FILO:UBA
Facultad de Filosofía y Letras
Universidad de Buenos Aires

La enseñanza de la física: las buenas prácticas en la Universidad de Buenos Aires. Vol. II

Autor:
Eder, María Laura
Tutor:
Cubero Perez, Rosario

2016

Tesis presentada con el fin de cumplimentar con los requisitos finales para la obtención del título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires de la Facultad de Filosofía y Letras en Ciencias de la Educación.

Posgrado

FILO:UBA
Facultad de Filosofía y Letras

FILODIGITAL
Repositorio Institucional de la Facultad de Filosofía y Letras, UBA

REGISTROS DE CLASES

CASO 1. PROFESOR A

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

1. P: Empezamos. F = m. a ¿Se acuerdan no? ¿si? ¿Se acuerdan o no? Entonces ahora ¿que hacemos?, nada, multiplico por el intervalo de tiempo de los dos lados. Con lo cual obtengo algo muy interesante que es esto: paso delta t multiplicando, tengo esto. Yo encuentro entonces que esto, que va metido acá, es la diferencia de velocidad, de vectores velocidad. Es d en el instante inicial que es….

O sea, tengo este resultado. Si yo considero la acción de la fuerza sobre el cuerpo en el instante que sucede, en el instante t_0 y en el instante t, resulta que lo que me sale, es el producto de la masa por la velocidad inicial de t, menos la velocidad en el instante cero. Hasta acá es fácil. ¿De acuerdo? Tanto es así, que vamos a inventar algo, le vamos a poner un nombre. Definimos a la cantidad, le ponemos la letra t que es un vector, y la construimos con el producto de la masa por la velocidad. A esta cantidad p la llamamos cantidad de movimiento del cuerpo.

Sea F= cte

$\underbrace{F' . \Delta t:}_{\text{IMPULSO}}$ Producto de la fuerza y el intervalo de tiempo durante el cual actúan entre 2 instantes t y $t_0 \Rightarrow$

$F. \Delta t = m (v (t) - v_0)$

$F. \Delta t = \underbrace{m\ a\ \Delta t}_{\text{Cinemática vectorial}}$

A = cte. $\Delta t\ a = [v (t) - v (t_0)] / \Delta t$

2. A1: Y ¿el peso?

3. P: ¿Cómo?

4. A1: ¿El peso?

5. P: ¿Cómo? ¿Con P mayúscula? Por m por g. Que sé yo, ya me las ingeniaré. ¿Está bien? La cuestión es que en todos los libros de todo el planeta que usan el alfabeto nuestro, usan p para esa cantidad así que yo no puedo cambiarlo. En fin, tenes razón pero bueno. Bueno, muy bien. Esto se llamaba cantidad de movimiento del cuerpo y por lo tanto, lo que hemos encontrado es que, cuando tengo una fuerza durante un tiempo Δt, lo que obtenemos es la diferencia entre la cantidad de movimiento final y la cantidad de movimiento inicial del cuerpo. ¿Si? ¿Por qué?

Porque la masa multiplicada por v de a, es el impulso que hay, y la masa multiplicada por la velocidad inicial es el impulso inicial. ¿Si? O sea que esto no es otra cosa que masa por velocidad final, menos masa por velocidad inicial. 350

Definimos p = m. v

P: "cantidad de movimiento" del cuerpo

$F. \Delta t = p_f - p_0 = m. v_f - m.v_0 \rightarrow$

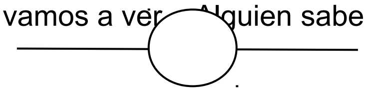
F. Δt = (independiente de m_1 v_0…)

$= p_f - p_0$

Bueno, muy bien. Fíjense una cosa interesante. Esta cantidad de impulso, perdón cantidad de movimiento. De nuevo, otra vez. Como la palabra cantidad de movimiento es muy larga, a veces la gente en vez de llamarla cantidad de movimiento la llama impulso. Así que en este curso vamos a tratar de ser prolijos y llamarla siempre cantidad de movimiento. Pero van a ver que en los cursos siguientes de la facultad la van a llamar impulso. Bien, bueno, entonces veamos algunas cosas importantes. Fíjense como yo les dije antes, este número que yo calculo usando al fuerza da un resultado que, por supuesto, no depende de nada que tenga que ver con el cuerpo, o sea no depende de su masa, no depende de cual era su vector velocidad cuando esa fuerza empezó a actuar, no depende de nada que tenga que ver con el cuerpo. ¿Si? ¿Está claro, no? Entonces conozco la fuerza, conozco le lapso de tiempo que a mí me interesa estudiar. … Esto es una cantidad que se calcula. Y esto es independiente de la masa, de la velocidad inicial, es independiente de todo. Y esta es la razón para inventar esta idea de impulso, porque entonces lo que tenemos es P, cantidad de movimiento. [Risas] Por eso entonces lo que tenemos, es esta velocidad interesantísima, que es el impulso que produce la fuerza es igual al cambio de la cantidad de movimiento. Entonces fíjense que de nuevo, cuando yo le puse nombre p a esto, en vez de ponerle de nombre m multiplicado por v, lo que quiero hacer justamente es resaltar que el efecto del impulso … sobre la fuerza fue hacer algo sobre el cuerpo, que es independiente de su masa, de su velocidad inicial, de todo. ¿Entienden? O sea, si este impulso se aplicó a un cuerpo de 10 gramos, de un kilo o de 100 toneladas, no importa, si se aplicó este impulso, la cantidad llamada cantidad de movimiento del cuerpo, cambió en esta cantidad. ¿De acuerdo? ¿Si? Por eso Newton inventó este concepto más abstracto que el de velocidad, y que el de masa, más abstracto. Más abstracto que el concepto que se aplica a un cuerpo particular, una vez que yo sé su masa, sé la velocidad con la que se estaba moviendo, sé todo, yo puedo pasar de acá hasta acá. Pero lo que él quiso resaltar sobre este ejemplo/invento es: "¡Hey, momento! No hace falta que yo sepa nada sobre las propiedades del cuerpo." Sea el cuerpo que sea, lo que ocurrió cuando actuó la fuerza durante un cierto intervalo de tiempo, le proveyó un cierto cambio a su cantidad de movimiento, sea una hormiga, sea un transatlántico, o sea un planeta. ¿Entienden? Entonces eso es lo interesante de leer esto así, antes de acordarse de que el impulso es esto. Y de hecho la palabra "cantidad de movimiento" es una palabra inventada por Newton, es un concepto inventado por Newton, cuando escribió sus famosas leyes de Newton. Y de hecho acá, les voy a confesar, hemos estado mintiendo. Newton no decía fuerza igual a masa por aceleración, Newton decía fuerza igual: cambio de la cantidad de movimiento, dividido el intervalo de tiempo. ¿De acuerdo? Bueno muy bien. Por supuesto, hecha esta observación… Ah! otra cosa importante. Entonces, primero es importante el concepto de cantidad de movimiento. Segundo, es importante, lo que nos importa, el dato, o sea la información que nos da esta cantidad de impulso. Bueno, ya lo escribí treinta veces, es el cambio en el impulso, en la cantidad de movimiento, perdón, y esto es completamente independiente de si antes estaba en reposo, si estaba moviendo, o sea de cómo era el movimiento anterior. ¿Entienden? O sea nos dice cuánto cambió el impulso.

