Procedimientos numéricos de resolución de problemas aditivos y multiplicativos: relaciones entre aspectos psicológicos y didácticos[1]

POR MARIA EMILIA QUARANTA* Y SUSANA WOLMAN**

* Lic. en Pedagogía (CAECE). Docente de Psicología y Epistemología Genética (UBA).
** Wolman: Lic. en Ciencias de la Educación, Lic. en Psicología (UBA) y Especialista en Didáctica (UBA). Docente de Psicología y Epistemología Genética (UBA).

El objeto de esta presentación es mostrar algunos procedimientos de resolución no convencionales desplegados por alumnos frente a problemas aritméticos extraídos de dos investigaciones didácticas en curso. Nos dedicaremos a describir estos procedimientos y reflexionar acerca de la pertinencia y el valor de las investigaciones procedurales en Psicología Genética para el análisis de los mismos.

Ambos estudios didácticos tienen como marcos de referencia a la teoría psicogenética y la corriente "francesa" en didáctica de la matemática. Estas investigaciones están abocadas a estudiar algunas condiciones didácticas que favorecen el avance de los procedimientos de resolución no convencionales de los alumnos. Una de ellas se refiere a problemas de tipo aditivo y se desarrolla en primer año de la escolaridad básica cuando los niños ya resuelven, generalmente a partir del conteo, algunos problemas aditivos con números pequeños. La otra, se refiere a la evolución de los procedimientos de alumnos de tercer año de la escolaridad básica frente a algunos problemas de división y cuentan para ello con cierto dominio de las otras operaciones elementales.

Los ejemplos que presentaremos surgen como intentos de resolver los siguientes problemas. El de primer grado dice: "En esta caja puse 24 fichas, ahora agrego 16, ¿cuántas fichas habrá ahora en la caja?" El ⇨

[1] Este trabajo es una revisión de la ponencia presentada en el Simposio *Conocimientos sobre el sistema de numeración, procedimientos de resolución de operaciones aritméticas y situaciones didácticas* en el Annual Congress of the Jean Piaget Society, 1999, México.

mismo enunciado se presenta con otros números tales como 25 y 25; 35 y 24; etc. Es un problema aditivo en el que dada una cantidad inicial y una transformación positiva se debe averiguar el resultado final. El problema que les planteamos en tercer grado es el siguiente: "Una panadería fabrica 180 tortas por día y las distribuye entre sus 15 sucursales de modo que cada sucursal reciba la misma cantidad. ¿Cuántas tortas recibe cada sucursal?" y pertenece al gran campo de los problemas multiplicativos, de proporcionalidad simple. Se trata de averiguar, en una distribución regular, el valor de cada parte.

¿En qué sentido los enunciados presentados constituyen problemas para nuestros alumnos? Este tipo de problemas no son totalmente nuevos para ellos, sí lo son en cuanto a los dominios numéricos involucrados. En el caso de primer grado, los sumandos son mayores que 10. En tercero, la cantidad a distribuir es mucho más alta que las que habían trabajado en segundo.

No se les ha enseñado ninguna estrategia para resolverlos, así como tampoco el algoritmo convencional, que les daría la posibilidad de resolución inmediata, con lo cual no constituirían verdaderos problemas. Sin embargo, cuentan con conocimientos que les permiten comenzar a "hacer algo" en la búsqueda de la solución. Aquello que pueden realizar depende del recorrido didáctico de cada grupo escolar, en particular en relación con los números y las operaciones. En el caso de primer año, la enseñanza del sistema numeración parte del uso de los números sin recortar la serie numérica, acentuando la interacción con el sistema de numeración tal como éste es, sin apelar a los mediadores habituales utilizados con el propósito de que los alumnos comprendan la agrupación en base diez que lo rige. Se propicia que produzcan, interpreten, comparen, ordenen y operen con escrituras numéricas. Los alumnos de tercero, en cambio, pertenecen a otra escuela y atravesaron en su primer y segundo año un trabajo centrado en los agrupamientos recursivos y la descomposición en unidades, decenas y centenas, modalidad que no fue retomada en tercero.

Es decir, las situaciones propuestas son problemáticas para estos alumnos porque cumplen con dos requisitos complementarios: al mismo tiempo que pueden atribuirle un significado a partir de sus conocimientos previos e imaginar una solución desde ellos, presentan un desafío para sus conocimientos, que no resultan suficientes o no son los más adecuados para resolverlas. De este modo, sin contar con una estrategia que de antemano permita obtener la respuesta, nuestros alumnos debieron construir, buscar, con los insumos que mencionamos, un modo de organizar dichos conocimientos en una resolución personal: "Las situaciones problemáticas son aquellas que dejan al sujeto a cargo de obtener un resultado determinado mediante la ejecución de las elecciones o acciones de las cuales es responsable" (Brousseau, 1982).

En la descripción de las resoluciones infantiles que desarrollaremos se señalan algunos aspectos que se acercan a los relevados por los estudios procedurales en Psicología Genética: la idea de procedimiento, la representación de la tarea, su secuencia de pasos, la utilización de medios, los procesos de control, su recurrencia, la comprensión subyacente y el papel de las notaciones.

Estas resoluciones pueden ser consideradas *procedimientos* porque están constituidas por una serie de acciones organizadas y llevadas a cabo por los alumnos en función de un objetivo: hallar la respuesta al problema.

