notin Cn(\phi)$

$A \dot{-} x = A$ en caso contrario

Suele llamarse a estas funciones en la literatura maxichoice contractions functions (MCF)(6)

Otra estrategia posible para construir una función de contracción consiste en definir la contracción como el conjunto de proposiciones que tienen en común los maximales de $A \perp x$.

En ese caso se definirá:

$A \dot{-} x = \bigcap (A \perp x)$ si $A \perp x$ es no vacío

$A \dot{-} x = A$ en caso contrario.

Esta función recibe usualmente el nombre de full meet contraction (FMF)(7)

Finalmente una tercera idea consiste en considerar una función de selección γ' tal que en vez de seleccionar un elemento de $A \perp x$ seleccione una subclase $\gamma'(A \perp x) \subseteq A \perp x$, si $A \perp x$ es no vacía y directamente A en el caso límite en que $A \perp x$ es vacía. Entonces se define $A \dot{-} x = \bigcap \gamma' (A \perp x)$(8)

Esta función de contracción se denomina partial meet contraction (PMF). Como se ve tanto (MCF) como (FMF) son casos límites de (PMF): cuando $\gamma' (A \perp x)$ selecciona solamente un elemento de $A \perp x$ tenemos una (MCF) y cuando $\gamma' (A \perp x) = A \perp x$ tenemos una (FMF).(9)

Puede probarse un teorema de representación para la clase de operaciones que satisfacen los postulados básicos de la contracción.(10)

En efecto:

Teorema 3. Para todo BS. A, "$\dot{-}$" es una PMF si y sólo si "$\dot{-}$" satisface el conjunto básico de postulados para la contracción [($\dot{-}$1) a ($\dot{-}$6)].

No obstante, sin agregar algunas restricciones, no puede obtenerse un resultado análogo para la base extendida con ($\dot{-}$7) y ($\dot{-}$8). Una manera de introducir tales restricciones consiste en suponer que γ' sea relacional sobre A.

γ' es relacional sobre A sii hay una relación $\leqslant$ sobre 2^A tal que

$\gamma'(A \perp x) = \{B \varepsilon A \perp x / B' \leqslant B$ para todo $B' \varepsilon A \perp x\}$ Si $x \notin Cn(\phi)$

O sea que la función γ' elegirá los subconjuntos maximales más importantes epistémicamente de A. No se están suponiendo aquí propiedades especiales de $\leqslant$ salvo el que sea una relación binaria sobre 2^A Si además $\leqslant$ es transitiva, entonces la correspondiente función de selección γ' se dirá que es transitivamente relacional y su función de contracción asociada una PMF transitivamente relacional.

Puede probarse entonces el siguiente teorema de representación.(11)

Teorema 4. "$\dot{-}$" es una PMF transitivamente relacional sii "$\dot{-}$" satisface los postulados ($\dot{-}$1) a ($\dot{-}$8).

Este resultado muestra que para cualquier función de contracción definida sobre un BS. A que satisfaga ($\dot{-}$1) a ($\dot{-}$8) hay algún orden en los subconjuntos maximales de $A \perp x$.

Notas y Referencias

(1) Al modelizar los estados epistémicos por conjuntos de sentencias, se supone tácitamente que el objeto de las creencias de un sujeto son sentencias. Si, por el contrario, se considera a las creencias como creencias en proposiciones, los estados epistémicos pueden ser modelizados por conjuntos de mundos posibles. Véase: Harper, W.L.: "Rational conceptual change" (Philosophy of Science Association, 2, 462-494, 1977). Debe advertirse también que el modelo elegido permite expresar sólo tres tipos de actitudes epistémicas: la aceptación, el rechazo y el mantenimiento en suspenso de una cierta creencia. Otro tipo de modelos, como el probabilístico por ejemplo, permite representar grados de creencia de un individuo en sentencias o proposiciones. Véase: Ellis, Brian: "The logic of subjective probability" (British Journal for the Philosophy of Science 24, 125-52. 1973). En cuanto a la clausura lógica, no es imprescindible. Para un modelo que prescinde de ese criterio véase:

Forrest, Peter: "The dynamics of belief. A normative logic". (Basil Blackwell, Oxford, 1986, 3). Recientemente se han desarrollado modelos de estados cognitivos en el campo de la AI. Para una representación usando redes semânticas, vêase: Doyle, J: "A truth maintenance system" (Artificial Intelligence 12, 231-272, 1979).

(2) Con algunas modificaciones, este es el conjunto de axiomas para Cn dado por Tarsk en: Tarski, Alfred: "On some fundamental concepts of metamathematics", en Logic semantics and metamathematics (Hackett Publishing Company, Oxford, 1983, 30-38)

(3) Para una teoría como la que exponemos, el concepto de verdad no es imprescindible. En efecto, los conceptos centrales de la teoría pueden formularse con independencia de las relaciones entre los inputs epistémicos y el mundo externo. Desde ese punto de vista no interesa si la imagen de la araña fue producida por una alucinación o por un encuentro real. Sólo interesa que en función de la ocurrencia de alguna representación generada por algún proceso, el individuo agrega (4) a su BS.

(4) Alchourron, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David: "On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions" (The Journal of symbolic logic, volumen 50, 2, 513, 1985)

(5) Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David ((4), 513)

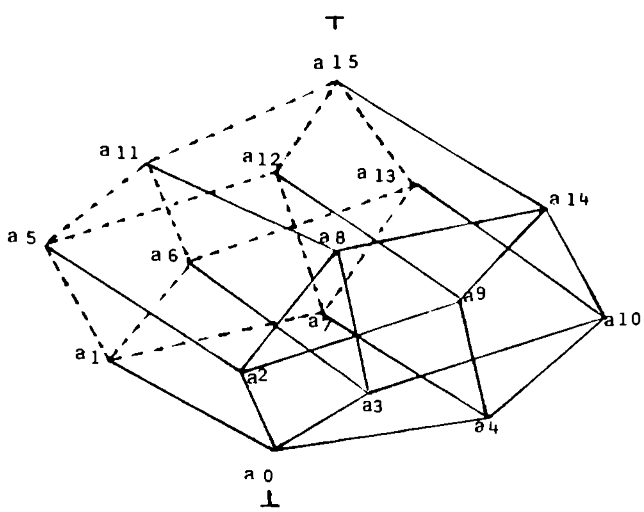
(6) Sobre algunas paradojas asociadas a las MCF, VER: Makinson, David: "How to give up: A survey of some formal aspects of the logic of theory change" (Synthese 62, 356-359, 1985)

(7) Sobre paradojas asociadas a FMF ver: Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David: "On the logic of theory change: contraction functions and their associated revision functions" (Theoria 48, 14-37, 1982)

(8) Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David ((4), 512)

(9) Supongamos un lenguaje L_2 en el que figuran sólo dos variables proposicionales p y q. Puede cocientarse L_2 por la relación <u>eq</u> definida como sigue: F <u>eq</u> G sii $\models F \leftrightarrow G$. Así a $L_{2\underline{eq}}$ (conjunto cociente asociado a $(L,\underline{eq})$) pertenecerán todas las clases de equivalencia correspondientes a <u>eq</u>. Puede probarse, en virtud del <u>teorema de Bychoski</u> que el álgebra de Boole asociada a $L_{2\underline{eq}}$ es isomorfa al álgebra de las partes del conjunto $V_{2\ \{0,1\}}$, donde $V_{2\ \{0,1\}}$ es el conjunto de las aplicaciones de $V_2 = \{p,q\}$ en $\{0,1\}$ de cardinal 2^2. Por lo tanto $L_{2\underline{eq}}$ contendrá 16 clases de equivalencia $(2^{(2^2)})$.

Gráficamente el álgebra $L_{2\underline{eq}}$ puede representarse por el siguiente diagrama de Hasse donde cada punto corresponde a una de las clases de equivalencia de $L_{2\underline{eq}}$.



------ la teoría generada por [a1].

Ahora bien, del álgebra de Boole asociada a $L_{2\underline{eq}}$ puede deducirse una relación de orden $\leqslant$, tal que si [F] y [G] son dos clases de equivalencia cualesquiera de $L_{2\underline{eq}}$ $[F] \leqslant [G]$ sii $\models F \rightarrow G$

En el diagrama esto se representa de la siguiente forma: si es posible transitar de [F] a [G] por un camino ascendente y contínuo, entonces $\models F \rightarrow G$. <u>Podemos visualizar entonces en el diagrama algunas de las nociones introducidas al definir las funciones.</u> Por ejemplo, para cualquier elemento $[a_i]$ del álgebra de 16 elementos, llamamos $[a_i]!$ (la teoría generada por $[a_i]$) al conjunto así definido:

$\{[a_i]! = [a_j]/[a_i] \lesssim [a_j]\}$

(o lo que es lo mismo, el conjunto de a_j tal que $\models a_i \rightarrow a_j$)

Entonces si A es el álgebra de 16 elementos:

$A \perp [a_i] = \{[a_j]!/[a_j]! \subset A$ y $[a_i] \notin [a_j]!$ y $([a_r]!)$ $\{$si $([a_j]! \subset [a_r]! \subseteq A$, entonces $[a_i] \in [a_r]!\}\}$

Así $A \perp a_1 = \{[a_2]!, [a_3]!, [a_4]!$ En efecto, $[a_2]$, $[a_3]$ y $[a_4]$ son elementos de A que generan teorías que no contienen a $[a_1]$. A su vez toda otra teoría en la que cualquiera de las teorías $[a_2]!$, $[a_3]!$, $[a_4]!$ esté incluída contiene a $[a_1]$. En este caso particular la única teoría en esas condiciones es la generada por $[a_0]$.

También puede definirse $A \perp [a_i]$ en función de la relación de orden $\lesssim$ deducida del álgebra de Boole de Lindenbaum.

$A \perp [a_i] = \{[a_j]!/[a_i] \notin [a_j]!$ y $[a_j]! \subset A$ y para toda teoría generada por un $[a_r]$, si

$[a_r] \lesssim [a_j]$ entonces $[a_i] \in [a_r]!\}$

Como se dijo antes, MCF y FMF pueden verse como casos límites de PMF. En efecto, supongamos que $[a_2]!$, $[a_3]!$, $[a_4]!$, tienen igual importancia epistémica, o sea si definimos $B \cong C$ sii $(B \leqslant C)$ & $(C \leqslant B)$; $[a_2]! \cong [a_3]! \cong [a_4]!$. En este caso $\gamma'(A \perp a_1) = A \perp a_1$ por lo que $\bigcap \gamma'(A \perp a_1) = [a_{14}] = \bigcap(A \perp a_1)$ es una FMF. Si, en cambio, $[a_2]! > [a_3]! > [a_4]!$, donde $(B < C)$ sii $(B \leqslant C)$ & $\neg$ $(C \leqslant B)$, entonces $\gamma'(A \perp [a_1]) = [a_2]!$. Dado que en este caso $\bigcap \gamma'(A \perp a_1) = [a_2]!$, ésta es una MCF, aquella exactamente para la que $\gamma[A \perp [a_1]] = [a_2]!$

El algebra de 16 elementos es usada en Observación 4.9 en: Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David ((4), 521). Para una prueba del teorema de Bychovski véase: Naishtat, Francisco, S.: Lógica para computación (EUDEBA, Buenos Aires, 1986, 99-159).

(10) Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter; Makinson, David ((4), 514, observación 2.5)

(11) Para el teorema de representación ver: Alchourrón, Carlos E.; Gärdenfors, Peter;

Makinson, David ((4), 520).

La relación definida sobre 2^A ordena subconjuntos maximales de A. Podría definirse una relación de importancia epistémica que ordene las sentencias de A. Los diferentes grados de importancia epistémica adjudicados a la sentencia de A por una relación tal no están conectados con las probabilidades que en un modelo probabilístico pueden adjudicarse a estas sentencias (cf. nota (1)). En efecto, las sentencias de A ordenadas de acuerdo a su importancia epistémica se consideran todas de probabilidad 1.

II. EL SISTEMA DE ESFERAS DE GROVE

En la sección anterior se mostró un teorema de representación para los axiomas dados por Gärdenfors para la función de revisión. En esta sección mostraremos un teorema de representación para la función de revisión usando un sistema de "esferas" que, en primera instancia parece muy similar al usado por Lewis al construir una semántica para los contrafácticos.

Nos detendremos especialmente en la demostración de los teoremas de Grove dada su pertinencia para algunos de los objetivos de este trabajo. En efecto, como veremos más adelante un sistema de revisión de creencias (o en la nomenclatura de Gärdenfors (1979) un modelo de creencias) que puede probarse satisface los postulados de la noción de revisión que nos interesa comparar con la ya caracterizada mediante los axiomas (+1) - (+6), puede modelizarse con un modelo "derivado" del de Lewis para los contrafácticos. De esta forma la noción de revisión caracterizada mediante los postulados (+1) - (+6), que de ahora en adelante llamaremos clásica, podrá compararse, a través de su modelo de Grove, con la revisión necesaria para generar una semántica de contrafácticos, a través de su modelo "derivado" del de Lewis. En otras palabras, más adelante compararemos dos nociones de revisión indirectamente comparando sus respectivos modelos en mundos posibles.

Por el momento nos limitaremos a exponer el modelo y teorema de representación de Grove aunque adelantaremos algunas perplejidades que la sola existencia del teorema de representación despierta. En efecto, la noción de revisión que expondremos más adelante y que trataremos de investigar aquí está construída para generar una semántica para la "axiomatización oficial" de la lógica de contrafácticos expuesta por David Lewis: el sistema VC. Como se verá, también más adelante, la noción de revisión clásica y la que usará para generar una semántica epistémica de VC, alternativa de la de Lewis, no son reductibles una a otra ya que varios de sus axiomas son inconsistentes entre sí. Sin embargo Grove demuestra en este teorema que expondremos más abajo que la revisión clásica es representable en un sistema de esferas muy similar al de Lewis. En la parte final de este trabajo analizaremos con algún detalle las particularidades del sistema de Grove, así como sus semejanzas y diferencias con el modelo derivado de Lewis para la revisión usada en el análisis de los contrafácticos y el propio sistema de Lewis.

Desdichadamente no hay una uniformidad notacional en los diferentes desarrollos sobre el tema que tratamos. En lo que sigue se expondrán los trabajos preferentemente en la notación en que fueron escritos, con modificaciones que se aclararán en cada caso, así como las equivalencias que permitan pasar de una notación a otra. Adoptaremos a partir de ahora una única uniformidad notacional, consistente en una exposición finitista, al estilo de Gentzen de los axiomas para la revisión, en lugar de la usada en la primera sección que siguió el estilo Tarski. Por lo tanto reformularemos en lo que sigue los axiomas de revisión y contracción (así como algunos para la expansión) en el estilo Gentzen. Estos axiomas serán a partir de ahora citados en la forma en que los expondremos aquí.

Axiomas clásicos para la función de revisión

(K^*_2) $A \in K^*_A$

(K^*_3) $K^*_A \subseteq K^+_A$

(K^*_4) Si $-A \notin K$, entonces $K^+_A \subseteq K^*_A$

(K^*_5) Si $\nvdash -A$, entonces K^*_A es consistente

(K^*_6) Si $\vdash A \leftrightarrow B$, entonces $K^*_A = K^*_B$

(K^*_7) $K^*_{A \,\&\, B} \subseteq (K^*_A)^+_B$

(K^*_8) Si $-B \notin K^*_A$, entonces $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \,\&\, B}$

Axiomas (clásicos) para la función de contracción

(K^-_2) $K^-_A \subseteq K$ (inclusión)

(K_3^-) Si $A \notin K$, entonces $K_A^- = K$

(K_4^-) Si $\not\vdash A$, entonces $A \notin K_A^-$

(K_5^-) Si $A \in K$, entonces $K \subseteq (K_A^-)_A^+$

(K_6^-) Si $\vdash A \leftrightarrow B$, entonces $K_A^- = K_B^-$

(K_7^-) $K_A^- \cap K_B^- \subseteq K_{A \& B}^-$

(K_8^-) Si $A \notin K_{A \& B}^-$, entonces $K_{A \& B}^- \subseteq K_A^-$

Axiomas para la función de expansión

(K+1) K_A^+ es un conjunto de creencias.

(K+2) $A \in K_A^+$

(K+3) $K \subseteq K_A^+$

(K+4) Si $A \in K$, entonces $K_A^+ = K$

(K+5) Si $K \subseteq H$, entonces $K_A^+ \subseteq H_A^+$

(K+6) Para todos los conjuntos de creencias K, y todos los enunciados A, K_A^+ es el más pequeño conjunto de creencias que satisface (+1) - (K+5).

Haremos en primer lugar algunas aclaraciones terminológicas y de carácter general.

Supondremos que L es el conjunto de tesis lógicas de alguna lógica. Se requiere asimismo que el lenguaje sobre el que L ha sido construída contenga al menos un conjunto completo de conectivas Booleanas (L contendrá las tautologías proposicionales y estará cerrado bajo Modus Ponens). Llamaremos F al conjunto de todos los enunciados del lenguaje.

Una teoría T será cualquier conjunto T, tal que $L \subseteq T \subseteq F$, cerrado bajo Modus Ponens (MP. de aquí en adelante). Si llamamos TD. al conjunto de todas las teorías, entonces para cualquier T $\in$ TD. Con (T) -o sea T es consistente- siempre que T sea distinto de F.

La expansión de un conjunto con un enunciado se nota aquí como T/A, si el conjunto es T, y la sentencia A. La expansión se define aquí como es usual:

$T/A = Cn\ (T \cup \{A\}) = \{B: A \rightarrow B \in T\}$

Llamaremos M_L al conjunto de todas las extensiones maximales consistentes de L. Entonces para toda teoría T sobre L, podemos definir /T/, como:

(Def. /T/) $\quad /T/ = (M \in M_L : T \subseteq M)$

Dada una teoría T, entonces, /T/ consiste en el conjunto de los maximales de M_L en los que está incluída T. Dado que estos maximales son el conjunto de mundos posibles describibles en L, esto es otra forma de decir que /T/ es el conjunto de mundos posibles en que T está incluída.

La idea de Grove es que dado que, como veremos, una teoría T puede ser representada por su /T/ correspondiente, trabajar directamente con estos /T/ al construir modelos para las funciones de revisión. Veamos más detalladamente las características de la correspondencia entre teorías y conjuntos de maximales. Antes expondremos un caso límite, que usaremos abundantemente después:

$/K_\perp / = \emptyset$

donde $K_\perp$ es el conjunto inconsistente (o una teoría inconsistente cualquiera).

Simetricamente a lo que vimos más arriba, para todo subconjunto de maximales S de M_L, llamaremos t(S) al conjunto de fórmulas incluídas en todos los maximales de S. En otras palabras:

$t(S) = \bigcap\ (x \in S)$

También aquí habrá un caso límite. El caso en que $S = \emptyset$. Entonces se define $t(S) = K_\perp$.

Como decíamos más arriba hay una correspondencia entre teorías y subconjuntos del conjunto M_L de maximales. Veremos algunas de las propiedades de esa correspondencia.

<u>Propiedades de la correspondencia entre teorías y subconjuntos de</u> M_L

(1) $\quad t(/T/) = T$

(2) Con (t(S)) SII $S \neq \emptyset$

(3) Para toda sentencia $A \varepsilon F$ y $S \subseteq M_L$, $t(S \cap /A/) = t(S)/A$.

<u>Prueba de</u> (3).

hip. 1) $B \varepsilon t(S) / A$

2) $A \rightarrow B \varepsilon t(S)$

3) $A \rightarrow B \varepsilon x, \forall x \varepsilon S$

4) $A \varepsilon x, \forall x \varepsilon [S \cap /A/]$

5) $B \varepsilon x, \forall x \varepsilon [S \cap /A/]$ por MP. (3), (4)

6) $B \varepsilon t (S \cap /A/]$

hip. 1) $B \varepsilon x, \forall x \varepsilon [S \cap /A/]$

2) $A \rightarrow B \varepsilon x, \forall x \varepsilon [S \cap /A/]$

3) Consideremos ahora S- /A/. Para los maximales $w \varepsilon (S - /A/)$, se da por maximalidad que $-A \varepsilon w$, por lo que $A \rightarrow B \varepsilon w$, $\forall w \varepsilon (S - /A/)$, y por lo tanto $A \rightarrow B \varepsilon x, \forall x \varepsilon S$, que era lo que buscábamos.

---

4) Para S, $S' \subseteq M_L$, si $S \subseteq S'$, entonces $t(S') \subseteq t(S)$.

5) Para T, $T' \varepsilon$ TD. si $T \subseteq T'$, entonces $/T'/ \subseteq /T/$

Describiremos ahora el sistema de esferas propuesto por Grove.

<u>Sistema de esferas</u>

Sea S cualquier colección de subconjuntos de M_L. Llamaremos a S un sistema de esferas centrada en X, para algún subconjunto $X \subseteq M_L$, si satisface las siguientes condiciones:

(S1) S está totalmente ordenada por $\subseteq$, si U, $V \varepsilon$ S, entonces $U \subseteq V$, ó $V \subseteq U$.

(S2) X es el $\subseteq$-mínimo de S, esto es, $X \varepsilon S$, y si $U \varepsilon S$, entonces $X \subseteq U$.

(S3) M_L está en S, y es el más grande elemento de S

(S4) Si $A \varepsilon F$ y hay una esfera en S que corta /A/, entonces hay una esfera más pequeña en S que corta /A/.

Mencionaremos aquí algunas obvias diferencias entre el sistema expuesto y el usado por Lewis para construir una semántica de los condicionales contrafácticos.

En primer lugar Lewis requiere que su sistema sea un sistema cerrado para la unión e intersección de conjuntos. Esta, sin embargo, no es una diferencia muy importante. El otro punto, que veremos después sí es muy importante, es que el sistema de esferas de Lewis está centrado en mundos posibles individuales y no en conjuntos de ellos. Por ahora no mencionaremos más detalles de la comparación con el sistema de Lewis, los que serán retomados en la sección V. II.

Ahora, con la ayuda del sistema de esferas que hemos definido, podemos introducir la función f_S. Lo haremos de la siguiente manera: recordemos que la condición (S4) asegura que si /A/ corta alguna esfera en S, entonces hay alguna esfera en S, que llamaremos c(A), que corta /A/ y tiene la propiedad de ser más pequeña que cualquier otra esfera que intersecte a /A/. Por otro lado, en el caso en que /A/ no corte ninguna esfera- y esto por la condición (S3) sólo puede ocurrir si /A/ = $\emptyset$ - se tomará c (A) = M_L. Teniendo esto en cuenta podremos asociar con cualquier sistema de esferas S una función f_S, de F a subconjuntos de M_L, definida del siguiente modo:

f_S (A) = /A/ $\cap$ c (A)

Como lo muestra el esquema, la idea detrás de f_S de Grove consiste en seleccionar los mundos más cercanos a X en los que es verdadera A, en el caso de que consideremos un sistema de esferas S centrado en un subconjunto X de M_L. (ver, fig. Nº 3 y 4).

En cuanto a la revisión de una teoría K cualquiera con una sentencia A, la idea de Grove es representarla por el conjunto f_S(A) de mundos. Esto se probará en los dos siguientes teoremas de representación.

Teorema I

Sea S un sistema de esferas en M_L centrado en /T/ para alguna teoría T. Si se define para cualquier enunciado A en F, T + A = t (f_S(A)), la función de revisión definida de esta manera satisface los axiomas (K_2^*) - (K_8^*).

Prueba de Teorema I.

Se verificará axioma por axioma.

(K_2^*)

Habrá que probar que $A \varepsilon T + A$. Introduzcamos la definición de $T + A$:

$T + A = t\ (/A/ \cap c\ (A))$, pero entonces por la propiedad (3) de la correspondencia entre teorías y subconjuntos de M_L, que ya hemos probado:

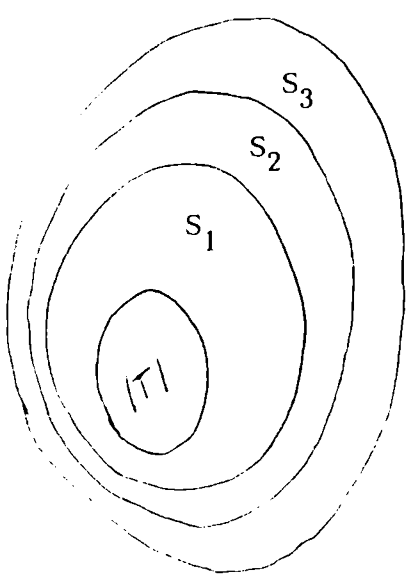


Fig. 2

Sistema de esferas para una T cualquiera

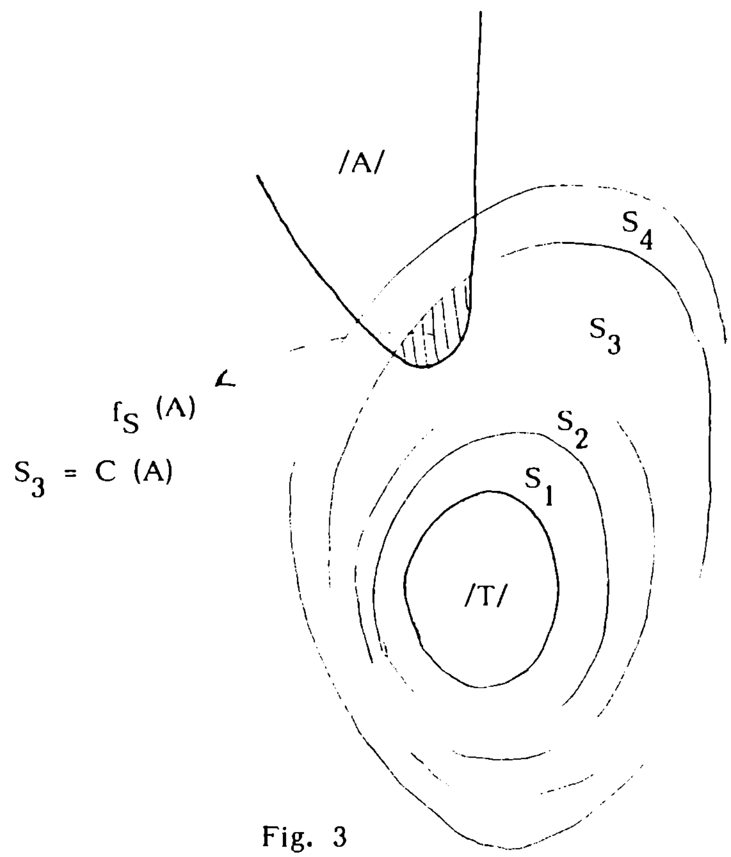


Fig. 3

Mundos que selecciona f_S para una T cualquiera centrada en /T/.

$T + A = t(c(A))\ /\ A$

y por la condición (K_2^+) que puede traducirse en la notación de Grove como $A\ \varepsilon\ K/A$, se sigue que $A\ \varepsilon\ t(c\ (A))\ /\ A$, por lo que $A\ \varepsilon\ T + A$.

(K_3^*) y (K_4^*)

En el lenguaje de Grove ambas condiciones se formulan:

Si $-A \notin T$, entonces $T+A = T/A$.

Si $-A \notin T$, entonces Con $(T \cup \{A\})$, por tanto $/T/ \cap /A/ \neq \emptyset$. Dado que para la teoría T, /T/ es la más pequeña esfera en el sistema de esferas S, c(A) = /T/, y dado que t(/T/) = T, por la propiedad (1) de la correspondencia de teorías y subconjuntos de M_L, y la propiedad (3) de la misma correspondencia:

$T + A = (c\ (A) \cap /A/) = t(/T/ \cap /A/) = t(/T/)/A = T/A.$

(K_5^*)

Si $-A \notin L$, $T + A$ es consistente.

Si $-A \notin L$, entonces $/A/ \neq \emptyset$, ya que A no es una contradicción, pero entonces hay al menos una esfera que corta a /A/ y hay también una esfera más pequeña que lo haga: c(A). Por tanto $/A/ \cap c(A) \neq \emptyset$. ~~Esto implica que $/T + A/ \neq \emptyset$ y, por tanto, dado que por la condición (2) de la correspondencia entre teorías y subconjuntos de M_L, Con (t(S)) SII $S \neq \emptyset$, Con (t(/T + A) SII $/T + A/ \neq \emptyset$. Por tanto Con (t(/T + A/) que por la condición (1) de la correspondencia, Con (T + A).~~

(K_6^*)

Si $A \leftrightarrow B \in L$, entonces para todo x en M_L, $A \in x$ SII $B \in x$, por lo que $T + A = T + B$.

(K_7^*)

$T + (A \,\&\, B) \subseteq (T + A)/B$

Dado que $\vdash A \,\&\, B \rightarrow A$, $/A \,\&\, B/ = /A/ \cap /B/$, y por lo tanto $/A/ \cap /B/ \subseteq /A/$. Por tanto cualquier esfera que corte /A & B/ corta /A/. En particular:

a) $c(A) \subseteq c(A \,\&\, B)$

b) $/B/ \cap (/A/ \cap c(A)) \subseteq /A \,\&\, B/ \cap c(A \,\&\, B)$

c) $/B/ \cap f_S(A) \subseteq /A \,\&\, B/ \cap c(A \,\&\, B)$

d) $t(/A \,\&\, B / \cap c(A \,\&\, B)) \subseteq T(/B/ \cap f_S(A))$ por condición ((4) de la correspondencia.

e) $T + (A \,\&\, B) \subseteq (T + A)\, /B$. por (3) de la correspondencia.

(K_8^*)

Si $-B \notin T + A$, entonces $(T + A)\, /B \subseteq T + (A \,\&\, B)$

Si $-B \notin T + A$, entonces $/B/ \cap /A/ \cap c(A) \neq \emptyset$. Pero entonces $/A \,\&\, B/ \cap c(A) \neq \emptyset$, por lo que $c(A \,\&\, B) \subseteq c(A)$. Con argumentación similar a la usada para la prueba de (K_8^*): $(T + A)/B \subseteq T + (A \,\&\, B)$.

Teorema II

Sea "+": TD. X F $\rightarrow$ T.D. una función que satisface (K_2^*) - (K_8^*). Entonces para una dada teoría T hay un sistema de esferas en M_L, S, centrado en /T/ y que satisface $T + A = t(f_S(A))$, para todo A en F.

Prueba Teorema II

Sea S' la clase de subconjuntos no vacíos U de M_L, tal que satisfacen:

(1) $\forall\, u \in U$, $\exists\, A \in F$: $u \in /T + A/$

(2) Si $/A/ \cap U \neq \emptyset$, para cualquier sentencia A de F, entonces $/T + A/ \subseteq U$.

O sea, (1) afirma que para cada uno de los mundos u de uno de los subconjuntos U de M_L, hay un A del lenguaje, tal que u pertenece al conjunto de maximales que cubren a la revisión de una teoría T con el enunciado A. La condición (2) en cambio, afirma una condición más familiar, dado algún enunciado A del lenguaje, si el conjunto de maximales que cubren A corta algún U, entonces el conjunto de maximales en que está incluída la revisión de una teoría T con A, está incluída en U.

Daremos un par de condiciones más:

Si Con (T), entonces $S = S' \cup [M_L]$, y

Si no se da que Con (T), entonces $S = S' \cup (M_L, \emptyset)$.

Mostraremos ahora que S es un sistema de esferas centrado en /T/. Para ello verificaremos las condiciones (S1) - (S4) una a una.

S1

Demostraremos el punto por el absurdo, o sea habrá que extraer una contradicción de: $U, V \in S$, tales que ni $U \subseteq V$, ni $V \subseteq U$.

De la sección anterior se desprende que ni U, ni $V = \emptyset$. Elijamos, entonces a y b en M_L tales que:

$a \in U$, $b \in V$

$b \notin U$, $a \notin V$.

Ahora bien, por las condiciones (1) y (2) de definición de los S' dadas, más arriba, pueden elegirse dos enunciados A y B tales que:

$a \in /T + A/ \subseteq U$

$b \in /T + B/ \subseteq V$

En efecto, en el primer caso, por ejemplo, por la (1) puede elegirse un A, tal que el mundo a pertenezca a /T + A/. A su vez esto garantiza que U corta a /A/ y, por condición (2): $/T + A/ \subseteq U$.

Considérese ahora A v B (con $-(A \vee B) \notin L$). Entonces por (K^*_5) - que aquí expresamos como T + A es consistente si $-A \notin L$ -: Con(T + (A v B)). Considérese entonces cualquier $x \in /T + (A \vee B)/$. Dado que por (K^*_2) $[A \vee B] \in [T + (A \vee B)]$ entonces A v B pertenecerá a todos los maximales de L cuya intersección son los enunciados de T + (A v B), por lo que $A \vee B \in x$, que es uno de esos maximales. Por maximalidad y consistencia uno de los A ó B pertenecerá a x.

Supongamos que se trata de A, o sea $A \in x$. Por la Con (T + A v B)), que se probó más arriba, $-A \notin (T + (A \vee B))$. Utilizando una instancia de (K^*_8) puede afirmarse que:

Si $-A \notin (T + (A \vee B)$, entonces $(T + (A \vee B))/A \subseteq T + (A \vee B) \ \&\ A$, pero como $(A \vee B) \ \&\ A \leftrightarrow A$, por ($K^*_5$), $T + ((A \vee B) \ \&\ A) = T + A$, por lo que

$(T + (A \vee B))/A \subseteq T + A$, y entonces por la condición (5) de la correspondencia entre teorías y subconjuntos de M_L:

$/T + A/ \subseteq /T + (A \vee B)/$

Si se cumple la condición anterior, entonces como:

$a \in /T + A/ \subseteq U$, entonces,

$a \in /T + (A \vee B)/$ Ahora bien, observamos que si se dan las condiciones anteriores entonces:

$/A \vee B/ \cap V \neq \emptyset$

En efecto, por un lado por hipótesis $b \in V$. Por otro $b \in /T + B/ \subseteq /B/$, o sea $b \in /B/$. Pero

$/A \vee B/ = /A/ \cup /B/$, y entonces

$b \in /A \vee B/$, que era lo que necesitábamos. Hemos probado, entonces que $/A \vee B/ \cap V \neq \emptyset$ ya que b se encuentra en ambos conjuntos, pero entonces por la condición (2):

Si $/A \vee B/ \cap V \neq \emptyset$, entonces

$/T + (A \vee B) \subseteq V$, y como antes se probó que:

$a \in /T + (A \vee B)/$, entonces $a \in V$, contra lo asumido respecto de a (o sea que $a \in U$, pero $a \notin V$).

<u>S2</u>

La idea aquí es que dado un U cualquiera perteneciente a S, suponiendo que una cierta teoría T sea consistente, $/T/ \subseteq U$. Si llamamos t a una tautología cualquiera de I entonces $U \cap /t/ = U \neq \emptyset$ y, por tanto, $/T + t/ \subseteq U$. Ahora bien, dado que para cualquier tautología t se da que $t \in T$, $T \cap t = T$, y por la condición (4) de equivalencia entre teorías y subconjuntos de M_L, $/T + t/ = /T/$, por lo que $/T/ \subseteq U$. Hasta aquí se ha probado que $/T/ \subseteq U$. Sólo resta probar que /T/ es una esfera. Esto implica probar que $/T/ = /T + t/$ cumple las condiciones (1) y (2). (1) se cumple automáticamente. En cuanto a (2), probarlo implica probar que:

Si $/A/ \cap /T + t/ \neq \emptyset$, para algún A de F, entonces $/T + A/ = /T + t/$. En efecto si $/A/ \cap /T + t/ \neq \emptyset$, entonces $-A \notin /T + t/$, y por (K^*_8):

$(T + t)/A \subseteq T + (t \,\&\, A)$, y por lo tanto, $/T + A/ \subseteq /(T + t)/A/$.

S3

Por definición de S.

S4

Probar (S4) implica probar que Si una esfera U, tal que $U \cap /A/ \neq \emptyset$, entonces $\forall$ $V \varepsilon$ tal que $V \cap /A/ \neq \emptyset$, $U \subseteq V$.

Lema previo

La intersección de cualquier clase de esferas en S es una esfera. O sea: tomare un $C \subseteq S$ (con $C \neq \emptyset$), y verificaremos si $\cap$ C cumple las condiciones especificadas (1) y (2).

i) Si T es consistente, entonces -por (S2) ya probada- $/T/ \subseteq U$, $\forall$ $U \varepsilon S$. Por tanto $/T/ \subseteq \cap C$ (y $\cap C$ es $\neq \emptyset$).

ii) Si $\cap C = M_L$, ciertamente $\cap C$ es una esfera. Consideremos, entonces el caso en que $\cap C \neq M_L$. Entonces hay algún U en C tal que $U \neq M_L$. Tomemos un $x \varepsilon \cap C$. Dado que $x \varepsilon U$, por la condición (1) hay un $A \varepsilon F$ tal que $x \varepsilon /T + A/$ Por lo tanto la condición (1) vale para $\cap C$.

En cuanto a (2) supongamos que $/A/ \cap (\cap C) \neq \emptyset$, para alguna sentencia A. Por lo tanto por $\forall$ $U \varepsilon C$:$/A/ \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto por (2), $/T + A/ \subsetneq U$ para todo U en C. Por tanto $/T + A/ \subseteq \cap C$, y C satisface (1) y (2) y es una esfera.

Pasamos ahora a (S4). Si llamamos A a un enunciado cualquiera, supongamos como hipótesis el antecedente de (S4), o sea que hay al menos un $U \varepsilon S$, tal que $U \cap /A/ \neq \emptyset$. Entonces $-A \notin L$. En efecto si $-A \notin L$, entonces $A = \perp$ y $/\perp/ = \emptyset$, por lo que $U \cap /A/ \neq \emptyset$.

Utilizaremos ahora la condición (2): para cualquier $U \varepsilon S$, tal que se cumpla supuesto, o sea $U \cap /A/ \neq \emptyset$, se cumple que $/T + A/ \subseteq U$.

Se cumple entonces $/T + A/ \subseteq \cap (U \varepsilon S\colon U \cap /A/ \neq \emptyset)$, o sea que la intersección de todos los U que cortan a /A/ incluye a /T + A/.

(Estamos introduciendo aquí la idea de c(A), o sea se está introduciendo la idea de la mínima esfera que corta a /A/ como la intersección de todas las que la cortan)

Recurrimos ahora a lo probado antes, o sea que: -A $\notin$ L. Por (K_5^*) Cont (T + A), por lo que /T + A/ $\neq \emptyset$.

Por (K_2^*): A ε T + A, por lo que:

/T + A/ $\subseteq$ /A/.

Llamaremos por comodidad Int a $\bigcap$ (U ε S: U $\cap$ /A/ $\neq \emptyset$).

Antes establecimos que /T + A/$\subseteq$ Int.

Por lo tanto, como un mismo conjunto (/T + A/) está incluido en otros dos (Int. y /A/), estará incluido en su intersección, y entonces:

$\emptyset \neq$ /T + A/ $\subseteq$ /A/ $\cap$ Int.

Como el lema previo Int. es una esfera, y para todo V ε S, tal que V $\cap$ /A/ $\neq \emptyset$, Int. $\subseteq$ V; hay entonces una esfera tal que es más pequeña que cualquier otra, cuya intersección con /A/ es no vacía, como se buscaba demostrar.

Hasta aquí se ha mostrado que S (en el caso Con (T)) formado por S'$\subseteq M_L$, donde S' es una clase no vacía de subconjuntos U de M_L que satisface (1) y (2), es un sistema de esferas.

<u>Habrá que mostrar ahora que para todo A en F, T + A = t(f_S (A)).</u>

Esta es la parte medular de la demostración. En el texto de Grove hay algunas ambigüedades (y probablemente también errores de impresión). Por tanto presentaremos el teorema con algunas modificaciones, que en la segunda parte del mismo serán importantes con respecto al texto de Grove.

Se dividirá la exposición en dos partes correspondientes a dos casos

(A) <u>-A ε L</u> , entonces A = $\perp$ y por (K_2^*), T + A es inconsistente.

En ese caso f_S (A) = /A/ $\cap$ c(A) = $\emptyset$, ya que / $\perp$ / = $\emptyset$, y por lo tanto T + A = $K_\perp$ = t(f_S(A)) = t($\emptyset$). O sea t(f_S(A)) es inconsistente y se cumple la igualdad que interesa establecer: $T + A = t(f_S(A))$

(B) $-A \notin L$ En este caso podemos partir de lo establecido más arriba, esto es que: $/T + A/ \subseteq /A/ \cap \text{Int.}$

Habrá que establecer ahora la conversa:

$/A/ \cap \text{Int.} \subseteq /T + A/.$

Realizaremos la prueba por el absurdo: partiendo de las siguientes hipótesis:

hip.1. $a \in /A/$

hip.2. $a \in \text{Int.}$

hip.3. $a \notin /T + A/$

Por la condición (1) habrá un B tal que $a \in /T + B/$. En efecto Int. es una esfera y $a \in \text{Int.}$, por lo que puede asumirse que hay un B, tal que $a \in /T + B/$.

Dado que $a \in /T + B/$ y $a \in /A/$, $a \in (/T + B/ \cap /A/) \neq \emptyset$. Por lo tanto $-A \notin T + B$. Por (K^*_7) y (K^*_8):

$(T + B) /A = T + (A \& B)$, lo que equivale a que:

$/A/ \cap /T + B/ = /T + (A \& B)/$

Por lo tanto, como $a \in (/A/ \cap /T + B/)$, $a \in /T + A \& B/$.

Ahora bien por (K^*_2):

$/T + B/ \subseteq /B/$ y

$/T + A/ \subseteq /A/,$

dado que $a \in /T + B/$, entonces $a \in /B/$. Además por teoría de conjuntos:

$/B/ \cap /T + A/ \subseteq /A/ \cap /B/$, pero como $a \in /B/$ y $a \in /A/$, entonces $/A/ \cap /B/ \neq \emptyset$ y por lo tanto $-B \notin T + A$. Pero entonces por (K^*_8):

$(T + A)/ B \subseteq T + (A \& B)$, de donde:

$/T + A \& B/ \subseteq /B/ \cap /T + A/$.

Pero $a \in /T + (A \& B)/$, por lo que $a \in /T + A/$, contra la hipótesis de que $a \notin /T + A/$.

La estructura de la prueba ha consistido simplemente en mostrar que un mundo a que pertenezca a la intersección de /A/ e Int. también pertenece a $/T + (A \& B)/$. Y, a su vez, que $/T + (A \& B)/$ está incluido en la parte de $/T + A/$ que corta a /B/, por lo que esta incluido en $/T + A/$, contra la hipótesis asumida (hip. 3.).

La demostración utilizada por Grove de este último punto es distinta. La idea de Grove consiste en mostrar que hay una esfera U tal que:

$/T + A/ = /A/ \cap U$ (en rigor en el trabajo de Grove, éste propone la condición: $/T + A/ = /A/ \cap /U/$, aunque no parece claro qué puede arrojar "/ /" aplicado sobre un conjunto de mundos. Probablemente se trate de un error de impresión y Grove haya querido expresar la condición expuesta más arriba.)