En primer lugar, los alumnos tuvieron inicialmente que *representarse el problema*, lo que les permite anticipar las posibilidades que pondrán en acción. Tienen conocimientos que les ayudan a aproximarse a las acciones que el enunciado del problema requiere para su solución: pueden establecer que se trata de un agregado de elementos o de una distribución. La idea de qué hacer estará en íntima vinculación con el enunciado, con sus conocimientos numéricos y de las operaciones. A diferencia de los procedimientos correspondientes a las investigaciones psicológicas mencionadas, estos modelos dependen fuertemente de conocimientos escolares y de sus representaciones acerca de qué es lo que se espera que haga el alumno en las situaciones didácticas. Ese modelo del problema moviliza las estrategias de base con las que cuentan los niños para comenzar la búsqueda de un camino de resolución y también guía y controla la actividad.

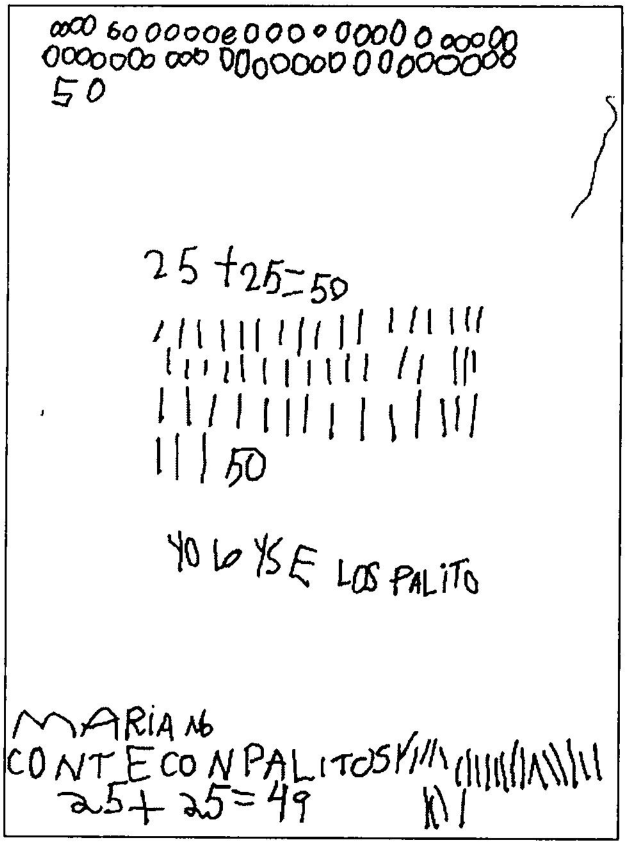
En segundo lugar, en estos ejemplos podemos inferir los *pasos o secuencias de acciones* que determinan las sucesivas etapas de cada resolución:

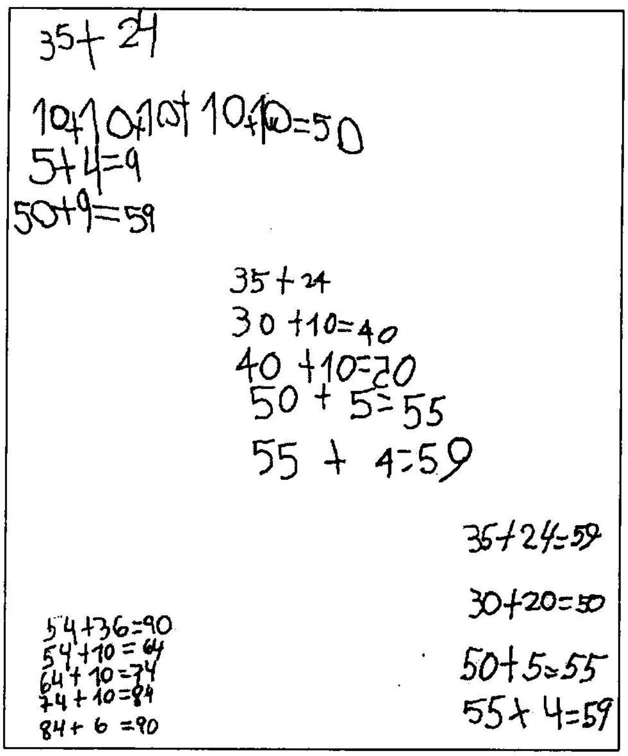
En los problemas aditivos encontramos diferentes posibilidades:

• Conteo: este procedimiento procede de uno en uno, puede realizarse apoyándose en los dedos o dibujando palitos o cualquier otra marca, tantas como lo indiquen las cantidades en cuestión, contarlos a medida que se realizan y recontar todos para obtener el resultado. Algunos optan por dibujar las rayitas organizadas en el espacio de tal manera que les permita un control sobre ellas. Otros, eligen hacer tantas marcas como correspondan a cada uno de los términos y las sobrecuentan a partir del primer término.

• Descomposiciones decimales aditivas: esta descomposición adquiere distintas formas. En algunos casos, descomponen todos los sumandos en "dieces". A veces, descomponen en el nudo de las decenas y las unidades y en los dieces sólo el segundo término. Otros, descomponen ambos términos en los nudos de las decenas y las unidades. También pueden no descomponer el primer término y en dieces el segundo. Estos procedimientos muestran que los chicos se están apoyando en sus conocimientos del sistema decimal para realizar las transformaciones de los números. Los descomponen para poder sumarlos o restarlos conduciendo a resultados intermedios diferentes pero que van a llevar a un mismo resultado final.