En lo que sigue de la prueba Grove propone una esfera U que cumpla el requisito pedido. Esta esfera es:

$\cup (/T + B/ : /A/ \subseteq /B/, B \in F)$.

(La condición (1) se cumple automáticamente y (2) puede mostrarse con facilidad, por lo que puede afirmarse que U es realmente una esfera).

Si $/A/ \cap /T + B/ \neq \emptyset$, entonces $-A \in T + B$. Por (K^*_7) y (K^*_8):

$(T + B) / A = T + (A \& B)$, lo que a su vez implica que:

$/A/ \cap /T + B/ = /T + (A \& B)/$. Ahora bien, dado que no se trata de cualquier /B/, sino de aquellos /B/, tal que $/A/ \subseteq /B/$, entonces: $/T + (A \& B)/ = /T + A/$ (en efecto si $/A/ \subseteq /B/$, entonces $/A/ \cap /B/ = /A/$). Por tanto, $/A/ \cap U = \cup (/A/ \cap (T + B) : /A/ \subseteq /B/)$, y este conjunto es la unión de una serie de términos, cada uno de los cuales es, o bien $\emptyset$, o bien $/T + A/$, y al menos uno de los cuales $/A/ \cap /T + A/$, es $/T + A/$ (en el caso en que $/A/ = /B/$). Por lo tanto $/A/ \cap U = /T + A/$, como se requería.

III. UNA SEMANTICA EPISTEMICA PARA LA LOGICA VC DE LEWIS

Presentaremos en esta sección centralmente los resultados expuestos por Peter Gärdenfors en un trabajo publicado en el Acta Philosophica Fennica (Gärdenfors (1979)). Como se aclaró en el caso del trabajo de Grove respetaremos en lo posible la nomenclatura usada en el trabajo original, aunque se harán cambios notacionales para aumentar la inteligibilidad. Los resultados que serán expuestos más abajo están desarrollados, en general en el "paper" de Gärdenfors, salvo algunos lemas y teoremas que o bien se han completado, sobre la base de "hints", o bien se han probado ya que su prueba ha sido omitida en el trabajo original.

Lenguaje utilizado

El lenguaje objeto contiene:

(i) variables proposicionales

(ii) conectivas veritativo-funcionales: "-", "&", la constante proposicional "$\perp$", paréntesis y finalmente "$>$" para la conectiva condicional.

Como veremos luego, el último punto, esto es, el hecho de admitir que "$>$" pertenezca al lenguaje objeto, será un punto discutible. Pero en lo que sigue admitiremos que "$>$" pertenece al lenguaje objeto.

(iii) A,B,C son usadas como variables para fórmulas.

(iv) "v", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$", y la constante proposicional "$\top$", se definen de la manera standard.

(v) De idéntica manera la clase L de fórmulas se define de la manera standard.

(vi) La equivalencia condicional "$\equiv$" se define de la siguiente manera:

$$A \equiv B =_{df.} (A > B) \ \& \ (B > A).$$

Reintroduciremos algunas nociones que ya se trataron en la primera sección como la de conjunto de creencias, aunque de unamanera sintética: Un conjunto de creencias es un subconjunto de L que satisface las siguientes condiciones:

(C1) P es no vacío.

(C2) Si $A \in P$ y $B \in P$, entonces $(A \ \& \ B) \in P$.

(C3) Si $A \varepsilon P$ y $A \rightarrow B$ es una tautología, $B \varepsilon P$.

Definición Una expansión de un conjunto de creencias P es un conjunto de creencias P´ tal que $P \subseteq P'$

Definición Para todo conjunto de creencias P y cualquier fórmula A en L, la expansión de P por A, que se denota por P/A, es el conjunto de fórmulas B tal que $A \rightarrow B \varepsilon P$.

Un modelo de creencias M es un par ordenado $\langle IP, F \rangle$ donde IP es un conjunto de conjuntos de creencias y F una función de $IP \times L$ a IP.

(C4) Si $P \varepsilon IP$, entonces todas las expansiones P´de P pertenecen a IP.

(C5) Para todo $P \varepsilon IP$, y todo A y B en L, $A > B \varepsilon P$ SII $B \varepsilon F(P,A)$.

F (P,A) puede ser abreviado como P^{*}_{A} y representa el resultado del mínimo cambio que es necesario hacer en P para aceptar A.

Por tanto la condición (C5) recoge la idea que está detrás del test de Ramsey para la aceptación de condicionales en un conjunto de creencias: un condicional $A > B$ es aceptado en un conjunto de creencias P, si y sólo si B es aceptado en P^{*}_{A} (o lo que es lo mismo en F (P,A)) o sea en P revisado con A.

Introduciremos ahora algunas definiciones de tipo semántico:

Definición

Una fórmula A es satisfacible en un modelo $M = \langle IP, F \rangle$ SII hay algún $P \varepsilon IP$, tal que $P \neq P_{\perp}$, y $A \varepsilon P$.

Una fórmula es válida en un modelo M SII -A no es satisfacible en M.

Una fórmula es válida SII A es válida en todos los modelos.

Una lógica mínima para los condicionales

Presentaremos un sistema axiomático denominado CM.

Axiomas esquemas

(A1) todas las tautologías veritativo-funcionales

(A2) $(A > B) \,\&\, (A > C) \rightarrow (A > B \,\&\, C)$

NOTA: el orden de las dos páginas siguientes está alterado en P es al menos no mayor que el necesario para incluir B en P. De idéntica manera con B y P^*_A. Dado que para cada A hay un único cambio mínimo de P que incluye A, P^*_A y P^*_B deben ser idénticas.

El axioma para condicionales correspondiente es:

(A5) $(A \equiv B) \rightarrow ((A > C)) \rightarrow (B > C))$

<u>Lema 2</u>

Todas las instancias de (A5) son válidas en un modelo M SII M satisface (C7).

De (R3) y (A5) se puede obtener la siguiente regla derivada:

(R4) Si $A \leftrightarrow B$ es un teorema, entonces $(A > C) \leftrightarrow (B > C)$ es un teorema.

~~La siguiente condición tiene en apariencia, un error de formulación que corregiremos al exponerla:~~

(C8) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, si $A \varepsilon P$, entonces $P = P^*_A$, ~~si P es consistente.~~

Se dividirá la condición anterior en las dos siguientes condiciones:

(C 8a) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, si $A \varepsilon P$, entonces ~~si P es consistente~~ $P \subseteq P^*_A$

(C8b) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, si $A \varepsilon P$, entonces $P^*_A \subseteq P$.

Estas condiciones corresponden respectivamente a los siguientes axiomas:

(A6) $A \ \& \ B \rightarrow (A > B)$

(A7) $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

<u>Lema 3</u>

Todas las instancias de (A6) son válidas en un modelo M SII M satisface (C8a).

<u>Lema 4</u>

Todas las instancias de (A7) son válidas en un modelo M SII M satisface (C8b).

Las condiciones que restan comparan el proceso resultante de revisar un conjunto de creencias con la conjunción de dos enunciados, A y B, con el que se obtiene revisando el conjunto primero con A y luego expandiéndolo con el otro enunciado:B.

(A3) $A > T$

Regla de inferencia

(R1) Modus Ponens

(R2) Si $B \rightarrow C$ es un teorema, entonces $(A > B) \rightarrow (A > C)$ es también un teorema.

Usando la semántica introducida por la última definición, puede darse un teorema de completitud para CM.

Teorema 2 Una fórmula A es válida SII A es un teorema en CM.

El sistema CM corresponde a una función F que expresa la idea, muy general, de una función que selecciona cambios mínimos de creencias. En lo sucesivo se irán agregando condiciones racionales para cambios mínimos de creencias que establecerán restricciones en F. Esto, a su vez, irá restringiendo la clase de modelos. Por tanto en los próximos pasos estableceremos qué axiomas para contrafácticos son válidos en esta clase de modelos restringida por las condiciones impuestas sobre F.

Como primera condición se introducirá:

(6) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, $A \varepsilon P^*_A$

Esta condición corresponde al siguiente axioma para condicionales que debe agregarse a los dados en CM:

(A4) $A > A$

Que esto es así lo justifica el siguiente:

Lema 1 Todas las instancias de (A4) son válidas en un modelo M SII M satisface (C6).

DE (A4) y (R2), puede obtenerse la siguiente regla derivada:

(R3) Si $A \rightarrow B$ es un teorema, entonces $A > B$ es también un teorema.

La próxima condición que agregaremos es:

(C7) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, si $A \varepsilon P^*_B$, y $B \varepsilon P^*_A$, entonces $P^*_A = P^*_B$

La idea que subyace a (C7) es que dado que P^*_A es el mínimo cambio necesario para incluir A en P, si A está incluído en P^*_B entonces el mínimo cambio para incluir A

El punto conflictivo del análisis es causado por los casos límites que se generan al aplicar la expansión. Si consideramos, como una primera posibilidad, el caso de que la revisión con respecto a la conjunción esté contenida en la revisión con respecto al primer conyunto, expandida con el segundo conyunto, no parece haber problema con los casos límites. En efecto aunque la expansión nos lleve al conjunto contradictorio éste es tal que cualquier conjunto, en particular nuestra revisión expandida, está incluído en él y la condición no se viola. Por tanto tiene sentido establecer:

(C10a) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, $P^*_{A \ \& \ B} \subseteq P^*_A/B$

En cambio la condición inversa parece necesitar una restricción. Esta restricción se expresaría en lenguaje natural de la siguiente manera:

"Si A fuese aceptada en P, entonces B puede ser aceptado en P." ("puede" en el enunciado anterior podría sustituírse por "podría").

Esta condición puede expresarse técnicamente (ver sección IV), de dos maneras distintas: $-B \notin P^*_A$, o bien $-(A > -B) \varepsilon P$. Estas condiciones no son lógicamente equivalentes, la segunda implica a la primera, pero no viceversa. Por el momento elegiremos la segunda versión de la condición expresada en lenguaje natural. Como dijimos antes en la sección IV estableceremos algunas consideraciones más detalladas acerca de esta elección. Por tanto la condición que resta se expresa así:

(C10b) Para todos los conjuntos de creencias P, en un modelo M, si $-(A > -B) \varepsilon P$, entonces $P^*_A/B \subseteq P^*_{A \ \& \ B}$.

El axioma siguiente está relacionado con esta última condición:

(A9) $(A > B) \ \& \ -(A > -C) \rightarrow (A \ \& \ C > B)$.

Los lemas del caso son:

<u>Lema 5</u>

Si M es un modelo que satisface (C1)-(C8) y (C10a), entonces todas las instancias de (A8) son válidas en M.

Lema 6

Si todas las instancias de (A4) - (A7) y (A8) son válidas en un modelo M, entonces M satisface (C10a)

Lema 7

Si M es un modelo que satisface (C1) - (C8) y (C10 b), entonces todas las instancias de (A9) son válidas en M.

Lema 8

Si (A4) (A7) y (A9) son válidos en un modelo M, entonces M satisface (C10b).

UN MODELO DE CREENCIAS CORRESPONDIENTE AL DE LEWIS

Hemos afirmado antes que la semántica epistémica mostrada antes valida las fórmulas generadas por el sistema VC de Lewis. El teorema que sigue mostrará una primera relación entre los teoremas derivados de los axiomas de CM, más los axiomas (A4) - (A9), y los derivados de VC.

Lema 2

Una fórmula A es un teorema en VC si y sólo si es derivable de CM y los axiomas (A4) (A9).

Este, sin embargo, no es estrictamente el punto que nos interesa exponer aquí, sino más bien la relación entre el sistema de Lewis y el modelo de Gärdenfors. Previamente mostraremos la exposición que del sistema de Lewis hace Gärdenfors.

Definición

Un modelo de Lewis $\mathbb{M}$ es un triplo $\langle W,f,I\rangle$ donde:

(1) W es un conjunto no vacío de mundos posibles.

(2) f es una función de $W \times P(W)$ a $P(W)$, tal que para todo $w \in W$, y todo $X,Y \subseteq W$.

(i) $f(w,X) \subseteq X$

(ii) Si $f(w,X) \subseteq Y$ y $f(w,Y) \subseteq X$ entonces $f(w,X) = f(w,Y)$.

(iii) Si $w \in X$ entonces $f(w, X) = \{w\}$

(iv) $f(w, X \cup Y) \subseteq X$ ó $f(w, X \cup Y) \subseteq Y$ ó $f(w, X \cup Y) = f(w,X) \cup f(w,Y)$.

(3) I es una función de L a P(W) tal que para todo $A,B \in L$:

(i) $I(-A) = W - I(A)$

(ii) $I(A \& B) = I(A) \cap I(B)$

(iii) $I(A>B) = (w \in W: f(w, I(A)) \subseteq I(B))$

En cuanto a la función I, para cada enunciado ϕ, $I(\phi)$ selecciona los mundos en donde ϕ es verdad. En principio, "I" es idéntica a la "$[\![\ ]\!]$", definida por Lewis en Counterfactuals (Lewis (1973)), pag. 47.

(iii) especifica los mundos en los que un condicional contrafáctico A>B es verdadero, utilizando la función de selección de mundos introducida en (2). Como se especifica en (iii) los mundos en los que el condicional A>B es verdadero son aquellos mundos w para los que se da que los A-mundos más cercanos a ellos -seleccionados por la función f- están incluídos en los B-mundos.

En otros términos, A>B es verdadero en un mundo w si B es verdadero en todo mundo seleccionado por f aplicado a w e I(A), o sea si B es verdadera en todo A-mundo más cercano a w.

Finalmente un par más de aclaraciones de tipo semántico:

(i) Una fórmula A es satisfacible en un modelo de Lewis $\mathbb{M} = \langle W,f,I \rangle$ SII $I(A) \neq \emptyset$.

(ii) Una fórmula es válida en un modelo $\mathbb{M}$ SII -A no es satisfacible en $\mathbb{M}$.

Hasta aquí algunas muy consisas aclaraciones acerca del modelo de Lewis para los contrafácticos. Sin embargo la tarea interesante aquí es encontrar un equivalente en mundos posibles de la función de revisión y para ello el primer paso consistirá en tener un equivalente en mundos posibles de qué sea una teoría. En términos de Grove una equivalencia entre teorías y subconjuntos de mundos posibles.

Gärdenfors intenta introducir un modelo derivado del de Lewis, por lo que le interesará centralmente la relación entre subconjuntos de mundos posible y teorías. La idea es precisar qué teoría le corresponde a un dado subconjunto X de mundos posibles, (esto en la terminología antes introducida de Grove corresponde a la función t, de mundos posibles -mejor de extensiones maximales consistentes en el caso de Grove- a teorías).

Gärdenfors llamará P^X al conjunto de enunciados correspondientes a un subconjunto de mundos posibles X. Como en el caso anterior de la t de Grove, P^X será definida como el conjunto de enunciados que son verdaderos en todos los mundos de X. Recordemos que P^X es un conjunto de creencias. Desde este punto de vista debería considerarse que el hecho que un sujeto se encuentre en el estado de creencias representado por P^X indica que este sujeto cree que el mundo actual es uno de los mundos que pertenecen a X pero desconoce cuál de entre esos mundos es realmente al mundo actual.

Una vez que contamos con el equivalente en mundos posibles para un conjunto de creencias habrá ahora que construir una función de revisión en mundos posibles. La pregunta, entonces será: ¿qué significa revisar un conjunto de creencias P^X con un enunciado A?

La respuesta general es que habrá que encontrar los A-mundos más cercanos a X. Ya sabemos como Grove hace esto para la revisión clásica: construye un sistema de esferas centrado en X y -utilizando un lenguaje mixto entre Grove y Gärdenfors- la revisión que buscamos será la teoría que corresponda al conjunto de mundos que se obtiene cortando $\mathbf{I}$(A) - o lo que es lo mismo /A/ en Grove- con c(A), o sea la esfera del sistema de esferas centrada en X, más cercana a X con la propiedad de cortar a I(A).

El procedimiento que utilizará Gärdenfors es distinto. <u>Gärdenfors seleccionará los A-mundos más cercanos a X, seleccionando los A- mundos más cercanos a cada w perteneciente a X</u>.

Pondremos esto en términos más formales:

<u>Definición</u> Sea $\mathbb{M} = \langle W,f,I \rangle$ un modelo de Lewis. El modelo de creencias correspondient

a $\mathbb{M}$, M, es un par ordenado $\langle \mathbb{P}, F \rangle$, tal que:

(1) $\mathbb{P}$ consiste en todos los conjuntos P^X, para los cuales hay algún $X \subseteq W$, tal que $P^X = (A \varepsilon L: X \subseteq I(A))$

(2) Para cada $P^X \varepsilon P$ podemos definir la función F por la siguiente identidad:

$P^X_A = F(P^X, A) = P^X A$, donde $X_A = (w \varepsilon W$: hay algún $\gamma \varepsilon X$, tal que $w \varepsilon f(\gamma, I(A)))$.

Con ayuda de las precisiones antes introducidas podemos dar, finalmente el correlato semántico del Teorema 3:

<u>Teorema 3</u>

Si $\mathbb{M} = \langle W, f, I \rangle$ es un modelo de Lewis, entonces el modelo de creencias correspondiente $M = \langle \mathbb{P}, F \rangle$ satisface (C1)-(C10) y valida exactamente las mismas fórmulas que $\mathbb{M}$.

PRUEBAS DE LOS PRINCIPALES LEMAS.

<u>Lema 1.</u>

1) $A > A$ es válido - M

2) $A > A \varepsilon P, \forall P \varepsilon R$ en M.

3) $A \varepsilon P^*_A$, de (2) por (C5).

1) $A \varepsilon P_A$, $\forall P \varepsilon R$ en M.

2) $A > A \varepsilon P$ de 1 por RT

<u>Lema 2</u>

derecha a izquierda

por el absurdo

1) para todos los conjuntos de creencias P en M,
si $A \varepsilon P^*_B$ y $B \varepsilon P^*_A$, entonces $P^*_A = P^*_B$.

2) $(A \equiv B) \rightarrow ((A > C) \rightarrow (B > C)) \varepsilon P$, para algún P en R en M.

3) hay alguna extensión $P' \varepsilon R$ tal que

4) $(A \equiv B) \varepsilon P'$

5) $\neg ((A > C) \rightarrow (B > C)) \varepsilon P'$

6) $A > B \varepsilon P'$ de 4

7) $B > A \varepsilon P$ de 4

8) $B \varepsilon P'^{*}_{A}$ de (6)

9) $A \varepsilon P'^{*}_{B}$ de (7)

10) $((A > C) \wedge \neg (B > C)) \varepsilon P'$ de (5)

11) $A > C \varepsilon P'$ de 10

12) $\neg (B > C) \varepsilon P'$ de 10

13) $C \varepsilon P'^{*}_{A}$ de 11 por (C5)

14) $B \varepsilon P'^{*}_{A} \wedge A \varepsilon P'^{*}_{B}$ de (8) y (9)

15) $P'^{*}_{A} = P'^{*}_{B}$ de (14) y (1), MP

16) $C \varepsilon P'^{*}_{B}$ de (15) y (13)

17) $(B > C) \varepsilon P'$ de (16) por (C5)

18) $\neg (B > C) \varepsilon P \wedge (B > C) \varepsilon P'$ de (12) y (17)

<u>de izquierda a derecha</u>

1. $((A \equiv B) \rightarrow ((A > C) \rightarrow (B > C))) \varepsilon P$

ip 2. $A \varepsilon P^{*}_{B}$

ip 3. $B \varepsilon P^{*}_{A}$

4. $A > B \varepsilon P$

5. $B > A \varepsilon P$

6. $A \equiv B \varepsilon P$

7. $A > C \rightarrow B > C \varepsilon P$

ip 8 $C \varepsilon P^{*}_{A}$

9. Si $C \varepsilon P^{*}_{A}$, entonces $C \varepsilon P^{*}_{B}$

10. $C \in P^*_B$

11. Si $C \in P^*_A$, entonces $C \in P^*_B$

12. $P^*_A \subseteq P^*_B$

13. La inclusión en el sentido contrario se obtiene con una variante apropiada de (1).

<u>Lema 5.</u>

Si M es un modelo que satisface C1 - C8 y C10 a:

$P^*_{A \wedge B} \subseteq P^*_A/B$, entonces todas las instancias de $(A > C) \wedge (B > C) \rightarrow (A \vee B > C)$ son váli dos en M.

1) $(A > C) \wedge (B > C) \in P$ — $((A \quad B) > C) \in P$

2) $P^*_{A \wedge B} \subseteq P^*_A /B$

3) $P^*_{(A \vee B) \wedge A} \subseteq P^*_{A \vee B} /A$

4) $A \in P^*_A$ por (C6)

5) Si $A \in P^*_A$ y $A \rightarrow A \vee (B \wedge A)$ es una tautología, entonces

$A \vee (B \wedge A) \in P^*_A$ una instancia de (C3)

6) $A \vee (B \wedge A) \in P^*_A$ MP de 4,5

7) $(A \vee B) \wedge A \in P^*_A$

8) $A \wedge (A \vee B) \in P^*_{(A \vee B) \wedge A}$ por (C6)

9) $A \in P^*_{(A \vee B) \wedge A}$ por (C3)

10) $((A \vee B \wedge A \in P^*_A) \wedge (A \in P^*_{(A \vee B) \wedge A})$ de (9) y (6)

11) $P^*_{(A \vee B) \wedge A} = P^*_A$ por una instancia de C7 y MP con (10)

12) $A > C$ simplificación en (1)

13) $C \in P^*_A$ por (C5) en (12)

14) $C \in P^*_{(A \vee B) \wedge A}$ de (13) y (11)

15) $C \in P^*_{A \vee B}/A$ de (14) y (3)

16) $A \rightarrow C \in P^*_{A \vee B}$ de 15 por definición de expansión

17) Usando idéntica estrategia que en el caso anterior se puede mostrar que la variante

$P^*_{(A \vee B) \wedge B} \subseteq P^*_{A \vee B}/B$ de (2), implica que $B \rightarrow C \in P^*_{A \vee B}$

18) $(A \to C) \wedge (B \to C) \varepsilon P^*_{A \vee B}$ de 16 y 17

19) $(A \vee B) \to C \varepsilon P^*_{A \vee B}$

20) $A \vee B \varepsilon P^*_{A \vee B}$ de (C6)

21) $C \varepsilon P^*_{A \vee B}$ MP 20 , 19

Lema 6.

Si todas las instancias de (A4) - (A7) y (A8) son válidas en un modelo M, entonces M satisface (C10a).

1) $C \varepsilon P^*_{A \wedge B}$

2) $\neg B \vee C \varepsilon P^*_{A \wedge B}$

3) $B \to C \varepsilon P^*_{A \wedge B}$

4) $A \wedge \neg B \subset P^*_{A \wedge \neg B}$

5) $\neg B \varepsilon P^*_{A \wedge \neg B}$

6) $\neg B \vee C \varepsilon P^*_{A \wedge \neg B}$

7) $B \to C \varepsilon P^*_{A \wedge \neg B}$

8) $A \wedge B > B \to C \varepsilon P$ de (3) por (C5)

9) $A \wedge \neg B > B \to C \varepsilon P$ de (7) por (C5)

10) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) > B \to C \varepsilon R$ de (8) (9) y (A8), MP

11) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \leftarrow A$

12) $A > (B \to C)$ de (10) y (11)

13) $(A \equiv A) \to ((A > C) \to (A > C))$ instancia de (A5)

14) $A \equiv A$ por (A4)

15) $(A > C) \to (A > C)$ MP 13 y 14

16) $(A > (B \to C)) \to A > (B \to C)$

17) $A > B \to C \varepsilon P$

18) $B \to C \varepsilon P^*_{A}$ de 17 por (C5)

19) $C \varepsilon P^*_{A}$ /B

Lema 7.

Si M es un modelo que satisface (C1) - (C8) y (C 10b) entonces todas las instancias de (A9) son válidas en M.

si $\neg(A > \neg B) \varepsilon P$, entonces $P^*_A\ /B \subseteq P^*_{A \wedge B}$

1. hip $B \varepsilon P^*_A$
2. hip $\neg(A > \neg C) \varepsilon P$
3. Si $\neg(A > \neg C) \varepsilon P$, entonces $P^*_A\ /C \subseteq P^*_{A \wedge C}$ instancia de (C10b)
4. $P^*_A / C \subseteq P^*_{A \wedge C}$ por MP (2), (3)
5. Si $B \varepsilon P^*_A\ /C$, entonces $B \varepsilon P^*_{A \wedge C}$
6. Si $C \rightarrow B \varepsilon P^*_A$ entonces $B \varepsilon P^*_{A \wedge C}$
7. $C \rightarrow B \varepsilon P^*_A$ de (1)
8. $B \varepsilon P^*_{A \wedge C}$ de (7), (6), MP.

Nota: aquí sólo se usa (C10b). No hay uso alguno de (C1 - C8).

Lema. 8.

Si (A1) - (A7) y (A9) son válidas en un modelo M, entonces M satisface (C10b).

1. hip $\neg(A > \neg B) \varepsilon P$
2. hip $C \varepsilon P^*_A /B$
3. $B \rightarrow C \varepsilon P^*_A$ de (2)
4. $A > (B \rightarrow C)$ de 3 por (C5)
5. $((A > (B \rightarrow C)) \wedge \neg(A > \neg B) \rightarrow (A \wedge B > B \rightarrow C)$ instancia de A9
6. $A \wedge B > B \rightarrow C$ por 2 MP entre 1,4,5.
7. $B \rightarrow C \varepsilon P^*_{A \wedge B}$
8. $A \wedge B \varepsilon P^*_{A \wedge B}$ por (C6)
9. $B \varepsilon P^*_{A \wedge B}$
10. $C \varepsilon P^*_{A \wedge B}$

Nota: aquí sólo se ha usado (C6) tal vez podría eliminarse.

Lema 4.

Todas las instancias de $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ son válidas en M SII M satisface para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M que si $A \varepsilon P$, $P^*_A \subseteq P$.

de derecha a izquierda

por el absurdo

Se acepta que M satisface (C8b) y se niega que $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ sea válido -M. Se busca una $\perp$.

Si $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ no es válido - M, entonces en algún P de M

1. $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B) \notin P$ y en alguna extensión P'
2. $A > B \varepsilon P'$
3. $\neg (A \rightarrow B) \varepsilon P'$
4. $A \wedge \neg B \varepsilon P'$
5. $A \varepsilon P'$
6. $\neg B \varepsilon P'$
7. $P'^*_A \subseteq P'$ de (5) y el hecho que M satisface (C8b)
8. $B \varepsilon P'^*_A$ de (2) y (C5)
9. $B \varepsilon P'$ de 8 y 7 por teoría de conjuntos
10. $B \varepsilon P' \wedge \neg B \varepsilon P'$ de (9) y (6)

de izquierda a derecha

1. $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B) \varepsilon P$, para todo $P \varepsilon R$ en M
2. $A \varepsilon P$
3. $B \varepsilon P^*_A$
4. $A > B \varepsilon P$ de (3) por (C5)
5. $A \rightarrow B \varepsilon P$ por MP 4,1
6. $B \varepsilon P$
7. $P^*_A \subseteq P$
8. Si $A \varepsilon P$, entonces $P^*_A \subseteq P$

Lema 3

Todas las instancias de (A6) $A \;\&\; B \rightarrow (A > B)$ son válidas en un modelo M SII M satisface (C8a): para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, si $A \in P$, entonces $P \subseteq P_A$.

De derecha a izquierda

Por el absurdo.

Hipotetizaremos por tanto, que M satisface (C8a), y hay algún P en M tal que $A \;\&\; B \rightarrow (A > B) \notin P$, para algún A y B.

Dado que por (C4) todas las expansiones P' de los $P \in R$ de todo M, pertenecen a R, puede asegurarse que hay alguna expansión P', no inconsistente, tal que $A \;\&\; B \in P'$ y $-(A > B) \in P'$. Como P es consistente entonces $(A > B) \in P'$. Si $A \;\&\; B \in P'$ y sabemos que $(A \;\&\; B) \rightarrow A$ es una tautología, entonces puede concluirse que $A \in P'$. Por el hecho de que (C8a) vale en P' $P' \subseteq P'^{*}_{A}$. Por tanto $B \in P'^{*}_{A}$ y por el test de Ramsey: $A > B \in P'$.

De izquierda a derecha

Si: $\vdash_{CM} A$, entonces A es válido.

Todas las tautologías están incluídas en todos los conjuntos de creencias. Esto sale de lo expuesto previamente y elimina (A1). En lo que sigue se verificará que los dos restantes axiomas son válidos y que las reglas de inferencia preservan la validez:

(A2) Se probará por el absurdo.

Previamente se pondrá en el lenguaje que se utiliza aquí un teorema de la función de expansión que es necesario para la prueba:

Si $A \notin P$, para algún conjunto de creencias P, entonces $P/-A \neq P_{\perp}$.

Recordemos que (A2) tiene la siguiente forma:

$(A > B) \;\&\; (A > C) \rightarrow (A > (B \;\&\; C))$

Hipótesis: Alguna instancia de (A2) no es válida en algún modelo M.

Si una instancia de (A2) no es válida, en algún modelo M, entonces -(A2) es satisfacible en M. O sea hay un $P \neq P$ tal que $-(A2) \in P$.

Esto implica que $(A > B) \varepsilon P$, $(A > C) \varepsilon P$, y $-(A > (B \,\&\, C)) \varepsilon P$.

Ahora bien, por el test de Ramsey:

Si $A > B \varepsilon P$, entonces $B \varepsilon P^*_A$

Si $A > C \varepsilon P$, entonces $C \varepsilon P^*_A$

lo cual a su vez implica que:

$B \,\&\, C \varepsilon P^*_A$

y otra vez por el test de Ramsey:

$(A > (B \,\&\, C) \varepsilon P$, contra lo implicado más arriba por la hipótesis.

(A3) $T \varepsilon P^*_A$ para todo P^*_A y por lo tanto $A > T \varepsilon P$ para todo conjunto de creencias P en todo modelo.

Sólo nos queda verificar que las reglas de inferencia preservan la validez. En el caso de la primera regla es sencillo verificarlo. Lo haremos para la regla (R2).

Para probar que (R2) preserva la validez supondremos que $B > C$ pertenece a todos los conjuntos de creencias en todos los modelos y que hay algún P en algún modelo tal que $(A > B) \rightarrow (A > C) \notin P$. Por la condición (C4) sabemos que hay alguna extensión no absurda P' de P, tal que $(A > B) \varepsilon P'$ y $-(A > C) \varepsilon P'$. Por lo tanto, el test de Ramsey (o sea por (C5)) $B \varepsilon P'^*_A$, y dado que $B \rightarrow C \varepsilon P'^*_A$, $C \varepsilon P'^*_A$. Pero esto implica que (otra vez por el test de Ramsey) $A > C \varepsilon P'$, lo que contradice la hipótesis de que P' no era contradictorio.

PRUEBA DE LOS PRINCIPALES TEOREMAS:

Teorema 1

Teorema de completitud para CM.

Una fórmula A es válida en un sistema de revisión de creencias SII A es un teorema en CM.

Recordemos primero un par de definiciones:

(DEF 1) A es válido SII -A no es satisfacible en el sistema.

De derecha a izquierda

La que hay que probar es:

Si A es válido, entonces $\vdash_{CM}$ A. La conversa de este enunciado es:

Si: $\nvdash_{CM}$ A, entonces A no es válido. A su vez una variante de esta sentencia esquema es:

Si: $\nvdash_{CM}$ -A, entonces -A no es válido. Esta sentencia por (DEF 1) es, a su vez equivalente a

Si: $\nvdash_{CM}$ -A, entonces A es satisfacible en algún modelo de creencias.

Tomaremos entonces como hipótesis de la prueba:

CM: $\vdash$-A

de esta hipótesis se intentará demostrar que A es satisfacible en algún modelo de creencias.

El primer punto que puede afirmarse es que CM U {A} es consistente.

En efecto, supongamos que CM, A: $\vdash \bot$, entonces por el teorema de la deducción CM: $\vdash A \rightarrow \bot$, lo que equivale a CM: $\vdash$ -A, contra la hipótesis supuesta.

Llamemos, entonces P al conjunto de los teoremas de CM U { A} De lo anterior puede afirmarse, entonces que $P \neq K_{\bot}$.

Definiremos ahora a partir de P una serie P_i de conjuntos como sigue:

$P_0 = P$

.

.

.

$P_{n+1} = P_n \cup ((C \varepsilon L: B > C \varepsilon P'): P' \varepsilon P_n) \cup (P^*: P' \varepsilon P_n$ y P^* es una expansión de P)

Definiremos también una función F de la siguiente forma:

$F(P',B) = (C \varepsilon L: B > C \varepsilon P')$

Para mayor claridad de la prueba podemos redefinir el término P_{n+1} de la serie introducida antes de esta manera:

$P_{n+1} = P_n \cup (\forall B \varepsilon L, F(P',B): P' \varepsilon P_n) \cup (......)$.

En otros términos P_{n+1} consiste en el conjunto de fórmulas de P_n en unión con los conjuntos obtenidos al aplicar F a las extensiones P' de P_n y fórmulas B cualesquiera del lenguaje, en unión, a su vez, con las extensiones P^* de P'.

A su vez, F ha sido definido para un cierto P' y un B cualquiera como el conjunto de los consecuentes contrafácticos de B, tales que los enunciados contrafácticos con B como antecedente pertenezcan a P.

Tomemos ahora $R = \cup P_n$

Si se pudiese probar que el par ordenado $\langle R,F \rangle$ es un modelo de creencias nuestra prueba habría concluído, en efecto, $A \varepsilon P$, y a su vez $P \varepsilon R$, por lo que esto probaría que A es satisfacible en algún $M \varepsilon R$.

Probar que $\langle R,F \rangle$ es un modelo de creencias implica probar que

(i) los $P \varepsilon R$ son conjuntos de creencias.

(ii) Se cumplen (C4) y (C5).

Probaremos primero (i), para lo cual se presentará un

<u>Lema previo</u>

Todos los $P \varepsilon R$ contienen todos los teoremas de CM.

La prueba es trivial $P_0 = (P) = (CM \ \cup (A))$, por lo que P_0 contiene los teoremas de CM. A su vez, toda expansión P' de P cumple $P \subseteq P'$ por lo que si por inducción se supone que P_n contiene los teoremas de CM, toda expansión de P_n los contendrá.

Volvemos ahora a la prueba de (i). La prueba se realizará por inducción.

En el caso de $P_0 = (P)$ y P es un conjunto de creencias.

Suponemos ahora que P_n es un conjunto de creencias. Para probar que P_{n+1} lo es, se probará que si $P' \varepsilon P_n$, para cualquier B,

$(\ C \varepsilon L: \ \ B > C \ \varepsilon P) = P'_B$ es un conjunto de creencias.

Para hacerlo se verificará que las condiciones (C1) - (C3) se cumplen:

(C1) P'_B es no vacío.

1) $B > T \varepsilon P'$ por (A3) y Lema previo.

2) $T \varepsilon P'_B$

(C2) Si $C \varepsilon P'_B$,

1) $B > C \varepsilon P'$

2) $B > D \varepsilon P'$

3) $B > C \& D \varepsilon P'$ por (A2) y Lema previo.

4) $C \& D \varepsilon P'_B$

Si $C \rightarrow D$ es una tautología y $C \varepsilon P'_B$, $D P'_B$

1) $C \rightarrow D$ es una tautología.

2) $C \varepsilon P'_B$

3) $B > C \varepsilon P$

4) $B > C \rightarrow B > D$ de (A1) y MP. con (R2) -regla derivada 2-

5) $B > D$

6) $D \varepsilon P'_B$

En cuanto a la condición (C4) por la construcción de R sabemos que si P R, entonces todas las expansiones de P pertenecen a R.

Finalmente (C5) se satisface por la definición de F.

IV. Relaciones entre la noción "standard" de la revisión y la noción de revisión necesaria para generar una semántica de la lógica VC de Lewis ($*_{VC}$)

Recordemos que los postulados clásicos, son:

(K^*_2) $A \in K^*_A$

(K^*_3) $K^*_A \subseteq K^+_A$

(K^*_4) Si $-A \notin K$, entonces $K^+_A \subseteq K^*_A$

(K^*_5) Si $\not\vdash \neg A$, entonces K^*_A es consistente.

(K^*_6) Si $A \leftrightarrow B$, entonces $K^*_A = K^*_B$

(K^*_7) $K^*_{A \,\&\, B} \subseteq (K^*_A)^+_B$

(K^*_8) Si $-B \notin K^*_A$, entonces $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \,\&\, B}$

En cuanto a los postulados que hemos visto ha de satisfacer un sistema de revisión de creencias para generar una semántica para contrafácticos (especialmente aquella que valide los principios de VC), daremos dos listas de principios, una que sigue la notación y numeración del trabajo de Gärdenfors (1979), y otra correlativa en la notación precedente. Cuando un principio en esta nueva notación venga acompañado de un subíndice con la letra "w" querrá decir que se trata de un principio que mantiene una relación con el original, relación que más adelante investigaremos.

Según versión en Gärdenfors (1979)

(C6) $A \in P^*_A$	(K^*_2) $A \in K^*_A$
(C8b) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M, Si $A \in P$, entonces $P^*_A \subseteq P$	(K^*_{3w}) Si $A \in K$, entonces $K^*_A \subseteq K$.
(C8a) Para todos los conjuntos de creencias P en un modelo M Si $A \in P$, entonces $P \subseteq P^*_A$	(K^*_{4w}) Si $A \in K$, entonces $K \subseteq K^*_A$

(C7) Si $A \varepsilon P^{*}_{B}$ y $B \varepsilon P^{*}_{A'}$, entonces

$P^{*}_{A} = P^{*}_{B}$

(C10a) $P^{*}_{A \,\&\, B} \subseteq P^{*}_{A}/B$

(C10b) Si $-(A> -B) \,\varepsilon\, P$, entonces

$P^{*}_{A}/B \subseteq P^{*}_{A \,\&\, B}$

(K^{*}_{6})

Si $A \varepsilon K^{*}_{B}$ y $B \varepsilon K^{*}_{A}$, entonces $K^{*}_{A} = K'_{B}$

(K^{*}_{7}) $K^{*}_{A \,\&\, B} \subseteq (K^{*}_{A})^{+}_{B}$

(K^{*}_{8w}) Si $-B \notin K^{*}_{A}$, entonces $(K^{*}_{A})^{+}_{B} \subseteq K^{*}_{A\&B}$

A estos principios habría que agregar el test de Ramsey para la aceptación de condicionales en un conjunto de creencias;

(RT) $A > B \,\varepsilon\, K$ SII $B \,\varepsilon\, K^{*}_{A}$

Este principio corresponde a la condición (C5) formulada en Gärdenfors (1979):

(C5) Para todo $P \,\varepsilon\, \mathbb{P}$ y todo A y B en el lenguaje, $A > B \,\varepsilon\, P$ SII $B \,\varepsilon\, F(P,A)$

Las condiciones C1-C3 en Gärdenfors (1979) son sustituíbles por una definición de qué cosa sea un conjunto de creencias y C_4 es superflua.

Por lo tanto nos concentramos en los principios tal como han sido dados en la lista precedente. En esta sección haremos una comparación muy gruesa para desbrozar el terreno.

En primer lugar en la lista de principios dada más arriba no figura (K^{*}_{5}) de la lista original.

En segundo lugar existen versiones modificadas de los principios (K^{*}_{3}), (K^{*}_{4}), (K^{*}_{8}). Los restantes principios permanecen idénticos a los formulados en la primera lista.

Haremos una primera simplificación que también puede ser hecha en la primera lista, consistente en reunir (K^{*}_{3w}) y (K^{*}_{4w}) en (K'_{4w}):

(K'_{4w}) Si $A \,\varepsilon\, K$, entonces $K = K^{*}_{A}$

De idéntica manera podrían haberse reunido (K^{*}_{3}) y (K^{*}_{4}) en (K''^{*}_{4}):

(K''^{*}_{4}) Si $-A \notin K$, entonces $K^{+}_{A} = K^{*}_{A}$

Desde este punto de vista, entonces, la noción de revisión tal como la expone

Gärdenfors en su trabajo carece de uno de los principios que aparecen en la revisión clásica y dos de sus principios difieren de los originales. En cuanto a K_5^* en la sección V (Observación I y II) se mostrará que no puede agregarse a los postulados de $*_{VC}$, ya que es inconsistente con K_3^*, K_4^* y K_M^* .(también mostraremos allí que K_5^* debe sustituirse por algún principio que admita que la revisión de un conjunto inconsistente sea, a su vez, inconsistente).

La primera pregunta que es factible hacerse es si no será posible utilizar (K junto con (K_4^*) al analizar la lógica de los condicionales. La respuesta es que no. la sección siguiente daremos una explicación de por qué esto es así, pero antes veremos un teorema que se desprende de la axiomatización que estudiamos y que no se desprende de los axiomas dados en primer termino. Se trata del principio de monotonía.

IV. 1. El principio de monotonía

Por principio de monotonía entendemos el siguiente postulado:

(K^*_M) Si $K \subseteq K'$, entonces $K^*_A \subseteq K'^*_A$

Cambiando la operación "*" por "-" se pueden obtener variantes del principio para la contracción, y obviamente también para la expansión.

Puede demostrarse fácilmente que (K^*_M) es un teorema derivable de los postulados que hemos expuesto (los postulados de la noción de revisión en Gärdenfors (1979), a los que de aquí en más haremos alusión,en caso de duda como los postulados que axiomatizan $*_{VC}$.). Para la derivación como se verá sólo es necesario recurrir a (RT). La prueba es como sigue:

1.	$K \subseteq K'$	asumido como hipótesis
2.	$B \in K^*_A$	hipótesis
3.	$A > B \in K$	por (RT)
4.	$A > B \in K'$	por (1) y (3)
5.	$B \in K'^*_A$	de (4) por (RT)

El principio de monotonía no se sigue, en cambio, de los postulados clásicos para la revisión.

Puede darse en primer término un argumento abstracto en contra de (K^*_M),

Considérese un K, tal que $-A \notin K$ y $B \in K$. En cuanto a $K' = K^+_{B \rightarrow -A}$. En la figura se hacen explícitas las condiciones impuestas sobre K y K'.

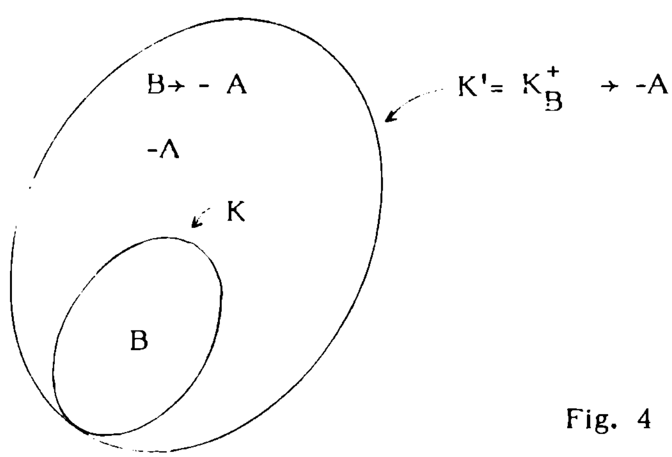


Fig. 4

Como se ve K y K' han sido elegidos de manera que $B \in K$ y $(B \rightarrow -A) \notin K$ (ya que $-A \notin K$), mientras que $(B \rightarrow -A) \in K'$.