Presentaremos aquí ejemplos tanto de conteo así como de diferentes descomposiciones decimales.





Frente a los problemas de división también encontramos diferentes posibilidades:

• Algunos chicos realizan distintas distribuciones en quince partes de uno en uno utilizando marcas (palitos). En estos ejemplos los pasos consistieron en organizar gráficamente las 15 partes (Esquemas de 15 partes separadas u organizadas rectangularmente en filas y columnas) y atribuir palitos uno a uno hasta llegar a 180, luego cuentan el valor correspondiente a cada parte.

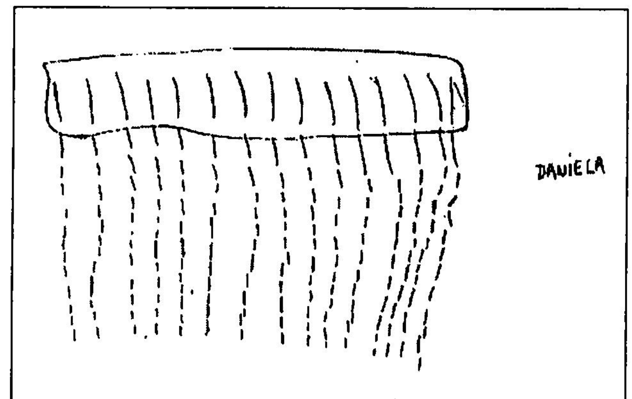
De esta manera, la organización espacial rectangular cuida la correspondencia biunívoca de las marcas y les ayuda a controlar que se atribuya uno y solo uno por vez a cada parte sin saltear ninguna facilitando así el control de la igualdad de las partes. La distribución en partes separadas les ayuda a cuidar el valor correspondiente a cada parte evitando que se mezclen las marcas atribuidas a cada una de ellas.

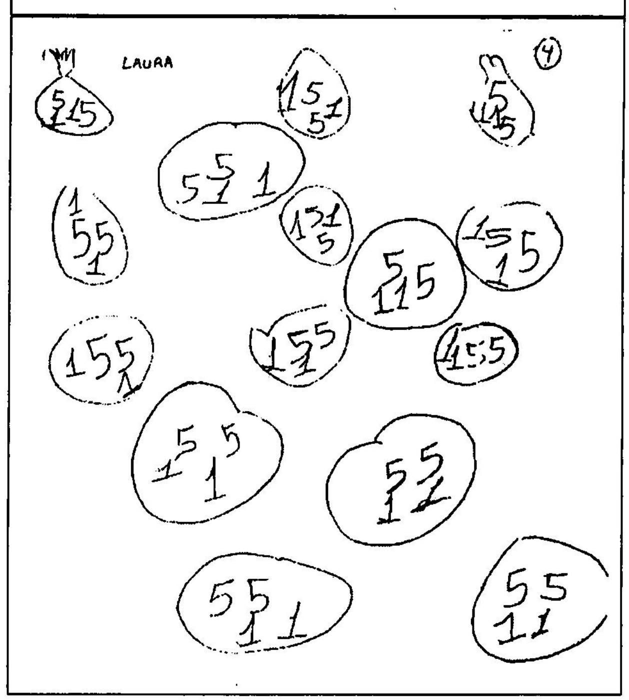
• En la resolución de Laura encontramos la determinación, a través de un esquema, de las 15 partes que representan sucursales, la distribución de 5 a cada una de ellas, luego 5 más, luego uno más y, finalmente, uno más. A medida que lo realizaba, recontaba (sumando) la cantidad total distribuida para no pasarse de 180. Por último, cuenta la cantidad que corresponde a una parte, para determinar la respuesta al problema planteado.

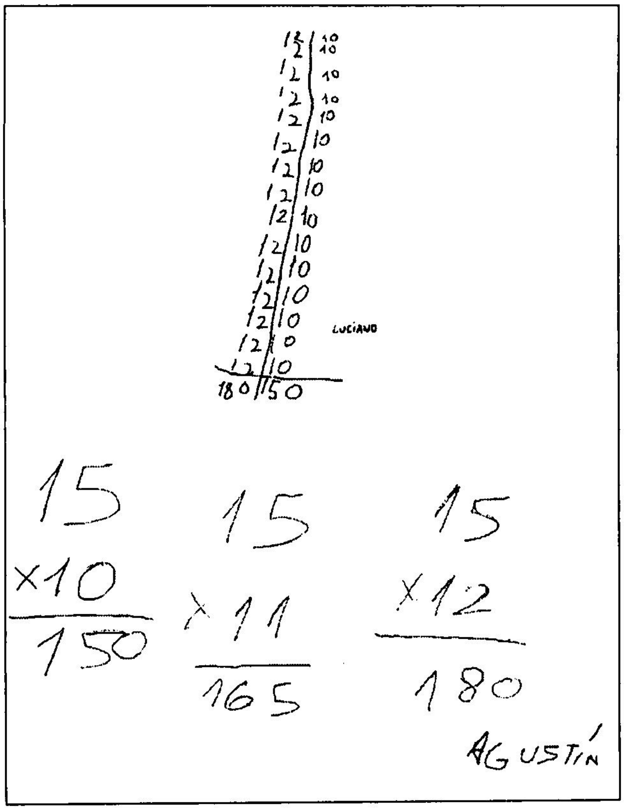
• Luciano comienza sumando 15 veces 10. A partir de ese resultado, ajusta los términos de la suma probando con 12, alcanzando así la respuesta.

• En el ejemplo de Agustín encontramos una aproximación a través de la multiplicación de 15 por 10, luego por 11 (sumando 15 al resultado anterior) y, finalmente, por 12 (sumando otros 15 al último resultado) para determinar a partir de este último resultado la respuesta.

Los siguientes son algunos ejemplos:







En términos generales, estamos ante alumnos que, enfrentados a un problema concreto, organizan o descubren progresivamente un conjunto de medios para resolverlo poniendo en juego conocimientos específicos, en nuestro caso, conocimientos que ya han construido acerca del sistema de numeración y de las operaciones. Aunque la situación-problema presentada al niño sea nueva para él, supone la utilización de conocimientos ya adquiridos en otros contextos, escolares y extraescolares. Esta utilización no consiste en una simple aplicación de los conocimientos que ya han construido, de lo que ya saben, puesto que es necesario que se adecuen a la nueva situación.

En tercer lugar, podemos considerar que los *medios* de resolución que los niños emplean (conteos apoyados en marcas, descomposiciones aditivas de los números, sumas parciales y totales, multiplicaciones, etc.) constituyen esquemas de acción que se organizan unos después de otros subordinándose al esquema más general que es el plan de resolución en su conjunto: unir dos cantidades para determinar el valor total, distribuir en un número determinado para hallar el valor de cada parte. Es importante aclarar que los conocimientos que intervienen como medios de resolución no constituyen medios en sí mismos, sino en la medida en que el sujeto los considera apropiados para resolver una situación determinada. Lo que los convierte en medios es que el alumno los piense aplicables al problema.

Los medios utilizados para resolver estos problemas - cuando abandonan los procedimientos basados en el conteo- se encuentran íntimamente vinculados con la comprensión de la organización de nuestro sistema de numeración. Por ejemplo, sumar de 10 en 10 o multiplicar por 10. Aun Laura, que utiliza un procedimiento aditivo, elige distribuir inicialmente de a 5, de modo que estos valores le resulten más fácilmente componibles formando dieces.

La *elección y organización de los medios* depende estrechamente de la representación de la tarea por parte del sujeto. Por ejemplo, en los problemas de la caja y en el de la panadería, intervienen la representación de la situación evocada como una reunión de elementos y como una distribución respectivamente y, estas últimas, como resolubles a través de determinadas operaciones. El modo en que los alumnos se imaginan la situación evocada por el enunciado y su relación con sus conocimientos matemáticos es un elemento fundamental para la planificación y conducción de sus resoluciones. Esta representación permite un primer plan o idea de resolución: anticipa algo acerca de aquello a lo que se apunta y también algún o algunos caminos posibles para acercarse a ese objetivo.

Esta representación inicial puede ser muy vaga y originar el desarrollo de un primer plan poco económico o inadecuado. Por ejemplo, en el caso de aumentar las cantidades a sumar, algunos chicos comienzan haciendo palitos pero, dado lo engorroso de esta tarea, la abandonan comenzando a buscar algún procedimiento de cálculo. Generalmente esto sucede cuando ya han participado en intercambios en los que se difunden otros procedimientos.

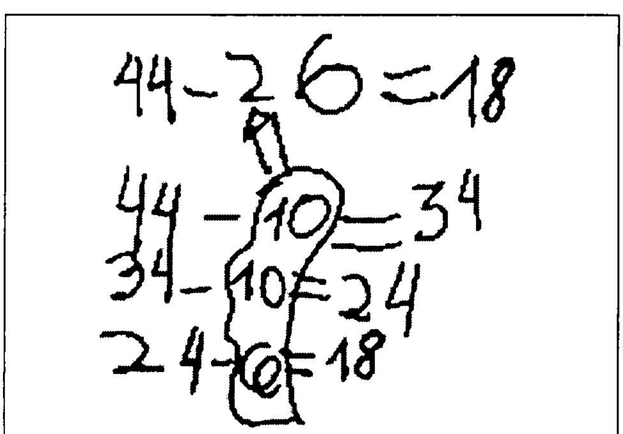
Otro ejemplo: ante el enunciado de la panadería, algunos alumnos realizan una resta (180-15). Esto es bastante frecuente y se debe a múltiples razones, pero fundamentalmente a efectos del contrato didáctico habitual para el trabajo con problemas aritméticos, según el cual todo problema que se presente en la escuela es resoluble con una operación utilizando los números que aparecen en el enunciado. Sin embargo, esta búsqueda no es ajena a cierta comprensión de las relaciones en juego en el problema. Sus autores anticipan razonablemente que el resultado será menor que el total a distribuir. Por lo tanto, de las operaciones que conocen, la resta es la candidata a darle tal respuesta. En algunos casos advierten solos la imposibilidad de ese resultado y comienzan a tantear, mediante adiciones reiteradas de cantidades menores que ese 165, hasta alcanzar un valor que, sumado 15 veces, dé 180. En otros casos, lo hacen a partir de la intervención docente preguntándoles si alcanzarían las tortas como para entregar 165 a cada una de las 15 sucursales. Como vemos, el primer intento es erróneo, pero cumple una función orientadora en el sentido de permitir un inicio de resolución que luego podrá ir ajustándose en mayor o menor medida para acercarse al objetivo perseguido. La representación inicial es pues una representación dinámica abierta al juego adaptativo que se despliega en la resolución.