Consideremos ahora el siguiente principio que denominaremos de preservación.

(K^*_p) Si $-A \notin K$ y $B \in K$, entonces $B \in K^*_A$

Este principio junto con (K^*_2) implica a (K^*_4). La prueba de que ello es así es como sigue:

1. hip. $-A \notin K$
2. hip. $B \in K^+_A$
3. $A \rightarrow B \in K$
4. $A \rightarrow B \in K^*_A$ por (K^*_P)
5. $A \in K^*_A$ por (K^*_2)
6. $B \in K^*_A$ MP. entre (5) y (6).

En realidad puede probarse un resultado más fuerte que no expondremos: (K^*_P) y (K^*_4) son equivalentes en presencia de (K^*_2).

Nos hemos detenido en este principio usado en la prueba que estamos desarrollando ya que expresa buena parte del contenido conceptual contenido en (K^*_4). En concreto expresa la idea de que no se eliminarán creencias de un conjunto de creencias si no es necesario. ((K^*_P) es un principio fuertemente vinculado con la tradición bayeseiana en el estudio de los condicionales).

Volviendo al ejemplo que hemos dado, si se observa (K^*_P) tal como lo hemos formulado, se observa que en su antecedente figuran las dos condiciones que hemos impuesto a K, por lo que por MP. es claro que $B \in K^*_A$.

Ahora bien, en el caso de K'^*_A pueden darse varios casos, alguno de los cuales violan (K^*_M). En concreto, o bien B, o bien $B \rightarrow -A$, o bien ambos deben ser expulsados del conjunto revisado. Si B es el elegido (esto podría deberse a que B posee menos importancia epistémica que $B \rightarrow -A$, ~~aunque se tratará de hacer más claro esto en el ejemplo intuitivo dado a continuación~~), nos encontraremos en la situación diagrama-da en la figura : $B \in K^*_A$, pero $B \notin K'^*_A$, contra $K^*_A \subseteq K'^*_A$

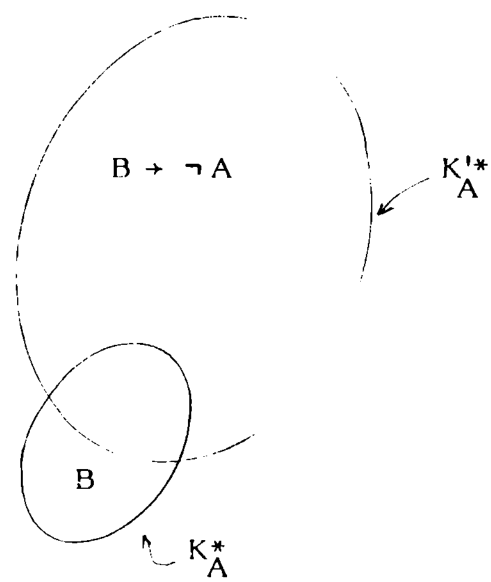


Fig. 5

IV. 2. Teorema de inconsistencia

En la sección anterior nos preguntámos si no sería posible utilizar (RT) junto con el principio (K^*_4) al analizar la lógica de los condicionales. Anticipamos en esa sección que la respuesta es no. En esta sección trataremos de mostrar el porqué de esta respuesta negativa.

Primero introduciremos una definición.

Definición: Un sistema de revisión de creencias es no trivial SII hay al menos tres sentencias A, B y C, disjuntas de a pares y algún conjunto de creencias $K \in \mathbb{K}$ que es consistente con las tres sentencias, esto es: $-A \notin K$, $-B \notin K$, $-C \notin K$. A su vez dos sentencias A y B son disjuntas si $\vdash -(A \,\&\, B)$.

Teorema de inconsistencia

No hay sistema de revisión de creencias no trivial que satisfaga simultáneamente las condiciones (K^*_2), (K^*_M), (K^*_{5w}) y (K^*_P). NOTA ⊕

Existe una prueba del teorema de Gärdenfors (1986). La prueba opera demostrando por el absurdo: se supone un sistema de revisión de creencias que satisface todos los principios enunciados y se busca una contradicción.

En Gärdenfors (1986) sólo se ofrece un esquema de la prueba. La expondremos aquí con bastante detalle.

Antes de entrar en la prueba aclaramos que se usarán en la misma dos axiomas de la operación de expansión:

(I) $K^{+}_{A \vee B} \subseteq K^{+}_{A}$

(II) $(K^{+}_{A})^{+}_{B} = K^{+}_{A \,\&\, B}$

No nos detendremos aquí en estos principios, pero baste agregar que los mismos salen naturalmente si se acepta que:

$K^{+}_{A} = Cn(K \cup \{A\})$

<u>Prueba</u>

hip. 1. $\vdash -(A \,\&\, B)$

hip. 2. $\vdash -(B \,\&\, C)$

hip. 3. $\vdash -(A \,\&\, C)$

hip. 4. $-A \notin K$

hip. 5. $-B \notin K$

hip. 6. $-C \notin K$

7. $K \neq K_{\perp}$ por 4-6. Hay al menos una sentencia que no pertenece a K.

8. Si $\nvdash -A$, entonces $K = K_{\perp}$ o $K^{*}_{A} \neq K_{\perp}$ instancia de (K^{*}_{5w})

9. $K = K_{\perp}$ o $K^{*}_{A} \neq K_{\perp}$ por 8 y 4, MP.

10. $K^{*}_{A} \neq K_{\perp}$ por 9 y 7.

11. Si $\vdash -(B \,\&\, C)$, entonces $\nvdash -B \,\&\, -C$

12. $\nvdash -B \,\&\, -C$ por 11 y 2, MP.

13. Si $\vdash -B \,\&\, -C$, entonces $K^{*}_{A} = K_{\perp}$, o $(K^{*}_{A})^{*}_{B \vee C} \neq K_{\perp}$ instancia (K^{*}_{5w})

14. $K^*_A = K_\perp$ ó $(K^*_A)^*_{B \vee C} \neq K_\perp$ por 13 y 12, MP.

15. $(K^*_A)^*_{B \vee C} \neq K$ por 10 y 14, S. Disyuntivo

16. $B \vee C \in (K^*_A)^*_{B \vee C}$ por (K^*_2)

17. O bien $-B \notin (K^*_A)^*_{B \vee C}$, o bien $-C \notin (K^*_A)^*_{B \vee C}$ por 16 y 15

18. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $-C \notin (K^*_A)^*_{B \vee C}$ El otro caso puede ser probado de idéntica manera a como expondremos aquí.

19. $K^+_{A \vee B} \subseteq K^+_A$ por axioma I), expansión.

20. $(K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C} \subseteq (K^+_A)^*_{B \vee C}$ por (K^*_M) en 19.

21. Si $-A \notin K$, entonces $K^+_A \subseteq K^*_A$ por (K^*_P) y (K^*_2)

22. $K^+_A \subseteq K^*_A$ por 21, 4, MP.

23. $(K^+_A)^*_{B \vee C} \subseteq (K^*_A)^*_{B \vee C}$ por 22, (K^*_M)

24. Si $-C \notin (K^*_A)^*_{B \vee C}$, entonces $-C \notin (K^+_A)^*_{B \vee C}$ por 23.

25. $-C \notin (K^+_A)^*_{B \vee C}$ por 24, 18, MP.

26. Si $-C \notin (K^+_A)^*_{B \vee C}$, entonces $-C \notin (K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C}$ por 20.

27. $-C \notin (K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C}$ por 26 y 25, MP.

Esto completa una primera parte de la prueba. La segunda parte buscará demostrar que $-C \in (K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C}$.

28. $-(B \vee C) \notin K^+_{A \vee B}$ esto sale por la definición de "+" y la hipótesis 4. Ofrecemos una prueba aparte al fin de esta prueba, (ver <u>agregado 1.</u>)

29. Si $-(B \vee C) \notin K^+_{A \vee B}$, entonces $(K^+_{A \vee B})^+_{B \vee C} \subseteq (K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C}$ por instancia de (K^*_4)

30. $(K^+_{A \vee B})^+_{B \vee C} = K^+_{(A \vee B) \& (B \vee C)} = K^+_B \subseteq (K^+_{A \vee B})^*_{B \vee C}$ por II.

31. $B \in K^+_B$

32. $\vdash B \rightarrow -C$ por 2.

33. $-C \; \varepsilon \; K^{+}_{B}$

34. $-C \; \varepsilon \, (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B} \vee C$ de 30 y 33.

Esto finaliza la prueba. Nos falta probar el paso 28.

Agregado I

Por el absurdo.

hip. 1. $-(B \vee C) \; \varepsilon \; K^{+}_{A \vee B}$

2. $(-B \; \& \; -C) \; \varepsilon \; K^{+}_{A \vee B}$

3. $-B \; \varepsilon \; K^{+}_{A \vee B}$

4. $(A \vee B \rightarrow -B) \; \varepsilon \; K$ por def. "$_{+}$": $\{ \delta / (A \vee B \rightarrow \delta) \; \varepsilon \; K \}$

5. $(-(A \vee B) \vee -B) \; \varepsilon \; K$

6. $((-A \; \& \; -B) \vee -B) \; \varepsilon \; K$

7. $((-A \; \& \; -B) \vee -B) \notin K$ ya que $-B \notin K$ y $-A \notin K$

IV. 3. Discusión del resultado de inconsistencia

El resultado de inconsistencia probado antes tiene consecuencias importantes para la investigación que nos proponemos aquí. En primer lugar la axiomatización de $*_{VC}$ no puede coincidir con la clásica en los axiomas (K^{*}_{4}) y K^{*}_{8}). Por otro lado de los principios de $*_{VC}$ se sigue (K^{*}_{M}), un postulado que es bastante poco esperable valga entre los principios de una noción de revisión cualquiera. Es más, aparentemente es la aceptación de este postulado lo que nos hace abandonar un principio tan intuitivo y razonable como (K^{*}_{P}).

Además el resultado de inconsistencia nos enseña que inevitablemente la noción de revisión $*_{VC}$ es radicalmente diferente de la clásica. Los teoremas de representación clásicos no sirven para hacer más transparente $*_{VC}$. Entre las múltiples preguntas que se abren aquí puede citarse por ejemplo ¿qué tipo de ordenación de las sentencias del lenguaje, al estilo de la expuesta en el sistema de Grove en la primera parte de este trabajo vale para $*_{VC}$?

Esta es una manera de encarar la cuestión: estamos ante una particular forma de revisión que surge cuando estudiamos la lógica condicional. Hay otra manera obvia de analizar el teorema de inconsistencia, consistente en aferrarse en que los postulados de revisión clásicos son mas "naturales" y que por lo tanto algo debe andar mal con los postulados que se manejan para analizar la lógica condicional.

La principal vía argumentativa en esta vertiente es sostener que el test de Ramsey (que es la llave que nos ha permitido construir todo el sistema) es el culpable de todo el problema.

Una primera crítica que se ha hecho al test parte del hecho de que una mitad del test, la que afirma que:

Si $B \varepsilon K^*_A$, entonces $A > B \varepsilon K$

obliga a admitir demasiados condicionales en nuestro conjunto de creencias, tantos como posibles revisiones se efectúe en el conjunto K que se maneje.

aunque

Sin embargo esta no parece ser la mitad más conflictiva de (RT), ~~Por ejempl en el caso intuitivo que se usó para ilustrar la falla de (K^*_M), el verificar que C pertenece a K revisado con A, nos llevaría a admitir que $A > C \varepsilon K$. En el conjunto no expandido con $B \rightarrow -A$ no parece poco plausible suponer incluído el condicional. "Si el grupo sanguíneo de Juan fuese AB, Juan aún sería el padre de Claudia".~~

~~No pretendemos con esto dar un argumento,~~ probablemente puedan encontrarse casos poco intuitivos del uso de la mitad del (RT) que consideramos. Sin embargo las objeciones contra la otra mitad parecen más concluyentes aún. Nos referiremos a la mitad de (RT) que afirma:

Si $A > B \varepsilon K$, entonces $B \varepsilon K^*_A$

Gärdenfors (en Gärdenfors (1986)) cita un ejemplo debido a Stalneker (en Stalneker (1984)):

Supóngase que un sujeto acepta el condicional que sostiene que si Hitler hubiera decidido invadir Inglaterra en 1940, entonces habría ganado la guerra. Supongamos también que ese sujeto a raíz de ciertas investigaciones históricas revisa su conjunto de creencias de manera de incluir entre ellas una cuya negación probablemente aceptaba antes: esto es, que realmente Hitler decidió invadir Inglaterra en 1940, aunque nunca llevó a cabo su plan. ¿Significa esto que por el hecho de haber incluído el condicional anterior en su primer conjunto de creencias, deberá aceptar en su nuevo conjunto de creencias revisado que Alemania ganó la guerra? Parece obvio que no.

La respuesta de Gärdenfors es que justamente el ejemplo devela una nueva razón para dudar del test de Ramsey. Es claro que en una situación como la que antes explicitamos la decisión del sujeto será más bien eliminar el condicional de su conjunto de creencias que aceptar la evidente falsedad de que Alemania ganó la guerra. En términos epistémicos parece que la mitad del (RT) que se discute presupone que para cualquier par de sentencias A y B, los enunciados de la forma A > B tienen más importancia epistémica que A y que B. El ejemplo muestra que esto puede resultar muy incómodo. Aunque, tal vez, la perplejidad que produce el ejemplo de Stalneker esté causada por una cierta ambiguedad del condicional (tal vez la frase en el lenguaje natural realmente significa que si Hitler hubiera invadido Inglaterra, hubiera ganado la guerra; no que si hubiese decidido hacerlo la hubiese ganado), de todas formas, es claro que esta mitad del test parece conflictiva, y además, a primera vista, más conflictiva que la otra mitad.

En cuanto al tema que nos interesa la discusión tiene sentido ya que el test resulta, como hemos visto, muy útil para tratar los condicionales. Por eso abandonarlo totalmente sería pagar un precio muy caro. Por otro lado, aceptarlo tal como está nos lleva a tener que tratar con una revisión de propiedades no demasiado transparentes (en concreto la pérdida del principio (K^*_M) es también un precio elevado a pagar).

Esto ha llevado a tratar de encontrar otras formulaciones más débiles del test de Ramsey, capaces de generar una lógica condicional por lo menos aceptable, compatibles con, por lo menos, el principio de preservación.

Existen varios trabajos en este sentido. Hans Rott (ver Rott (1986)) y el propio Gärdenfors han publicado varios trabajos buscando formulaciones más débiles del test que al bloquear la derivación de la propiedad (K^*_M) eviten la inconsistencia de los principios formulaos y la preservación.

Sin embargo, sorprendentemente las versiones más débiles de (RT) derivan formas más débiles de la propiedad de monotonía con las que se reedita el resultado de inconsistencia. En la próxima sección mostraremos algunas de las reformulaciones posibles del test que se han estudiado y las razones de la reaparición de la inconsistencia. También mostraremos que algunas de las formas del test para las que aún no ha publicado una prueba de inconsistencia, son inconsistentes.

Antes de abandonar esta sección, sin embargo, citaremos la posición básicamente sustentada por Isaac Levi (en Levi (1980)) acerca del problema del test de Ramsey.

La idea de Levi consiste en discutir una suposición que tácitamente se acepta en la demostración de inconsistencia y de la cual el test mismo depende

(0) Los conjuntos de creencias contienen la conectiva condicional " > " entre sus elementos.

Dicho de otra manera, que la creencia en enunciados condicionales pertenece al tipo de conjuntos de creencias para los cuales ha sido definida la revisión. Hay otra posibilidad que ésta que tácitamente aceptamos al generar la semántica de contrafácticos y al demostrar la inconsistencia anteriormente, que consiste en pensar que la creencia en enunciados condicionales, es en realidad una creencia en conjuntos de creencias y en cómo estos pueden ser revisados.

Bajo este punto de vista, que es el que Levi acepta, el test de Ramsey debería ser reformulado como sigue:

Una sentencia $A > B$ es aceptable en relación a un cierto conjunto de creencias K SII $B \in K^*_A$

Como se ve en esta formulación del test de Ramsey no se acepta que una sentencia condicional pertenezca a un conjunto de creencias. De esta forma se bloquea la demostración de la propiedad de monotonía y la inconsistencia se levanta.

La solución de Levi es atrayente y para decidir sobre su utilidad habría que explorarla en detalle. Gärdenfors sugiere que uno de sus principales inconvenientes consiste en su capacidad para tratar con condicionales iterados.

No seguiremos aquí la línea de trabajo de Levi, pero es necesario acordar con él que el problema de aceptar o no condicionales en los conjuntos de creencias parece un problema no menor, y que alguna discusión sobre la viabilidad de (0) parece necesaria. Como adelantamos, aquí solamente pondremos en evidencia el supuesto discutido por Levi, sin más análisis.

IV. 4. <u>Reformulaciones de (RT) y más resultados de inconsistencia</u>

Ya en la anterior sección hemos mencionado algunas de las objeciones hechas al test de Ramsey. Puede agregarse aquí una nueva crítica al test, tal vez más concluyente que las previamente citadas. El problema consiste en que si aceptamos los axiomas para $*_{VC}$ formulados antes, el principio (U) es un teorema derivable de ellos:

(U) Si $A \in K$ y $C \in K$, entonces $A > C \in K$

Pueden, sin duda, construirse ejemplos bastante poco intuitivos en el caso de aceptar (U). Muchas de las versiones modificadas del test, entonces, han sido diseñadas de manera de que no impliquen (U). (también se busca, como se adelantó en la sección anterior bloquear la derivación de (K^*_M),para evitar la inconsistencia).

Algunas de las variantes propuestas son las siguientes:

(R1) $A > C \in K$ SII $C \in K^*_A$ y $C \notin K$

(R2) $A > C \in K$ SII $C \in K^*_A$ y $C \notin K^*_{-A}$

(R3) $A > C \varepsilon K$ SII $C \varepsilon (K^{-}_{C})^{*}_{A}$

(WR) Si $A \vee C \notin K$, entonces $A > C \varepsilon K$ SII $C \varepsilon K^{*}_{A}$

En lo sucesivo trabajaremos con (WR) ya que es la versión más débil de las aquí expuestas. Primero probaremos esto:

<u>Lema</u>

(1) (R1) implica (WR)

hip. 1. $A \vee C \notin K$

2. $C \notin K$ de (1) por lógica proposicional.

3. hip. $C \varepsilon K^{*}_{A}$

4. $A > C \varepsilon K$ por (R1)

5. hip. $A > C \varepsilon K$

6. $C \varepsilon K^{*}_{A}$ y $C \notin K$ por (R1)

7. $C \varepsilon K^{*}_{A}$

(2) (R2) y (K^{*}_{3}) implican (WR)

1. hip. $A \vee C \notin K$

2. $-A \rightarrow C \notin K$ de (1) por lógica prop.

3. $C \notin K_{-A}$ por definición de expansión

4. $C \notin K^{*}_{-A}$ de (3) y (K^{*}_{3})

5. hip. $C \varepsilon K^{*}_{A}$

6. $A > C \varepsilon K$ de 4 - 5, por (R2)

7. Si $C \varepsilon K^{*}_{A}$, entonces $A > C \varepsilon K$ de 5-6

8. hip. $A > C \varepsilon K$

9. $C \varepsilon K^{*}_{A}$ y $C \notin K^{*}_{-A}$ por (R2)

10. $C \varepsilon K^{*}_{A}$ de 9.

11. Si $A > C \varepsilon K$, entonces $C \varepsilon K^{*}_{A}$

12. $A > C \varepsilon K$ SII $C \varepsilon K^{*}_{A}$ de 11-7.

(3) (R3) y Si $C \notin K$, entonces $K^-_C = K$; implican (WR)

1. hip. $A \vee C \notin K$

2. $C \notin K$ de 1.

3. $K^-_C = K$ por el axioma de contracción citado arriba.

4. $A > C \in K$ SII $C \in K^*_A$ de (R3) y 3.

Vamos a mostrar ahora que los resultados de inconsistencia se reeditan para estas reformulaciones del test de Ramsey, o por lo menos que reaparecen para la más débil de todas las reformulaciones:(WR).

Para ello mostraremos primero que el (WR) implica una forma debilitada del principio de monotonía débil o (WM).

<u>Lema</u> II.

(WR) implica (WM).

Prueba:

1. hip. $K \subseteq K'$

2. hip. $A \vee C \notin K'$

3. hip. $C \in K^*_A$

4. $A \vee C \notin K$ de 2 - 1 por teoría de conjuntos.

5. $A > C \in K$ de 4 - 3 y (WR).

6. $A > C \in K'$ de 5 - 1.

7. $C \in K'^*_A$ de 2 - 6, (WR) y 2 MP.

<u>Teorema de inconsistencia</u>

Se mantiene en esta sección la definición anterior de sistema de revisión de creencias no trivial. También se usarán aquí los axiomas de expansión (I) y (II) anteriormente utilizados. Entonces:

No hay modelo de revisión de creencias no trivial que satisfaga sumultáneamente (K^*_{5w}), (K^*_4), y (WM).