En cuarto lugar, en los procedimientos, tal como se consideran en los estudios ginebrinos, aparece una dimensión de *control*, que permite al sujeto evaluar su marcha. Es decir, la planificación inicial de la tarea involucra evaluaciones que el sujeto realiza sobre sus acciones y sobre los objetos. Se trata de un control pragmático que apunta a juzgar la pertinencia de las acciones realizadas: "... el problema central del control es el siguiente: *"¿Lo he logrado? ¿Cuál es la próxima actividad que hay que emprender, qué hacer ahora para alcanzar el objetivo?"* (Inhelder y de Caprona, 1992) (cursiva en el original).

La necesidad de control deriva de la incertidumbre acerca del resultado hallado, de los pasos empleados, de la necesidad de establecer cuándo se ha llegado a un resultado que permita dar una respuesta al problema. En el ejemplo de Laura, vemos cómo va realizando composiciones de cocientes parciales y las sumas correspondientes y continúa hasta tanto alcanza los 180 del total a distribuir.

El control puede depender de los "feedbacks" de la situación o de los conocimientos mismos del sujeto. En las situaciones didácticas, se añade otra fuente de control, que son las interacciones con los pares y el maestro, que permiten considerar aspectos no tomados en cuenta por el sujeto. Los alumnos muchas veces advierten errores a partir de la confrontación con sus compañeros. En los ejemplos que presentamos, las situaciones no contienen dispositivos materiales que les devuelvan información acerca de la corrección de sus respuestas. Las *fuentes de control* son aquí los conocimientos de los alumnos, las notaciones que produjeron y los intercambios que se organizan en la clase.

A veces, como control, los alumnos reiteran el mismo procedimiento para comprobar que en ambas resoluciones obtengan el mismo resultado. Otras, recurren a un procedimiento anterior, que dominan más, para asegurarse del resultado obtenido mediante uno más nuevo y, en consecuencia, menos dominado. El dominio de los conocimientos les otorga una seguridad sobre el desarrollo de sus procedimientos que también interviene como elemento de control. Por ejemplo, en el caso de descomponer en forma decimal el sustraendo de una resta, lo que les permite restar la cantidad de diez en diez, controlan si efectivamente restan dicha cantidad sumando los números surgidos de la descomposición. En el ejemplo que presentamos, el niño lo resalta en su producción para poder explicitarlo luego ante sus compañeros. El control no recae sólo sobre la verificación del resultado, sino también sobre la pertinencia de los pasos.



En cualquiera de estos casos, la evaluación puede proceder desde las anticipaciones del sujeto, es decir desde su planificación, o desde los resultados de los pasos que va dando, los observables que éstos van generando para él. Ambas direcciones del control alternan y tienden a coordinarse. Las informaciones relevadas por los intentos de control a partir del desarrollo de las acciones tienden progresivamente a ampliar el campo de conocimientos del sujeto y, en consecuencia, las anticipaciones posibles frente a otras situaciones.

A pesar de que en los procedimientos indagados desde la psicología se destaca esta dimensión, encontramos que *algunos alumnos no intentan controlar su proceso.* En estos casos, sería peligroso atribuir esta ausencia de búsqueda de control a limitaciones del sujeto. Las interacciones didácticas, y por lo tanto también los procesos cognitivos que tienen lugar dentro de ellas, están regulados por representaciones acerca de lo que se espera de cada uno de los actores involucrados y, en el funcionamiento habitual de la enseñanza, es el maestro el único a quien corresponde evaluar las producciones de los alumnos.

En los contextos didácticos, la puesta en juego de procesos de control por parte de los alumnos depende de reglas de funcionamiento en el aula: no se despliegan sólo por enfrentar a los alumnos con problemas. Es necesario para ello instalar un modo de trabajo en el que sepan que pueden y deben probar, ensayar, discutir, validar, diversos caminos para encontrar las soluciones.

En quinto lugar, los procedimientos presentan cierta *recurrencia intra e interindividual.* Son repetibles, transferibles a problemas similares. Si los procedimientos son esquemas -que coordinan en una organización secuencial un conjunto de esquemas que constituyen medios subordinados a un fin-, por definición, tienden a generalizarse. También encontramos cierta regularidad de los procedimientos en un grupo de alumnos. En nuestro caso, son utilizados por los alumnos durante un determinado tiempo, adquiriendo una relativa permanencia. Esta regularidad no significa que no exista cierta heterogeneidad que depende de los conocimientos acerca del sistema de numeración y las operaciones que ya hubieran construido o descubran en la resolución.

Ahora bien, los alumnos no necesariamente recurren siempre al conocimiento más avanzado que disponen. En efecto, algunos, en el inicio de la investigación con problemas aditivos, aún habiendo dado pruebas en otras tareas de poder realizar una descomposición decimal de algunos números fuera de la situación de calcular (como por ejemplo marcar con billetes de diez y de uno el precio de un objeto), utilizan el conteo de uno en uno, a pesar de ser poco económico, cuando tienen que sumar números como 35 +24. Lo mismo sucede en el caso de la división: Laura realiza una aproximación al resultado de manera aditiva, aun manejando la multiplicación.

¿Cómo interpretar este hecho? Nos preguntamos si podríamos comprender la utilización de estos procedimientos menos avanzados cuando los alumnos cuentan con mayores posibilidades apelando al concepto de esquema familiar (Boder, 1992). Es decir, considerándolos como esquemas fácilmente accesibles, reconocidos como instrumentos privilegiados por haber sido más frecuentemente utilizados. Repartir 180 en 15 haciéndolo de uno en uno cuando se conocen operaciones que permiten resolverlo, o dibujar palitos para sumar dos cantidades relativamente altas cuando se conoce la descomposición decimal de los números, son caminos posibles pero evidentemente más costosos y con pocas garantías de éxito. Sin embargo, estos esquemas familiares atribuirían un sentido al problema determinando alguna orientación en la búsqueda de la solución.

En las situaciones de enseñanza, otra hipótesis posible es que estas conductas estén originadas por fenómenos complejos que exceden lo cognitivo e inciden en las resoluciones de los alumnos provocando que no desplieguen sus mayores posibilidades: en la escuela es peligroso equivocarse, y para ello recurrir a lo más conocido y por lo tanto más seguro es una vía posible para no correr riesgos.

En sexto lugar, en todo proceso de resolución encontramos siempre algún nivel de *comprensión* involucrado. De las soluciones a los problemas aditivos que presentamos podemos inferir que los chicos ponen en acción conocimientos sobre la conformación decimal de los números, de las transformaciones que se les pueden hacer sufrir (no transforman, por ejemplo, la cifra correspondiente a las unidades de un número en dieces), ponen en acción las propiedades conmutativa y asociativa de la suma. El uso de estos conocimientos y propiedades, aun de manera implícita, facilita los cálculos. La discusión sobre las diferentes maneras de resolver una operación permite a los alumnos reflexionar acerca de los números y las propiedades de la operación. Cuando los niños de primer grado, llegan por ejemplo, a enunciar que: "En el veinte hay dos dieces", "Desarmó el veintiséis: son dos dieces y un seis", o "Para hacer sumas, podés ordenar los números como quieras, da lo mismo porque son los mismos números que los ponés en otro orden; en la resta no pasa porque sacás", pensamos que están construyendo conocimiento matemático.

En los problemas de división, vemos que se respetan dos condiciones de esta operación: la coordinación entre la equitatividad de las partes y exhaustividad de la distribución (es decir, distribuir la mayor cantidad posible siempre y cuando se respete la equitatividad). Estas condiciones son una construcción, no son respetadas por los niños más pequeños. Vimos cómo nuestros sujetos controlan el total distribuido o asignado de modo de saber si alcanzaron la cantidad a distribuir, si se pasaron, etc.

El uso de estas propiedades no implica que los alumnos las hayan tematizado como tales. Funcionan en el nivel de lo que Vergnaud (1990) denomina teoremas en acto y constituyen precursores que, más tarde, en función de dispositivos didácticos específicamente diseñados, podrán dar lugar a conceptualizaciones más avanzadas. Cuando el niño está utilizando estas propiedades, en realidad, no constituyen todavía para él un objeto de reflexión.

¿Qué agrega el avance de la conceptualización? Permite una mayor capacidad de previsión, la posibilidad de darse un plan de utilización inmediata, permite trascender las situaciones donde la acción tuvo éxito, o las transferencias de próximo a próximo, abriendo un poder de generalización mayor. Buscando las razones, se exploran y descubren relaciones que involucran conocimientos más profundos.

Por las seis razones que enunciamos creemos que las resoluciones de los niños pueden ser analizadas en términos de procedimientos.

Ahora bien, en nuestras investigaciones se les solicita a los alumnos que *"anoten"* sus procedimientos tal como los pensaron y que lo realicen de la manera en que pueden hacerlo. A diferencia de otras propuestas en la enseñanza de la matemática, pensamos que anotar es muy importante por varios motivos.

• Pedirles que escriban posibilita el aprendizaje acerca de cómo escribirlos. En los inicios del trabajo con problemas aditivos, muchos alumnos expresan "lo pensé con la cabeza" o escriben con letras el camino seguido. En ambos casos, las intervenciones de la maestra se dirigen a que expliciten y/o reiteren cómo lo pensaron al tiempo que ella lo traduce en una escritura aritmética. Aprender a anotar cómo lo pensaron en estas condiciones es bien distinto a repetir escrituras que no entienden.

• Anotar cómo lo resolvieron es un proceso que no solo transforma el pensamiento en números y símbolos escritos, sino que en algunos momentos se convierte en imprescindible en el camino de encontrar una solución. Cuando los alumnos desarman uno o más términos en los dieces que lo constituyen para poder sumarlos, tal es el caso de 35 como 10 + 10 + 10 + 5, ocurren varias cosas: algunos anticipan que deberán anotar tres dieces; otros, lo descubren al ir anotando; pero unos y otros van *controlando* a través del conteo de diez en diez llegar a treinta. En este caso, las anotaciones funcionan como un *soporte* en el que se apoya el conteo de diez en diez tanto para controlar si se sumó o se restó la cantidad establecida como para poder obtener el resultado. Lo mismo sucede en los procedimientos para resolver problemas de división. Por ejemplo, en el caso de Laura, sería imposible obtener el resultado del problema si no anotara las distribuciones parciales. 5; 5; 1 y 1 que realiza en cada uno de los bosquejos que representan las sucursales, para luego poder sumar lo anotado en una.

En el momento de la resolución, cuando se descomponen los números de manera aditiva o cuando se conforman distribuciones parciales, anotar permite controlar las acciones realizadas para obtener el resultado y esa anotación se convierte en un "object to think with", tal como lo mencionan Inhelder y de Caprona (1994): "El aspecto instrumental -dicen los autores- de las diversas representaciones de naturaleza simbólica desempeña un papel particularmente importante en tanto que "objetos para pensar".