Prueba

1. hip. $\vdash -(A \,\&\, B)$

2. hip. $\vdash -(A \,\&\, C)$

3. hip. $\vdash -(B \,\&\, C)$

4. hip. $-A \notin K$

5. hip. $-B \notin K$

6. hip. $-C \notin K$

7. $K \neq K_{\perp}$

8. K^{+}_{A}, K^{+}_{B}, K^{+}_{C}, $K^{+}_{A \vee C}$ son consistentes de 1 - 6.

9. $-(B \vee C) \notin K^{+}_{A \vee B}$

En efecto, $K^{+}_{A \vee B} \subseteq K^{+}_{B}$, por axioma de expansión (I) y si $-(B \vee C) \in K^{+}_{A \vee B}$, contra (9); $-B \in K^{+}_{A \vee B}$ y, por lo tanto, $-B \in K^{+}_{B}$. Como, por axioma de expansión, $B \in K^{+}_{B}$, esto implica que $K^{+}_{B} = K_{\perp}$, contra (8). Esto nos hace negar la hipótesis, lo que afirma (9).

10. Si $-(B \vee C) \notin K^{+}_{A \vee B}$, $(K^{+}_{A \vee B})^{+}_{B \vee C} \subseteq (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B \vee C}$ por instancia de (K^{*}_{4})

11. $(K^{+}_{A \vee B})^{+}_{B \vee C} \subseteq (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B \vee C}$ por MP., de 10 y 9.

12. $(K^{+}_{A \vee B})^{+}_{B \vee C} = K^{+}_{(A \vee B) \& (B \vee C)}$, instancia de $(K^{+}_{A})^{+}_{B} = K^{+}_{A \& B}$, axioma de expansión.

13. $(K^{+}_{A \vee B})^{+}_{B \vee C} = K^{+}_{B}$ de 12.

14. $K^{+}_{B} \subseteq (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B \vee C}$ de 13 - 11.

15. $B \in K^{+}_{B}$ por (K^{+}_{2})

16. $B \in (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B \vee C}$ de 14 y 15

17. $K^{+}_{A \vee B} \subseteq K^{+}_{A}$ por axioma de expansión

18. $B \vee C \notin K^{+}_{A}$ ya que $\vdash A \rightarrow -C$ y $\vdash A \rightarrow -B$, de (2) y (1), y por lo tanto $-C$ y $-B$ pertenecen a K^{+}_{A}; por (8) ni B ni C pertenecen a K^{+}_{A}.

19. $(B \vee C) \vee B \notin K^{+}_{A}$ por lógica proposicional de (18)

20. Si $K^{+}_{A \vee B} \subseteq K^{+}_{A}$, $B \varepsilon (K^{+}_{A \vee B})^{*}_{B \vee C}$, y $(B \vee C) \vee B \notin K^{+}_{A}$, entonces

$B \varepsilon (K^{+}_{A})^{*}_{B \vee C}$, por instancia de (WM)

21. $B \varepsilon (K^{+}_{A})^{*}_{B \vee C}$ de 20, 19, 17, 16 y MP.

Si se considera $(K^{+}_{A \vee C})^{*}_{B \vee C}$, puede mostrarse de idéntica manera que antes que $C \varepsilon (K^{+}_{A})^{*}_{B \vee C}$.

O sea que $B \,\&\, C \varepsilon (K^{+}_{A})^{*}_{B \vee C}$, de la conclusión anterior y (21). Pero por (3), $\vdash -(B \,\&\, C)$, por lo que $(K^{+}_{A})^{*}_{B \vee C} = K_{\perp}$, lo que contradice (K^{*}_{5w}), probando el teorema.

El teorema que hemos expuesto más arriba muestra que el resultado de inconsistencia reaparece al debilitar el test.

Existen, sin embargo, maneras de debilitar aún más el test de Ramsey, para las que aún no se ha probado un teorema de inconsistencia: se trata de:

(R4) $A > C \varepsilon K$ SII $-A \varepsilon K$ y $C \varepsilon K^{*}_{A}$

(R5) Si $-A \varepsilon K$, entonces $A > C$ SII $C \varepsilon K^{*}_{A}$

Como se ve, sobre todo en la formulación (R5), las versiones anteriores se aplican solamente cuando el condicional bajo análisis es <u>realmente</u> un contrafáctico, o sea cuando $-A \varepsilon K$.

De la más débil de las dos versiones del test de Ramsey dadas más arriba, o sea de (R5), puede derivarse también una monotonía débil. Si bien (R5) es comentado en un trabajo reciente de Gärdenfors (Gärdenfors (1986)), no se han publicado derivaciones de monotonías débiles derivadas de este principio, probablemente por el escepticismo de Gärdenfors y Rott respecto a la posibilidad de encontrar un resultado de inconsistencia para (R5). Derivaremos aquí una monotonía débil de (R5) y luego usaremos la demostración que se expondrá en II. para derivar una inconsistencia con la operación de contracción. Estrictamente esto no significa derivar una inconsistencia al estilo de las pruebas de Gärdenfors sino que estrictamente se mostrará que la monotonía derivable de (R5) es inconsistente con (K^{*}_{5}) o mejor dicho que (WM-) la monotonía que derivaremos de (R5), formulada para para operación de contracción es inconsistente con los análogos de (K^*_4) y (K^*_5) en la operación de contracción, esto es con (K^-_3) y (K^-_4).

De idéntica manera a como se procederá, en la sección VI. se puede implementar la prueba para revisión. No reiteraremos aquí lo dicho antes sobre el significado de la prueba. Simplemente anotamos que el resultado indica que la aceptación de (R5) obliga, al menos, a la reformulación de (K^*_5), en el sentido, reñido con la contracción clásica, de que la revisión de un conjunto inconsistente puede ser inconsistente.

<u>Lema III</u>

(R5) implica (WM-),

donde (WM-) Si $K \subseteq K'$ y $-A \in K$, y $C \in K^*_A$, entonces $C \in K'^*_A$.

<u>Prueba</u>

1. hip. $K \subseteq K'$
2. hip. $-A \in K$
3. hip. $C \in K^*_A$
4. $A > C \in K$ de 2-3 y (R5)
5. $A > C \in K'$ de 4-1
6. $-A \in K'$ de 1-2
7. $C \in K'^*_A$ de (R5), 5-6.

Consideremos, entonces, la versión de (WM-), para la operación de contracción que denominaremos (WCM):

(WCM) Si $K \subseteq K'$ y $-A \in K$, y $C \in K^-_A$, entonces $C \in K'^-_A$

Recordemos el significado de los principios (K^-_3) y (K^-_4):

(K^-_3) Si $A \notin K$, entonces $K^-_A = K$

(K^-_4) Si $\nvdash A$, entonces $A \notin K^-_A$

Puede, entonces formularse el siguiente principio de inconsistencia:

No hay modelo de contracción de creencias que satisfaga simultáneamente a (WCM) (K^-_3), (K^-_4).

Prueba

Consideramos aquí las mismas condiciones manejadas en la prueba de la sección

O sea un conjunto K que satisface las hipótesis de no trivialidad de la prueba de Gärdenfors, y dos expansiones de ese conjunto: (K_A^+) y (K_B^+). A su vez llamamos $S = Cn\ (K_A^+ \cup K_B^+)$

O sea, S es la teoría, inconsistente, generada por las consecuencias lógicas de la unió de las dos expansiones anteriores. Entonces:

1. $K_A^+ \subseteq S$ ya que K_A^+ es consistente.
2. $-C \in K_A^+$ ya que $\vdash -(A \,\&\, C)$ por hipótesis
3. $C \notin K_A^+$ por consistencia de K_A^+
4. $-C \in K_B^+$ por $\vdash -(C \,\&\, B)$
5. $C \notin K_B^+$ por consistencia de K_B^+
6. Si $C \notin K_B^+$ entonces $(K_B^+)_C^- = K_B^+$ por (K_3^-)
7. Si $C \notin K_A^+$ entonces $(K_A^+)_C^- = K_A^+$ por (K_3^-)
8. $K_B^+ \subseteq S$ por consistencia de K_B^+
9. $B \in K_B^+$
10. $B \rightarrow C \in K_A^+$
11. $(K_A^+)_C^- = K_A^+$ de 7-3, MP.
12. $(K_B^+)_C^- = K_B^+$ 5-6, MP.
13. $B \in (K_B^+)_C^-$ 9-12
14. $B \rightarrow C \in (K_A^+)_C^-$ 11-10
15. $B \in S_C^-$ por (WCM), 1,4,13.
16. $B \rightarrow C \in S_C^-$ también por (WCM).
17. $C \in S_C^-$ de 15-16
18. $C \notin S_C^-$ por $\nvdash C$ y (K_3^-)

Aparentemente como mínimo, (WCM) entra en colisión con el principio (K_4^-) que asegura que la contracción de un conjunto de creencias con un enunciado es consistente, a menos que el enunciado sea una tautología. Tal vez (WCM) también lleve a aceptar una revisión que posea la propiedad de que la revisión de un conjunto inconsistente puede ser ella misma inconsistente.

En la sección que sigue recapitularemos, a la luz de lo desarrollado hasta aquí las relaciones lógicas entre los postulados de $*_{VC}$ y los de Gärdenfors (1979).

IV. 5. Influencia de la debilitación de K_4^* en los postulados de $*_{VC}$

Como hemos visto no es posible aceptar (K_4^*) entre los postulados de $*_{VC}$. La modificación de (K_8^*) puede comprenderse como una consecuencia de la necesidad de abandonar (K_4^*). En efecto, la instancia de (K_8^*) en que se sustituye A por B, da como resultado Si $-A \notin K_A^*$, entonces $(K_A^*)_A^+ \subseteq K_A^*$, y como al iterar una vez una operación de revisión se obtiene idéntico resultado que al aplicarla una sola vez, el enunciado anterior es una instancia de (K_4^*).

De esta manera si se mantiene (K_8^*) se está manteniendo tácitamente a (K_4^*), cosa que ya hemos visto no puede hacerse. Será necesario, entonces, conseguir una versión de (K_8^*) que no implique (K_4^*) y además sea razonable, desde el punto de vista de lo que nos proponemos, o sea el tratamiento lógico de los condicionales. Daremos algunas razones a favor de la elección que se ha hecho al generar la semántica de contrafácticos.

Si observamos (K_7^*) y (K_8^*) vemos que en ambos casos se consideran las relaciones entre la revisión de un conjunto de creencias con una conjunción y el resultado de revisar primero el conjunto con uno de los conyuntos y luego expandir el resultado de esta revisión con el otro conyunto. En el caso de (K_7^*) no es necesario agregar ninguna condición a la relación de inclusión. En efecto el caso límite a considerar, esto es, cuando la expansión genera $K_\perp$ no presupone problema alguno ya que cualquier conjunto está incluido en $K_\perp$.

En cambio en el caso de (K^*_8) este mismo caso límite puede generar problemas, que, en la primera versión de los postulados para revisión, que hemos dado en llamar clásica, se filtran agregando la condición $-B \notin K^*_A$.

Conceptualmente la idea es que <u>B podría ser aceptado toda vez que A hubiese sido aceptado</u>. En rigor esta frase en lenguaje natural admite dos interpretaciones en lenguaje técnico-lógico: o bien $-B \notin K^*_A$, o bien $-(A > -B) \in K$. La primera de estas formulaciones es la que ya hemos visto, aparece en el antecedente de (K^*_4) y debemos descartarla. La otra opción es la elegida al dar postulados para $*_{VC}$.

Dijimos antes que tanto $-B \notin K^*_A$ como $-(A > -B) \in K$ son dos maneras de interpretar la idea de que <u>si A fuese aceptado, B podría serlo</u>. Esto no quiere decir que ambas formulaciones sean equivalentes lógicamente. Si esto fuera así estariamos en el punto de partida, ya que podría derivarse todavía (K^*_4) aún cuando cambiásemos $-B \notin K^*_A$ por $-(A > -B) \in K$.

En efecto mientras que $-(A > -B) \in K$ implica $-B \notin K^*_A$, la conversa no se da. De esta manera Si $-A \notin K^*_A$, ent. $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \,\&\, B}$ no puede derivarse de: Si $-(A > -B) \in K$, entonces $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \,\&\, B}$. Dado que (K^*_4) tampoco se deriva de (K^*_{8w}) se elimina toda posibilidad de inconsistencia de (K^*_{8w}) con (RT), y, a su vez se mantiene la idea que motivó el agregado de $-B \notin K^*_A$ como condición de $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \,\&\, B}$; expresada en la frase de lenguaje cotidiano como: "si A fuese aceptado en K, entonces B podría ser aceptado en K también".

Queda por mostrar que realmente $-(A > -B) \in K$ implica $-B \notin K^*_A$, pero no a la inversa. Este último caso es claro. En efecto, sólo de $-B \notin K^*_A$ se puede derivar $-(A > -B) \in K$ en el caso de que valga el principio de que, o bien $(A > -B) \in K$ o bien $-(A > -B) \in K$. Si este principio valiese, por (RT) de $-B \notin K^*_A$ se deriva $(A > -B) \notin K$ y por el principio aludido antes $-(A > -B) \in K$, completando la derivación. Pero tal principio no se deriva de las condiciones impuestas a la función de revisión en un sistema de revisión de creencias.

En el caso contrario, (o sea en el caso $-(A > -B) \in K \rightarrow -B \notin K^*_A$, de la aceptación en K de $-(A > -B)$, si nos manejamos con un $K \neq K_\perp$, sólo por la aplicación de (RT) se deriva $-B \notin K^*_A$.

Antes de abandonar el punto aclararemos una cierta inconsecuencia a la que se ve obligado Gärdenfors cuando elige "$-(A > -B) \in K$" como la expresión lógica de la frase "si A fuese el caso, entonces B podría ser el caso.".

En realidad, las dos fórmulas propuestas antes para traducir esta frase corresponden a dos análisis debidos respectivamente a David Lewis y Stalnaker de un tipo de condicionales (might conditionals).

En el caso de Lewis, la idea central que le anima cuando analiza una frase como la que nos ocupa es que si se emite

(A) Si A fuese el caso, entonces B podría ser el caso.

no puede emitirse y aceptarse en un conjunto dado de creencias, sin contradicción, la frase:

(B) Si A fuese el caso, B no sería el caso.

En efecto, si se introduce el símbolo " $\Diamond\!\!\rightarrow$ " para el tipo de condicional usando al emitir (A), Lewis entiende que

1) $A \Diamond\!\!\rightarrow B$ SII $-(A > -B)$

La expresión lógica de (B) es

2) $A > -B$

y, obviamente (1) y (2) entran en contradicción.

Muy por el contrario, Stalnaker piensa, y Gärdenfors también, que puede aceptarse en un cierto K una frase como (A) y luego una como (B) sin contradicción alguna. El punto es que el análisis de Stalnaker de enunciados como (A), es el siguiente:

$A \Diamond\!\!\rightarrow B \in K$ SII $-B \notin K^*_A$

Como hemos visto antes de $-B \notin K^*_A$ no se deriva $-(A > -B) \in K$, sino sólo a la inversa, por lo que la aceptación de (A) no conlleva la aceptación de $-(A > -B)$. De esta manera la posterior aceptación en un conjunto de creencias K de $(A > -B)$, en el que se ha aceptado $A \diamond\!\!\rightarrow B$, no conlleva contradicción.

Decíamos que Gärdenfors piensa que el análisis correcto de enunciados del tipo A) es el de Stalnaker. Sin embargo al modificar (K^*_8) se ve obligado a utilizar un análisis tipo Lewis de (A).

Gärdenfors (en Gärdenfors (1986)) suministra un ejemplo en favor del análisis tipo Stalneker de condicionales "might":

Yo podría aceptar sin demasiados problemas el siguiente enunciado: "Si jugase un partido de ajedrez con Idi Amin, podría ganar el juego". Sin embargo si a raíz de posteriores informaciones acerca de las extraordinarias y sin duda sorprendentes, habilidades ajedrecísticas de Idi Amin aceptara que en caso de jugar con Amin perdería el juego, en el mismo conjunto de creencias en que acepté el condicional anterior no por esto pensaría que este conjunto de creencias se ha vuelto inconsistente.

IV. 6. <u>Relaciones lógicas entre (K^*_4) y (K^*_{4w}), (K^*_5) y (K^*_{5w}). (K^*_8) y (K^*_{8w})</u>

(K^*_{5w}) Si $K \neq K_\perp$ y $K^*_A = K_\perp$, entonces $\vdash \neg A$.

y

(K^*_5) Si $K^*_A = K$, entonces $\vdash \neg A$

tienen una relación simple. K^*_5 implica K^*_{5w}, simplemente por la ley de refuerzo del antecedente.

En cuanto a los restantes principios

<u>Lema (a)</u>

K^*_4, K^*_3 implican : Si $A \in K$ y $K \neq K_\perp$, entonces $K \subseteq K^*_A$

<u>Prueba</u>

hip. 1. $A \in K$

hip. 2. $K \neq K_{\perp}$

3. $A \notin K$ de 1 y 2

4. $K^{+} \subseteq K^{*}_{A}$ de K^{*}_{4}

5. $K \subseteq K^{+}_{A}$ de K^{+}_{3}

6. $K \subseteq K^{*}_{A}$ de 4 y 5 NOTA. Δ

Lema (b)

K^{*}_{3} y K^{+}_{4}, implican (c8b)

Prueba

hip. 1. $A \in K$

3. $K^{*}_{A} \subseteq K^{+}_{A}$ de K^{*}_{3}

4. $K^{+}_{A} = K$ de K^{+}_{4}

5. $K^{*}_{A} \subseteq K$

NOTA Δ Este principio, si $A \in K$ y $K \neq K_{\perp}$, entonces $K \subseteq K^{*}_{A}$, no es el usado por Gärdenfors, quien no pide en (c8a) que $K \neq K_{\perp}$.

V PROPIEDADES DE LA NOCION DE REVISION APROPIADAS PARA GENERAR UNA SEMANTICA EPISTEMICA DE LOS CONTRAFACTICOS

V. I. NUEVOS TEOREMAS DE INCONSISTENCIA

Consideremos el siguiente principio que llamaremos (M-)

Si $K \subseteq K'$, entonces $K^-_A \subseteq K'^-_A$

Obviamente (M-) es una versión del principio de monotonía esta vez formulado para la operación de contracción.

Existen dos postulados de la función de contracción, virtuales candidatos a ser inconsistentes con (M-), al menos, en primera instancia, por su parecido formal con (K^*_4) y (K^*_5). Se trata de:

(K^-_3) Si $A \notin K$, entonces $K^-_A = K$ (vacuidad)

(K^-_4) Si $\nvdash A$, entonces $A \notin K^-_A$ (suceso)

El orígen intuitivo de los nombres colocados entre paréntesis a los postulados expuestos es obvio: en un caso se trata de un postulado que aclara el caso en que la función de contracción actúa vacuamente, o sea fracasa en extraer A de K. En el otro caso se expresa la condición para que la contracción sea exitosa y logre extraer A de K.

Puede probarse entonces el siguiente teorema:

<u>Teorema de inconsistencia para la contracción</u>: No hay modelo de contracción de creencias no trivial que satisfaga simultáneamente los postulados (M-), (K^-_3) y (K^-_4).

<u>Prueba</u>

<u>Nota introductoria</u>:

En la prueba, como ya es habitual, partimos de un conjunto K, consistente con tres sentencias cualesquiera A,B, y C (que no son leyes lógicas de alguna lógica) que a su vez son disjuntas de a pares.