• La anotación que realizan es, además, un soporte para los intercambios entre alumnos y entre maestro y alumnos. En efecto, forma parte de las de las situaciones que los alumnos expliciten a sus compañeros cómo lo hicieron, qué caminos siguieron para obtener el resultado, justifiquen las transformaciones de los números que han realizado, la manera de obtener los resultados parciales y discutir con ellos para validarlos. Escribirlos los torna mucho más comunicables y se abre de esta manera la posibilidad de comparar los distintos procedimientos. Lo que se escribe queda disponible, tanto para los niños como para el maestro, en dos sentidos: para los primeros, para establecer comparaciones, volver a mirarlos y pensarlos otra vez, quizás en otro momento; para el último, como "pista" para inferir el proceso seguido.

Ahora bien, no siempre la escritura refleja totalmente los pasos seguidos. Para sumar 31 + 32, Facundo escribe "30 + 30 = 60". Cuando su maestra le pregunta cómo lo resolvió, Santiago, un compañero, se adelanta diciendo "porque lo sacó del tres más tres". La maestra vuelve a Facundo preguntándole si fue así como lo pensó. Facundo responde: "Yo me di cuenta que era sesenta porque... mirá, treinta más diez es cuarenta, y más veinte es ... cincuenta... sesenta (mientras va diciendo esto, levanta un dedo de la mano por cada diez que agrega)". Estos dos niños no ponen en evidencia el mismo conocimiento. Santiago ya sabe cuál es la cifra que en un número representa las decenas y puede operar con ellas como si fueran unidades sin descuidar, al dar el resultado, que en realidad representan las decenas. Facundo, a pesar de que al escribir no desarma el treinta en dieces, sí lo hace para realizar el cálculo. Para poder controlar la suma de 30 quizás no le resulte necesario hacer la descomposición por escrito, pero no sabemos qué sucedería en caso de tener que agregar, por ejemplo, 78. Una notación como esta no muestra totalmente el camino de resolución y puede dar a lugar a diferentes interpretaciones. Ante esta situación, es importante que la maestra intervenga solicitando una explicitación mayor en sus notaciones que refleje lo que están pensando los niños. A partir de allí se podrían comparar mejor estos procedimientos y reflexionar sobre ellos.

Anotar la manera de pensar la solución, los cálculos intermedios que se han realizado y las transformaciones de los números permitiría zanjar la oposición que existe hoy entre cálculo pensado o mental y los algoritmos de lápiz y papel en los que se usa sistemáticamente el algoritmo convencional.

INVESTIGACIONES PROCEDURALES Y DIDACTICA DE LA MATEMATICA

Desde la didáctica de la matemática, siempre se consideraron los aportes de la psicología como una herramienta importante para concebir y analizar situaciones de enseñanza en tanto permiten comprender los procesos cognitivos que tienen lugar en las interacciones didácticas. Los análisis microgenéticos permiten avanzar más aún en dicha comprensión, porque complementan el análisis de los mecanismos generales por los cuales se modifican los sistemas de conocimiento del sujeto, focalizando en procesos que tienen lugar en un tiempo más acotado y estudiados más detalladamente.

Reconocemos el valor de estos estudios para analizar resoluciones que tienen lugar en las clases y vemos que es posible "leer" estos procedimientos infantiles a la luz de los estudios procedurales de la teoría psicogenética. En efecto, constituyen secuencias de acciones orientadas a alcanzar un fin, los medios utilizados pueden ser considerados como esquemas de acción, están atravesados por procesos de control que participan decisivamente en la organización y evolución de los procedimientos, a su organización subyace también una dimensión comprensiva que se enriquece a lo largo de las diferentes resoluciones y que enriquece a su vez recíprocamente las futuras resoluciones participando de esta manera en la construcción de conocimientos.

Sin embargo, al ser procedimientos ampliamente dependientes de contextos didácticos, analizarlos únicamente a partir de estos desarrollos -como de cualquier otro insumo psicológico- presenta limitaciones. A partir de la especificidad de lo didáctico, encontramos algunas diferencias en el modo en que se presentan los procedimientos en contextos de enseñanza respecto de lo que sucede en las investigaciones de Inhelder y colab. (1992). Como afirma Lemoyne (1994), en las situaciones didácticas la proliferación de los esquemas es menor porque los alumnos resuelven los problemas con sus saberes, conocimientos y esquemas anteriormente elaborados en las clases, lo que reduce el espectro de los procedimientos posibles. Además, en los procedimientos que analizamos la dimensión de la interacción social juega un rol decisivo, dimensión que no es tomada en cuenta en las situaciones experimentales diseñadas en los estudios psicológicos.

Por otro lado, los conocimientos que el sujeto utiliza y construye le permiten adaptarse a las situaciones, más aún son efecto de situaciones didácticas, y están vinculados con el saber cultural y son "leídos" desde allí. Pero es necesario que sean vinculados con saberes institucionalmente constituidos. Esta es una preocupación central de la didáctica de la matemática que podemos expresar sintéticamente de la siguiente manera: ¿cómo convertir los conocimientos construidos por los alumnos en las situaciones en los saberes instituidos que se les intenta transmitir?

Es por eso que no son suficientes las situaciones donde los niños actúan como "resolvedores" de problemas. Las discusiones de toda la clase sobre las semejanzas y diferencias entre los distintos procedimientos, las justificaciones, las reflexiones sobre los elementos de la situación y de su resolución posibilitarán que se originen nuevos conocimientos sobre el sistema de numeración y que procedimientos más económicos comiencen a ser considerados y tal vez adoptados por alumnos que aún no lo hacen así. De esta manera, al tomar los procedimientos como objeto de reflexión, se avanza en la dirección de transformar los conocimientos producidos por los alumnos en el saber instituido socialmente. Esta conversión no es inmediata ni simple, requiere del reconocimiento explícito de esos conocimientos por parte de los mismos sujetos que les permita una reflexión sobre ellos. Pero esos saberes están estructurados por los conocimientos y en este sentido ellos son necesarios.

> "Si la adaptación a una situación de acción produce conocimientos en relación con el saber, la relación del alumno con el saber permanece inmodificada; los conocimientos en relación con el saber se encuentran así encapsulados en una historia que los contiene formada de acciones, objetos y conocimientos diversos. La representación de la experiencia y su examen permiten identificar y explicitar los conocimientos responsables de la adaptación y someterlos luego a diversas experiencias y pruebas que los validen o, al contrario, los invaliden. Así opera el proceso de conversión de los conocimientos en saberes." (Lemoyne, 1994)

Estas diferencias, junto con las que fuimos enumerando a lo largo de este trabajo, nos muestran que no es posible identificar lo que sucede en las resoluciones del aula con los análisis psicológicos. Si bien estos últimos resultan sumamente valiosos, es fundamental recordar las diferencias de problemas y fenómenos que estudian cada una de las disciplinas evitando caer así en una nueva forma de "aplicacionismo". En efecto, aunque la Psicología Genética desde su vertiente procedural y la didáctica de la matemática abordan el estudio de la *resolución de problemas, no lo hacen con los mismos objetivos*: para la primera es un camino para estudiar la inteligencia en funcionamiento, para la segunda es el medio para producir en los alumnos el aprendizaje por adaptación de los saberes que la escuela tiene como función transmitir. En la teoría de las situaciones didácticas, la actividad cognitiva desplegada por el alumno frente a los problemas está *orientada y al servicio de provocar el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos.* En este sentido, el estudio de los procedimientos infantiles desplegados frente a problemas matemáticos, requiere que se consideren dentro del marco institucional en el que se desarrollan cargado de intenciones y expectativas.

El nivel del sujeto didáctico tiene una especificidad propia: los procesos cognitivos están atravesados por la participación en intercambios donde una institución quiere que el sujeto aprenda determinados saberes y éste debe aprenderlos. Por ejemplo, vimos la incidencia de condiciones institucionales propias de la escuela en los procesos de control; cómo los medios de resolución estaban íntimamente vinculados con conocimientos ya aprendidos y, en el caso de los problemas de división, altamente dependientes de la enseñanza escolar previa.

Todos acordamos en la importancia de avanzar en la comprensión de los procesos cognitivos vinculados a los contenidos escolares que se juegan en el interior de los sistemas didácticos. Creemos que la perspectiva procedural en Psicología Genética colabora en esa dirección siempre y cuando se contemplen las condiciones y especificidades propias de los intercambios escolares.

BIBLIOGRAFIA

Blanchet, Alex (1991): "Strategias de découverte et stratégies d'apprentissage" en Montangero, Jacques y Tryphon, Anastasia *Psychologie Génétique et sciences cognitves.* Edition scientifique. Cahier N° 11 Foundation Archives Jean Piaget.

----------- (1996): "Résolution de problèmes et didactique des mathématiques", *Actes des premières journées didactiques de La Fouly,* pp. 57-76.

Brousseau, Guy (1986): "Fondements et mèthodes de la didactique des mathèmatiques", *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

----------- (1994): "Los diferentes roles del maestro", en Parra y Saiz (comp.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós.

Brun, Jean; Cone, Francois; Cordey, Alain; Floris, Ruhal; Lemoyne, Gisèle; Leutenegger, Francia; Portugais, Jean (1994): "Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes", en Artigue, Gras, LAborde y Tavignot (eds): *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage a Guy Brousseau et Gérard Vergnaud,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Inhelder, Barbel y Céllerier, Guy (1992): *Le cheminement des découvertes de l'enfant. Recherches sur les microgenèses cognitives,* Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

Lemoyne, Gisèle (1996): "La enseñanza de la matemática a la luz de la epistemología genética", *Perspectivas,* Oficina Internacional de Educación de la UNESCO.

----------- (1996): "Les élèves de la psychologie cognitive et de la didactique des mathématiques dans l'ingénierie didactique", *Actes des premières journées didactiques de La Fouly,* pp. 25-56

Lerner; Delia (1996): "La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición.", Castorina, Ferreiro, Kohl de Olivera, Lerner: *Piaget- Vigotsky: contribuciones para replantear el debate,* Buenos Aires, Paidós.

Madelon Saada-Robert y Jean Brun (1996) "Las transformaciones de los saberes escolares: aportaciones y prolongaciones de la Psicología Genética" en *Perspectivas,* Oficina Internacional de Educación de la UNESCO.

Margolinas, Claire (1993): *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage,

Piaget, Jean (1974): *Réussir et comprendre,* Paris, Presses Universitaires de France

----------- (1981): *Le possible et le necessaire.1. L'evolution des possibles chez l'enfant,* Paris, Presses Universitaires de France.