Luego consideramos las dos extensiones de K: (K^+_A) y (K^+_B), ambas consistentes por hipótesis. Como lo indica el diagrama, estas expansiones son tales que la senten-

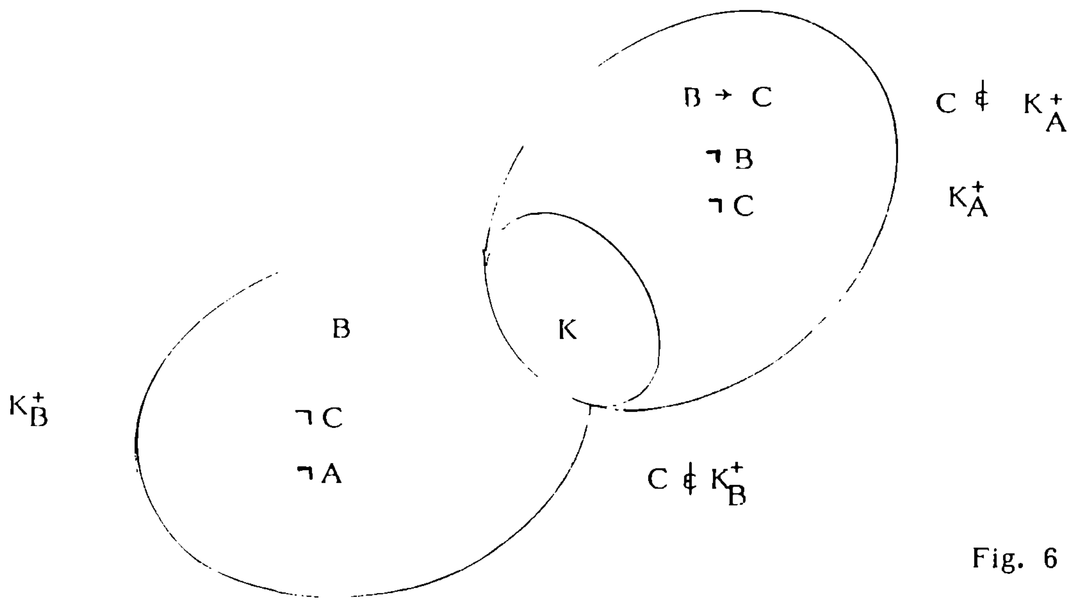


Fig. 6

cia C no pertenece a ninguna de ellas. Puede verse además que $B \to C \in K^{+}_{A}$ y $B \in K^{+}_{B}$ (de la misma manera $A \to C \in K^{+}_{B}$ y $A \in K^{+}_{A}$). Por tanto o es claro que, por (K^{-}_{3}) la contracción con C de cualquiera de estas dos expansiones deja los conjuntos de creencias expandidos sin cambio alguno. Pero tanto K^{+}_{A}, como K^{+}_{B} están contenidos en la teoría inconsistente S, resultado de tomar las consecuencias lógicas de las dos expansiones. Esto no es sorprendente. El punto es que, por (M-) las expansiones contraídas con C permanecerán dentro de la teoría inconsistente contraída con C. Dado que C no es un teorema, C no pertenece a ninguna teoría revisada con C (incluyendo la inconsistente). Pero es claro que C pertenece a S^{-}_{C}, ya que tanto $(K^{+}_{A})^{-}_{C}$ como $(K^{-}_{B})^{-}_{C}$, o sea K^{+}_{A} y K^{+}_{B} pertenecen a S^{-}_{C} (recordemos que $B \to C \in K^{+}_{A}$, y $B \in K^{+}_{B}$, y que dado que S^{-}_{C} es una teoría y todas las consecuencias lógicas de los enunciados que pertenecen a la teoría, pertenecen a la teoría). Expondremos ahora detalladamente la prueba:

$O \nvdash C$

1. hip. $\vdash$ -(A & B)
2. hip. $\vdash$ -(C & B)
3. hip. $\vdash$ -(A & C)

4. hip. $-A \notin K$

5. hip. $-B \notin K$

6. hip. $-C \notin K$

7. $K \neq K_{\perp}$

8. K^+_A y K^+_B son ambos consistentes.

9. $S = Cn(K^+_A \cup K^+_B) = K_{\perp}$

10. $K^+_A \subseteq S$ ya que $S = K_{\perp}$

11. $K^+_B \subseteq S$ idem. (10)

12. $(K^+_A)^-_C \subseteq S^-_C$ por (M-)

13. $(K^+_B)^-_C \subseteq S^-_C$ por (M-)

14. $-C \in K^+_A$ por $A \in K^+_A$ y (3)

15. $-C \in K^+_B$ por $B \in K^+_B$ y (2)

16. $C \notin K^+_A$ por (8) y (15)

17. $C \notin K^+_B$ por (8) y (16)

18. $B \in K^+_B$

19. $B \to C \in K^+_A$ ya que $-B \in K^+_A$ 9 por (1) y lógica proposicional.

20. Si $C \notin K^+_A$, entonces $(K^+_A)^-_C = K^+_A$ instancia de (k^-_3).

2. $(K^+_A)^-_C = K^+_A$ por (20) y (16), MP.

22. Si $C \notin K^+_B$, entonces $(K^+_B)^-_C = K^+_B$ instancia de (K^-_3)

23. $(K^+_B)^-_C = K^+_B$ por (22) y (17), MP.

24. $K^+_A = S^-_C$ por (12), (21)

25. $K^+_B = S^-_C$ por (13), (23).

26. Si $B \to C \in K^+_A$, entonces $B \to C \in S^-_C$ por (24)

27. $B \to C \in S^-_C$ por (26), (19), MP.

28. Si $B \in K^+_B$, entonces $B \in S^-_C$ por (25)

29. $B \in S^-_C$ por (28), (18), MP.

30. $C \in S^-_C$ por (29) y (27) y definición de teoría

Δ

Este resultado debería ser una consecuencia inmediata del resultado de inconsistencia presentado en IV.2. Se expone aquí la prueba con el motivo de mostrar una forma -tal vez- más sencilla de presentarla y por las razones que se explicitarán en la Observación II de la página 83.

31. Si $\nvdash C$, entonces $C \notin S^{-}_{C}$ instancia de (K^{-}_{4})

32. $C \notin S^{-}_{C}$ por (0), (31), MP.

Una pregunta que surge inmediatamente del resultado anterior es: no podrá plantearse un resultado de inconsistencia de factura similar para la función de revisión. En realidad veremos que sí se puede plantear pero entre los postulados (K^{*}_{4}) (K^{*}_{M}) y (K^{*}_{5}) de revisión. En realidad una prueba de inconsistencia del tipo presentado arriba para la revisión más bien mostrará ciertas peculiaridades vinculadas a la revisión del conjunto inconsistente que a la incompatibilidad de (K^{*}_{P}) con (K^{*}_{M}). O sea mostrará la incompatibilidad de dos postulados de la revisión clásica (K^{*}_{4}), (K^{*}_{5}) con uno de los postulados de $*_{VC}$. Por razones que luego estableceremos más bien establecerá la incompatibilidad de (K^{*}_{M}) con (K^{*}_{5}), y la necesidad del abandono de (K^{*}_{5}), así como la necesidad de aceptar (K^{*}_{5w}) entre los postulados de $*_{VC}$. Pero vayamos por partes, primero mostraremos el resultado de inconsistencia entre (K^{*}_{M}), (K^{*}_{4}) y (K^{*}_{5}). Luego mostraremos que en el caso estudiado la falla del principio de preservación no salva la inconsistencia (en realidad mostraremos algo más débil que ésto) utilizando la función F de Gardenfors que modela en mundos posibles la revisión para $*_{VC}$. Finalmente discutiremos las relaciones entre (K^{*}_{4}) y (K^{*}_{5w}).

V. I. 2.

Observación I

No hay sistema no trivial de revisión de creencias que satisfaga simultáneamente los postulados: (K^{*}_{M}), (K^{*}_{4}) y (K^{*}_{5}) y (K^{*}_{3}), (K^{*}_{2}) ver nota pág 78.

Prueba

Nota introductoria

La estructura de la prueba es en todo similar a la hecha para la contracción sólo que aquí consideraremos la revisión respecto a -C. La idea aquí es que, dado que -C pertenece a las expansiones con A y con B de K, y ambas expansiones son consistentes, entonces C no pertenece a ninguna de ellas (propiedad que también fue usada en la prueba para la contracción). Por tanto, de acuerdo a (K^*_3) y (K^*_4) las expansiones de K con A y con B, a su vez expandidas con -C son iguales a las revisiones de (K^+_A) y (K^+_B), con -C. A su vez estas expansiones con -C son idénticas a los conjuntos expandidos, dado que -C pertenece a ellas (esto por el postulado (K^+_4) de expansión).

Luego aplicando la propiedad de monotonía, como sucedió en el caso anterior, las expansiones de K con A y B respectivamente quedan incluídas en el conjunto S revisado con -C. Dado (K^*_5), , debido a que C no es una tautología, S^*_C es consistente. Sin embargo, -C ε S^*_{-C}, (K^*_2), y del hecho de que las expansiones K^+_A y K^+_B están incluídas en S^*_{-C} resulta que C ε S^*_{-C}. Formularemos ahora la prueba detalladamente:

0. $\nvdash$ C

1. hip. $\vdash$ -(A & B)

2. hip. $\vdash$ -(B & C)

3. hip. $\vdash$ -(A & C)

4. hip. -A $\notin$ K

5. hip. -B $\notin$ K

6. hip. -C $\notin$ K

7. K $\neq$ $K_\perp$

8. K^+_A y K^+_B son consistentes.

En la prueba se utilizarán además los siguientes postulados de expansión:

(K_4) Si A ε K, entonces K^+_A = K

y, por comodidad, aunque podría evitarse, (K^*_2)

9. $K^+_A \subseteq$ S ya que S = $K_\perp$, y (8).

10. $K^+_B \subseteq$ S por S = $K_\perp$, y (8).

11. $(K^+_A)^*_{-C} \subseteq S^*_{-C}$ por (K^*_M)

12. $(K^+_B)^*_{-C} \subseteq S^*_{-C}$ idem. (11)

13. $-C \in K^+_A$ por (3).

14. $-C \in K^+_B$ (2)

15. $C \notin K^+_A$ por (13) y (8)

16. $C \notin K^+_B$ por (14) y (8)

17. Si $C \notin K^+_A$, entonces $(K^+_A)^+_{-C} = (K^+_A)^*_{-C}$ instancia de (K^*_3) y (K^*_4)

18. Si $C \notin K^+_B$, entonces $(K^+_B)^+_{-C} = (K^+_A)^*_{-C}$ idem. (17)

19. $(K^+_A)^+_{-C} = (K^+_A)^*_{-C}$ de (17) y (15)

20. $(K^+_B)^+_{-C} = (K^+_B)^*_{-C}$

21. Si $-C \notin K^+_A$, entonces $(K^+_A)^+_{-C} = K^+_A$ instancia de (K^+_4)

22. Si $-C \notin K^+_B$, entonces $(K^+_B)^+_{-C} = K^+_B$ idem. (21)

23. $(K^+_A)^+_{-C} = K^+_A$ de (13) y (21)

24. $(K^+_B)^+_{-C} = K^+_B$ de (14) y (22)

25. $K^+_A \subseteq S^*_{-C}$ por (11), (19), (23)

26. $K^+_B \subseteq S^*_{-C}$ por (12), (20), (24)

27. $B \rightarrow C \in K^+_A$ por $-B \in K^+_A$ (por (1)) y lógica prpo.

28. $B \in K^+_B$

29. Si $B \rightarrow C \in K^+_A$, entonces $B \rightarrow C \in S^*_{-C}$ de (25)

30. Si $B \in K^+_B$, entonces $B \in S^*_{-C}$ de (26)

31. $B \rightarrow C \in S^*_{-C}$ de (27) y (29), MP.

32. $B \in S^*_{-C}$ de (27) y (30), MP.

33. $C \in S^*_{-C}$ de (31) y (32).

34. $-C \in S^*_{-C}$ de (K^*_2)

35. $S^*_{-C} = K_\perp$ de (33) y (34)

36. Si $\nvdash C$, entonces $S^*_{-C} \neq K_\perp$ instancia de (K^*_5)

37. $S^*_{-C} \neq K_\perp$ de (0) y (36)

En lo sucesivo trataremos de contestar dos preguntas:

(1) ¿Podría obtenerse el resultado anterior sustituyendo (K^*_5) por (K^*_{5w})?

*'

Estrictamente esto sólo podrá ser afirmado luego de mostrar la Observación II.

(2) ¿La falla de K^*_4 y K^*_5, esto es, fundamentalmente de K^*_P permitiría salvar la inconsistencia?

(1) Recordemos el enunciado de (K^*_{5w}):

(K^*_{5w}) Si $K \neq K_\perp$ y $K^*_A = K_\perp$, entonces $\vdash -A$

o, de otra manera:

Si $\vdash -A$, entonces o bien $K = K_\perp$, o bien $K^*_A \neq K_\perp$

En rigor no nos proponemos aquí contestar la pregunta (1) -esto requeriría demostrar o bien que es imposible el resultado de inconsistencia colocando K^*_{5w} en vez de K^*_5, o bien demostrar un teorema de inconsistencia usando K^*_{5w} en vez de K^*_5 - sino sólo hacer algunas consideraciones acerca de si, manteniendo la estructura de la prueba anterior, K^*_{5w} llevaría a una inconsistencia. Queremos hacer ênfasis en el hecho de que K^*_{5w} no asegura que la revisión de un conjunto inconsistente con una sentencia no contradictoria es consistente. Esto es lo que se necesita para completar la prueba anterior. Del hecho de haber probado que dos enunciados contradictorios pertenecen a S^*_{-C} sólo podemos llegar a una contradicción si sabemos que la revisión de un conjunto inconsistente con un enunciado no contradictorio es consistente. K^*_{5w}, en cambio, sólo asegura que la revisión de un conjunto inconsistente con un enunciado no contradictorio, o bien puede ser inconsistente, o bien consistente. Pero no necesariamente deberá ser consistente, por lo que la prueba anterior, tal como está planteada no generaría una contradicción de los supuestos asumidos cambiando K^*_5 por K^*_{5w}. De todas maneras, el resultado anterior es concluyente en cuanto no podrá adoptarse entre los postulados de $*_{VC}$ a K^*_5, mientras que alguna versión como K^*_{5w}, que permita que la revisión de un conjunto inconsistente con una sentencia no contradictoria sea inconsistente, deberá ser adoptada. *' ver dorso pág. 81.

En cuanto a la pregunta (2) nos conducirá a un resultado interesante que tal vez muestre la verdadera aplicación de la prueba desarrollada para la contracción, cuando es aplicada a la revisión.

Observación II

No hay sistema de revisión de creencias no trivial que satisfaga simultáneamente los postulados (K^*_{4w}), (K^*_M) y (K^*_5) y (K^*_{3w}),(K^*_2)

Esquema de prueba

Recordemos que (K^*_{3w}) y (K^*_{4w}) simultáneamente afirman:

Si $A \in K$, entonces $K = K^*_A$

Ahora consideremos la prueba de inconsistencia anterior. Los pasos (19) a (24), permiten afirmar que $K^+_A = (K^+_A)^*_{-C}$ y $K^+_B = (K^+_B)^*_{-C}$. Pero este mismo resultado puede lograrse con la instancia expuesta más abajo de (K^*_{3w}) y (K^*_{4w}):

Si $-C \in K^+_A$, entonces $(K^+_A)^*_{-C} = K^+_A$; y a su vez

Si $-C \in K^+_B$, entonces $(K^+_B)^*_{-C} = K^+_B$

y por (13) y (14) de la prueba anterior, tenemos los consecuentes de los condicionales anteriores ($(K^+_A)^*_{-C} = K^+_A$ y $(K^+_B)^*_{-C} = K^+_B$), que es lo afirmado en (23) y (24). El resto de la prueba no tiene modificaciones.

Comentario de la prueba

El resultado anterior muestra claramente la incompatibilidad entre cuatro de los postulados de $*_{VC}$ y K^*_5 , lo que a su vez, indica que K^*_5 debe ser abandonado cuando se construyen los axiomas para $*_{VC}$.

El resultado que Gärdenfors muestra es que K^*_4 es incompatible con K^*_M y con K^*_{5w} , lo que muestra que K^*_4 debe ser abandonado como posible postulado para $*_{VC}$. Pero el haber construído la prueba con K^*_{5w} no indica que la prueba no podría haber sido construída con K^*_5 . De otra manera la prueba de Gardenfors no muestra que K^*_5 debe ser abandonado cuando se construye una noción de revisión apta para tratar la semántica de los contrafácticos.

A esto se agrega que K^*_5 no es utilizado -al menos en la versión de Gärdenfors (1979)- como condición a imponer sobre la función definida en el sistema de revisión de creencias, lo que induciría a pensar que estamos en libertad de colocarlo entre los postulados para $*_{VC}$, o no.

El resultado anterior muestra que K^*_5 debe ser abandonado, e indica que deberá ser sustituído por un postulado que permita que la revisión de un conjunto inconsistente sea ella misma inconsistente. Como vimos, K^*_{5w} no establece esto directamente sino solamente la posibilidad de que tal revisión sea inconsistente, nada más.

V. II. PROPIEDADES DEL MODELO DERIVADO DE LEWIS DE LA REVISION $*_{VC}$

V. II. 1. <u>Es inconsistente la revisión de un conjunto inconsistente?</u>

Los modelos de Gärdenfors y Grove en mundos posibles para $*_{VC}$ y la revisión clásica.

Tanto Gärdenfors como Grove han ofrecido modelos en mundos posibles para las funciones de revisión. Gärdenfors en (Gärdenfors (1979) ha ofrecido un modelo para la función de revisión que se utiliza al construir la semántica de contrafácticos. Se trata de la función F que se introduce en el par $\langle \mathbb{P}, F \rangle$. Recordemos que este par es lo que Gärdenfors llama un modelo correspondiente al $\mathbb{M}$ de Lewis.

Dado un cierto conjunto de creencias P^X y un enunciado A la función F elegía los A-mundos más cercanos a cada uno de los mundos de X.

A su vez, Grove construye un modelo en mundos posibles, pero para la función de revisión clásica.

La función en cuestión era f_S. Dada una sentencia A y una cierta teoría P^X (usando la nomenclatura de Gärdenfors), $f_S(A)$ elegía los A-mundos más cercanos a X.

Cuando se comparan ambos modelos de nociones de revisión sin demasiada atención, se siente cierta perplejidad. En efecto, ambas nociones de revisión parecen tener modelos demasiado similares a pesar de diferir en muchos de sus postulados -de manera esencial- como muestran los resultados de inconsistencia que hemos mostrado antes.

Grove en su trabajo dedica unas palabras a enumerar las diferencias de su modelo y el de Lewis para los contrafácticos. No hay ninguna alusión a la noción de revisión usada por Gärdenfors para construir su semántica. De todas maneras la mención de Grove en su trabajo puede ser de utilidad para comenzar a comprender las diferencias entre la F de Gärdenfors y la f_S de Grove (o lo que es lo mismo las diferencias entre las nociones de revisión que modelizan). Dice Grove:

"Hay varias diferencias entre el enfoque de Lewis y el utilizado aquí. Muchas de ellas son comparativamente menores: por ejemplo Lewis requiere que su sistema esté cerrado bajo uniones e intersecciones. Sin embargo la más importante diferencia entre el uso de las esferas por Lewis y el hecho en este trabajo es que aquí el sistema de esferas está centrado en subconjuntos arbitrarios de M_L (recordemos que M_L es el conjunto de mundos posibles)." Y más adelante: "El uso de Lewis del sistema de esferas, para el análisis de los contrafácticos, involucra, esencialmente, un sistema de esferas para cada mundo individual en M_L (a los efectos de modelizar los condicionales que son verdaderos en ese mundo). Por lo tanto, el principal interés de Lewis es en sistemas de esferas centradas en mundos individuales. Este énfasis en mundos individuales no es apropiado para modelizar la teoría del cambio de creencias."

Las observaciones de Grove pueden ser útiles para comprender las diferencias entre la F de Gärdenfors y la f_S de Grove. También la F de Gärdenfors modeliza una noción de revisión de teorías y para ella vale la observación general de Grove a propósito de que no trabajará con mundos individuales. Siempre una teoría es un subconjunto de conjuntos de mundos posibles. Sin embargo, vemos que la modelización de Gärdenfors obtiene los A-mundos más cercanos a una cierta teoría, seleccionando los A-mundos más cercanos a cada uno de los mundos que componen la teoría, o mejor dicho el conjunto de mundos en los cuales todas las sentencias de la teoría son verdaderas.

La f_S de Grove no opera de la misma manera. Recordemos que $f_S(A) = /A/ \cap c_X(A)$

si X es un conjunto de mundos en los cuales todos los enunciados de la teoría en cuestión son verdaderos, 'y $c_X(A)$ es una esfera, de un sistema de esferas centradas en X, tal que es la esfera menor con la propiedad de cortar /A/. /A/ es el conjunto de mundos posibles en donde A es verdadera).

Resumiendo, entonces, mientras el sistema de Lewis -su función de selección, para el análisis de contrafácticos- selecciona los A-mundos más cercanos a un cierto mundo w, la función F de Gärdenfors selecciona el conjunto de A-mundos más cercanos a cada uno de los mundos que componen el conjunto de mundos a los cuales los enunciados de una cierta teoría son verdaderos, y, finalmente, la f_S de Grove selecciona el conjunto de A-mundos más cercanos al conjunto de mundos en los cuales los enunciados de una cierta teoría son verdaderos, <u>como un todo</u>.

En lo que sigue se tratarán de usar estas diferencias entre los modelos de la noción de revisión clásica y para contrafácticos para explicar algunas propiedades de los postulados de $*_{VC}$

Comenzaremos por el problema de la revisión del conjunto inconsistente.

V. II. 2. <u>La revisión de conjunto inconsistente según la función F de Gärdenfors.</u>

<u>Lema</u>

Si $P^X = P_\perp$, entonces $P^X A = P_\perp$

Prueba:

1. $P^X = P_\perp$
2. $X = \emptyset$
3. $X_A = \{w \in M_L /$ para los $\gamma \in X$, $W = f(\gamma, /A/)\}$ donde f es la f de Lewis
4. $X_A = \emptyset$
5. $P^X A = P_\perp$

El resultado que ofrece la F de Gärdenfors es más concluyente que el que arroja K^*_{5w}: la revisión de un conjunto inconsistente es inconsistente.

Por otro lado, en el caso de Grove los sistemas de esferas están centradas en subconjuntos arbitrarios de M_L, y no hay ninguna indicación explícita respecto a que el subconjunto vacío esté excluído de entre estos subconjuntos.

En el caso del modelo de Gärdenfors, no parece claro como evitar el resultado anterior sin una definición "ad hoc". Aclaramos que en la prueba usamos la propiedad (2) introducida por Grove respecto a la correspondencia que puede establecerse entre teorías y subconjuntos de M_L y que en el lenguaje de Gärdenfors se enunciaría:

P^X es consistente SII $X = \emptyset$

Gärdenfors no lo enuncia explícitamente, pero parece una propiedad muy natural de aceptar respecto a la correspondencia de mundos y teorías. La propiedad aludida se utiliza en las derivaciones 1 2 y 4-5 de la prueba.

En los siguientes puntos compararemos los dos modelos de Grove y Gärdenfors, respecto sobre todo a la falla del principio de preservación.

V. II. 3. Los principios K_4^* y K_{4w}^* según los modelos de Grove y Gärdenfors.

Como la función F de Gärdenfors modeliza la noción de revisión $*_{VC}$ utilizando esta función debe poder probarse el principio K_{4w}^*, mientras que no debe poder probarse con ella el postulado K_4^*. En cambio la f de Grove debe poder probarse que satisface K_4^*.

En lo que sigue primero probaremos K_{4w}^* con la F de Gardenfors y recordaremos la prueba expuesta antes, de que la f de Grove satisface K_4^*. Asimismo compararemos ambas pruebas, tratando de ver las diferencias entre los modelos de Grove y Gärdenfors.

(I)

Si $A \in P^X$ y $B \in P^X$, entonces $B \in P^X{}_A$

Prueba

hip. 1. $A \in P^X$

hip. 2 $B \in P^X$

3. $X \subseteq /B/$ para uniformizar en algo al menos las notaciones de Grove y Gärdenfors usaremos /B/ I(B).

4. $X \subseteq /A/$ de (1)

5. Para todo $\gamma \in X$, $\gamma \in /A/$ por (4)

6. Para todo $\gamma \in X$, $f(\gamma, /A/) = \{\gamma\}$ por propiedad (III) de la f de Lewis

7. $X = X_A$ de (6)

8. $X_A \subseteq /B/$ de (3) y (7)

9. $B \in P^{X_A}$ de (8)

Si quisiera usarse la función de Gärdenfors para probar K_4^* habría que probar:

(II) Si $-A \notin P^X$ y $B \in P^{(X \cap /A/)}$, entonces $B \in P^{X_A}$

Si dispusiéramos en (II) de la hipótesis $A \in P^X$ en vez de $-A \notin P^X$, la prueba correría sin dificultades. En efecto, de $X \subseteq /A/$, $X \cap /A/ = X$, y dado que $(X \cap /A/) = X = X_A \subseteq /B/$ por las mismas razones que antes se concluye que $B \in P^{X_A}$.

En cambio, de las hipótesis de (II) sólo sabemos que:

(#) $X \cap /A/ \subseteq /B/$

y de allí deberíamos, junto con la hipótesis $-A \notin P^X$, concluir que $X_A \subseteq /B/$. Pero de la hipótesis $-A \notin P^X$, sólo puede concluirse que

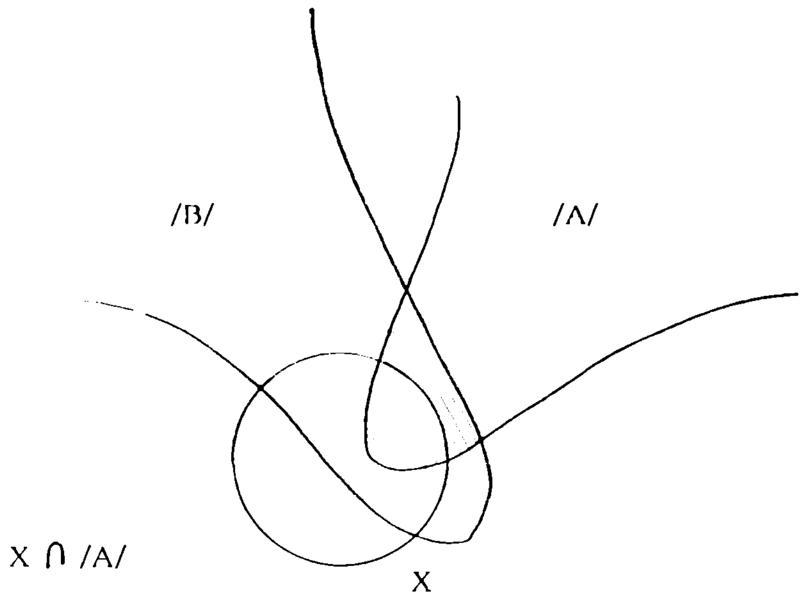
(α) $X \cap /A/ \neq \emptyset$

En efecto, si $-A \notin P^X$, entonces para algún $\gamma \in X$, $\gamma \notin /-A/$. Pero, entonces, ese γ es tal que $\gamma \in /A/$, lo que asegura que la interacción de X con /A/ no sea vacía.

Ahora bien, para probar (II) necesitamos que:

$X_A \subseteq X \cap /A/$

y esto no lo asegura la condición (α) que derivamos de la hipótesis de que $-A \notin P^X$. En efecto, la f de Lewis aplicada a los mundos $\gamma \in /-A/$ no tiene por qué devolver mundos pertenecientes a $X \cap /A/$. Puede perfectamente darse una situación como la que grafica la figura de más abajo:



X_A

$X \cap /A/$

X

¿Que sucede, en cambio con la f_S de Grove? Recordemos que de la hipótesis $-A \notin P^X$ (traduciremos aquí la notación de Grove a la de Gärdenfors para mayor comodidad), Grove concluye (α) como nosotros más arriba. Pero entonces $c(A) = X$, o sea, $f_S(A) = X \cap /A/$. (la región anaranjada en el diagrama de más arriba).

Mientras en el caso de Grove los mundos que pertenecen a X_A siguen estando incluídos en los maximales que determinan X, esto no sucede con la F de Gärdenfors. De esta forma sucederá para algún $/ \delta /$ tal que $X \subseteq / \delta /$, que $X_A \subseteq / \delta /$, y, por tanto mientras que $\delta \in P^X$, $\delta \notin P^X A$. Esto no podrá suceder para la f_S de Grove: si algún $/ \delta /$ cubría X, seguirá cubriendo a X_A.

Comienza a verse ahora claro porque la preservación falla en la nueva axiomatización. Aunque $-A \notin P^X$, puede darse de un $B \in P^X$, no pertenezca sin embargo, a $P^X A$.

La preservación no puede, sin embargo fallar en Grove:

(III)

Si $-A \notin P^X$ y $B \in P^X$, entonces $B \in P^X A$

Prueba:

1. hip. $X \not\subseteq /-A/$
2. hip. $X \subseteq /B/$
3. $X \cap /A/ \neq \emptyset$ de 1
4. $c(A) \cap /A/ = /A/ \cap X = f_S(A)$ Dado que por (3) X corta a /A/, y el sistema de esferas está centrado en X, la mínima esfera que corta /A/ es X y ∴ c(A) = X.
5. $X \cap /A/ \subseteq X$
6. $X \cap /A/ \subseteq X \subseteq /B/$ de (5) y hip(2).
7. $X \cap /A/ \subseteq /B/$
8. $c(A) \cap /A/ \subseteq /B/$ de (7) y (4)
9. $B \in P^X A$

El paso central de la prueba es (4), paso que no puede darse usando la función de Gärdenfors. El punto conflictivo que permite la falla de la preservación parece consistir en la independencia que existe entre los resultados que arrojan las diversas funciones de Lewis al construir el conjunto de mundos que genera la revisión. En un lenguaje poco riguroso, los distintos mundos que componen el conjunto de mundos que corresponde a la teoría, "no distingue" el hecho de pertenecer a ese conjunto de mundos, cada uno de ellos se "comporta" individualmente y la revisión de la teoría depende de la suma de esos "comportamientos" individuales. Esto no sucede con el sistema de Grove, justamente por estar centrado el sistema de esferas que usa, en el conjunto de maximales que corresponde a la teoría. La función de Grove selecciona mundos con respecto a ese conjunto de mundos que corresponde a la teoría que se considera, mientras que la de Gärdenfors selecciona mundos respecto a cada mundo que compone el conjunto de mundos X.

Todavía puede no ser del todo clara, sin embargo, la diferencia entre uno y otro modelo. Trataremos de hacerla más clara considerando una propiedad "holística" de la noción de revisión para los contrafácticos, íntimamente vinculada a la aceptación del principio de monotonía y la consiguiente falla de la propiedad de preservación.
Esta propiedad a la que aludimos puede expresarse de una forma más o menos general de la siguiente manera:

Observación III

Dadas dos teorías P^X y $P^{X'}$, tal que $P^X \subseteq P^{X'}$, y tres enunciados cualesquiera A, B, C, tal que $\vdash A \,\&\, B \rightarrow -C$, y las condiciones

$A \in P^X \qquad -C \notin P^X$

$B \in P^{X'}$

$B \in P^{X'}C$

entonces se cumple que $A \notin P^XC$.

La observación anterior no hace sino ilustrar el caso de la falla del principio de preservación para salvar la propiedad de la monotonía, que ya comentamos antes a propósito de un ejemplo, aunque lo plantea de manera algo más general. Como se ve, sucede algo a primera vista extraño con esta propiedad de la función de revisión. El resultado de la revisión de una teoría se ve "influído" por el resultado de la revisión con la misma sentencia en una teoría que la incluye. Esta influencia se traduce en la innecesaria pérdida de un enunciado (o sea la innecesaria pérdida de información) en la teoría menor.

En lo que sigue, probaremos la observación anterior usando la F de Gärdenfors y veremos porqué la prueba no funcionaría con la f_S de Grove. A propósito de esta comparación se harán algunas observaciones generales a propósito de lo involucrado en una noción de revisión apta para generar la semántica de VC, y sus diferencias con la revisión clásica desde el punto de vista de sus modelos en mundos posibles.

Prueba de la Observación III

hip. 1. $X'_C \subseteq /B/$

hip. 2. $X_C \subseteq /\text{-}A/ \cup /\text{-}B/ \cup /\text{-}C/$ ya que las verdades lógicas pertenecen a todos los conjuntos de creencias.

hip. 3. $X' \subseteq X$ ya que $P^X \subseteq P^X$

4. $X_C \cap /B/ \neq \emptyset$ En efecto, los $w \in (X \cap X') \subseteq X$, son tales que $f(w,/C/) \in X'_C$ y, por tanto, por hip. 1., $f(w, /C/) \in /B/$. Pero, estos w, obviamente también pertenecen a X, por lo que $f(w,/C/) \in X_C$, y, entonces, la intersección $X_C \cap /B/ \neq \emptyset$

5. $X_C \subseteq /C/$ por propiedad (iii) de la f de Lewis.

6. hip. $X_C \subseteq /A/$

7. $X_C \subseteq /\text{-}B/$ por condiciones (5), (6) e (hip. 2)

8. $X_C \cap /B/ \subseteq /\text{-}B/ \cap /B/$ por teoría de conjuntos.

9. $X_C \cap /B/ = \emptyset$ que se contradice con (4)

10. $X_C \nsubseteq /A/$ de (6), (4), (9).

11. $A \notin P^{X_C}$ de (10).

La prueba parece sencilla. Su punto clave es el paso (4). Es obvio que no podría desarrollarse una prueba similar usando la función de Grove, por la propiedad de preservación que acabamos de probar. En efecto de las hipótesis $A \in P^X$ y $\text{-}C \notin P^X$ debe poder derivarse $A \in P^X$, contradictoria a la conclusión que debiéramos obtener.

De todas maneras es interesante observar el paso (4) de la prueba anterior no podría darse en una prueba usando la función de Grove. El paso (4) ha sido derivado de (hip.1), e/(hip.3.). Porqué no podría concluirse esto en el sistema de Grove? Traduzcamos para ello (hip.1.) e (hip.3.) a la notación de Grove:

hip $_G$. 1. $c_{X'}(C) \cap /C/ \subseteq /B/$

hip $_G$. 2. $X' \subseteq X$

La pregunta es si de aquí puede derivarse:

$(c_X (C) \cap /C/) \cap /B/ \neq \emptyset$

Primero demostraremos formalmente que el paso no puede darse, ya que, por el contrario de las dos hipótesis enunciadas y la faltante que no hemos traducido, se deduce el enunciado contradictorio al expresado antes.

En efecto, dado que $-C \notin P^X$, puede deducirse, como ya hemos hecho antes:

(4_G) $c_X (C) \cap /C/ = X \cap /C/$

y de la hip. 3. que aquí expresaríamos como:

$(\text{hip}_G\ 3)$ $c_X (C) \cap /C/ \subseteq /-A/ \cup /-B/ \cup /-C/$

se infiere:

(5_G) $X \cap /C/ \subseteq /-A/ \cup /-B/ \cup /-C/$

(6_G) $X \cap /C/ \subseteq /C/$

(7_G) $X \cap /C/ \subseteq X$

(8_G) $X \subseteq /A/$ ya que $A \in P^X$

(9_G) $X \cap /C/ \subseteq /A/$ de (7_G) y (8_G)

(10_G) $X \cap /C/ \subseteq /-B/$ de $(\text{hip}_G .3.)$ (6_G) y (9_G)

(11_G) $(X \cap /C/) \cap /B/ \neq \emptyset$

La prueba formal, es sin duda importante, pero nos interesa más visualizar por qué en el modelo de esferas centradas en conjuntos de maximales en los cuales las sentencias de la teoría en cuestión son verdaderas, el paso conflictivo que comentamos, no puede darse:

Consideremos el siguiente diagrama, como se ve en él en el sistema de esferas puede darse perfectamente que $X' \subseteq X$ y que $[c_{X'} (C) \cap /C/] \cap /B/ \neq \emptyset$ y sin embargo, $(c_X (C) \cap /C/) \cap /B/ = \emptyset$

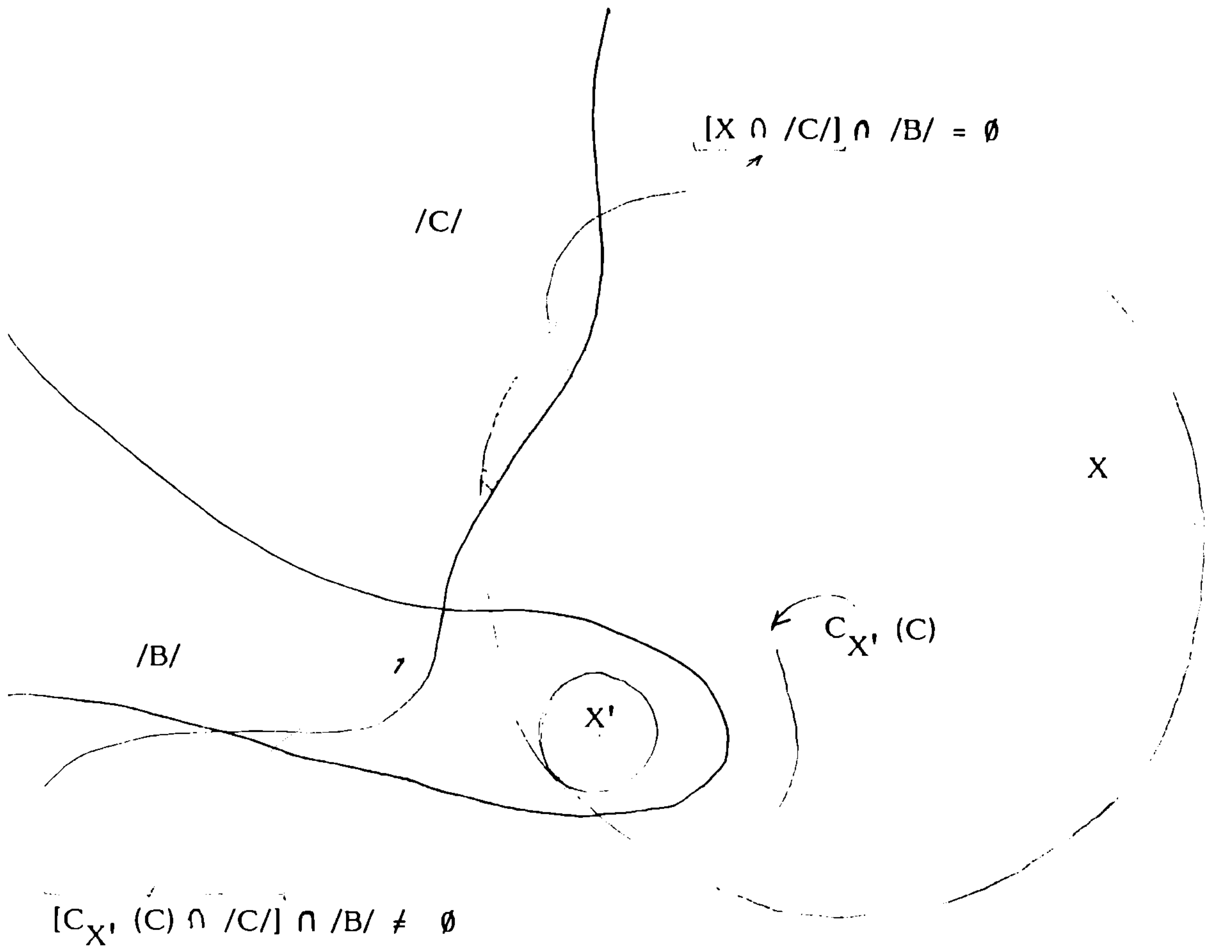


Fig. 7

Como se ve en el gráfico, y en las demostraciones anteriores en un sistema como el de Grove, que un cierto conjunto de mundos correspondiente a una cierta teoría esté incluído en otro conjunto de mundos correspondientes a una teoría incluída en la primera, no determina los valores de las revisiones de la teoría incluyente.

Es obvio que esto ocurre en el sistema de Grove ya que las esferas alrededor de X' no tienen por qué tener relación con las esferas alrededor de X.

Esto, sin embargo, no ocurre en el sistema de Gärdenfors. Del mero hecho de que X' está contenido en X, y que la revisión de X' con una cierta sentencia tiene ciertas propiedades pueden incluírse cosas sobre la revisión de X con la misma sentencia, ya que el conjunto de mundos producto de la revisión de X con la sentencia en cuestión está construído a partir de la aplicación de una cierta función sobre un conjunto de mundos, entre los que figuran los de X: Al fijar el resultado de la aplicación de la función de Lewis sobre un subconjunto de mundos de X estoy determinando en parte el resultado de la revisión de X mismo. O sea al enunciar que la revisión de X' con una cierta sentencia tiene ciertas características estoy diciendo que los valores de la función de Lewis aplicada a los mundos de X' están fijos; lo que equivale a decir que he fijado los valores de la función de Lewis para un subconjunto de mundos de X. Y esto solamente porque $X' \subseteq X$.

En el sistema de Grove al fijar las esferas alrededor de X' no tiene, en absoluto porqué fijarse las esferas alrededor de X, dado que el sistema está centrado en los conjuntos de mundos correspondientes a las teorías y no depende de la aplicación de una cierta función a los mundos que componen estos conjuntos de mundos. Haremos más explícitos los resultados para la función Gärdenfors.

V. II. 4. Características de la revisión para contrafácticos desde el punto de vista de la función F de Gärdenfors.

Pueden generalizarse aún más los resultados que ya esbozamos. En efecto, la pregunta que podría hacerse para ello es: dado un cierto conjunto de creencias P^X, y su conjunto de mundos posibles asociado X, y una cierta sentencia C, ¿cuándo podemos decir que está determinado X_C? Respuesta: cuando para cada mundo w perteneciente a X hemos fijado el valor de f(w,/C/). Pero equivale a decir que entonces hemos fijado el valor de los $P^{X'}$, con $X' \subseteq X$, para todo X'. Pero esto equivale a decir que X_C -o mejor P^{X_C}- está determinado por los valores de las C-revisiones de sus expansiones. Aquí ha reaparecido la extraña "influencia" de la revisión de un conjunto incluyente sobre la revisión de otro incluido, que se hizo explícita en la Observación III. La culpable de esta influencia, parece ser en el modelo en mundos posibles, una construcción "atomística" de la revisión de una teoría, en la cual el resultado de la revisión con una sentencia depende del comportamiento individual de un conjunto de mundos correspondientes a la teoría. Decimos "atomística" ya que estos mundos "no distinguen" entre pertenecer a un conjunto de mundos correspondientes a una teoría o pertenecer a otro. Los valores de la función de Lewis, con los que se construye la revisión, por adición, digamos, quedan fijos un vez que se determinan, no importa si estos valores contribuirán a generar la revisión de una u otra teoría. De donde una cierta propiedad "holística" de la revisión para contrafácticos*, parece quedar explicada -por cierta ironía, tal vez- por una correspondiente propiedad "atomística" perteneciente a su modelo construído en mundos posibles.

*

BIBLIOGRAFIA

C.E. Alchourrón - D. Makinson, "On the Logic of Theory Change: Contraction Functions and their Associated Revision Functions", Theoria 48 (1982) 14-37

C.E. Alchourrón - D. Makinson, "Hierarchies of Regulations and their Logic", New Studies in Deontic Logic, eds. R. Hilpinen, D. Reidel, Dordrecht (1981) 125-148

C.E. Alchourrón - D. Makinson - P. Gärdenfors, "On the Logic of Theory Change: Partial Meed Contraction and Revision Functions", The Journal of Symbolic Logic 50 (1985) 510-529

P. Gärdenfors, "Epistemic Importance and the Logic of Theory Change", en Foundations of Logic and Linguistics, eds. P. Weingartner - G. Dorn - D. Reidel, Dordrecht (1980) en prensa

P. Gärdenfors, "Epistemic Importance and Minimal Changes of Belief", Australasian Journal of Philosophy 62 (1984) 24-36

K.J.K. Hintikka, Knowledge and Belief, Ithaca 1962

P. Gärdenfors, "Conditional and changes of Belief", The Logic and Epistemology of Scientific Change, I. Niiniluoto - R. Tuomela, eds. Acta Philosophica Fennica 30 (1978) 381-403

D.K. Lewis, Counterfactuals, Oxford 1973.

R. Stalnaker, "A Theory of Conditional", en Studies in Logical Theory (American Philosophical Quarterly), Oxford (1968).

P. Gärdenfors, Knowledge in Flux: Modeling the Dinamics of Epistemic States, Bradford, (en prensa).

W.L. Harper - R. Stalnaker - G. Pearce, eds., Its (Conditionals, Belief, Dection, Chance and Time), Dordretch/Boston/London 1981

A. Grove, "Two Modellings for Theory Change", Auckland Philosophy Papers, 1986

P. Gärdenfors, "Variations on the Ramsey Test: More Triviality Results", Australian National University and Lund University, S/D

H. Rott, "Ifs, Thought and Because", Erkenntnis, vol. 25, pp. 345-370