$\rightarrow$ F. Δt $\rightarrow$ $p_f - p_0$ $\rightarrow$ totalmente independiente de cómo era el movimiento interior

¿De acuerdo? Y eso se le va a sumar a lo que fuera... el movimiento anterior. Pero sobre el movimiento anterior, no sé, lo que esto me dice es cuánto cambió el impulso. Está claro ¿no? Bueno, muy bien. Es un poco como el concepto de aceleración. El concepto de aceleración es el cambio de velocidad, ¿está bien? Y este vector, por ejemplo de movimiento circular, no es ni paralelo ni nada a la velocidad, es un vector que me habla de cómo cambia la velocidad. ¿Está? Fantástico. Bueno, ¡muy bien! Listo. Entonces con todo esto, ya tenemos los primeros ingredientes para empezar a hablar de…. Impulso de…. Entonces, les recuerdo que, por ahora, todo esto valió, porque usé la velocidad de la cinemática vectorial, que relacionaba, cuando la aceleración era constante, relacionaba la aceleración con el cambio de velocidad. ¿De acuerdo? Bueno, muy bien. Entonces para empezar a tener alguna idea de trabajar con esto, hagamos el problema 3.2. Veamos lo que nos dice el problema 3.2. "Carlitos y su bicicleta tienen una masa total de 50 kg." Y pregunta: "determinar el vector impulso que actúa en los siguientes casos". Entonces nos ponen acá cuatro casos, dice: "avanza 10 metros en línea recta con velocidad constante de 8 metros sobre segundo".
Entonces, vamos a ver. Alguien sabe que es esto?



6. As: No.

7. P: Un mejicano en bicicleta, por supuesto. [Risas] ¿Está bien? Visto desde arriba. ¿De acuerdo? … Entonces en el punto a, nos dice, digamos, nos conviene verlo de arriba porque después… Entonces, dijimos, la masa del sistema Carlitos y bicicleta, considerado como un solo cuerpo, es de 50 kg, y ahora nos dice ahí avanza 10 metros en línea recta con velocidad constante de 8 metros sobre segundo. O sea, sale de un punto que podemos llamar el punto en el que se encuentra en el instante t cero, o sea en el instante inicial. Se mueve a una distancia de 8 metros así que hasta que llega al punto que podemos llamar el punto final.

8. A2: De 10 metros.

9. P: De 10 metros, gracias. Así que es esto es inicial, y acá final o posición final. Bueno, fantástico. En este recorrido nos dice que se movió con velocidad constante de 8 metros sobre segundo. Y la pregunta que nos hacen es determinar el vector impulso que actúa en cada caso. O sea en este caso, cuánto vale el vector impulso que actúa.

10. A2: No era… especial el vector movimiento.

11. P: Así dice.

12. A2: Pero esa es la cantidad de movimiento.

13. P: Ah! Si, bueno, ¿quieren ponerle otra cosa a esto? Pongámosle una i, al vector impulso. Estamos preguntándonos entonces, cuanto valió esto.

$I = F. \Delta t$

14. A3: Cero.

15. P: ¿Quién dijo cero? ¿Por qué?

16. A3: Porque el impulso es independiente de la trayectoria.

17. P: Perfecto. Muy bien. ¿De acuerdo? Entonces ahora tenemos como ley básica esta relación. Esta relación. El impulso que actúa lo podemos calcular si conocemos la fuerza y conocemos el tiempo que actúa la fuerza, listo hacemos esta cuenta y sabemos lo que vale. Pero por la relación ésta, que sale de la ley de Newton, también tenemos que el impulso que actuó es el causante del cambio en la cantidad de movimiento. ¿De acuerdo? Por lo tanto, si no nos dan datos sobre la fuerza o sobre el tiempo o sobre algo que nos permita hacer este lado de la cuenta, tenemos que ver si nos dan datos para poder hacer la cuenta con los de este lado de la cuenta. ¿Si? Entonces fíjense que este problema apunta precisamente a eso. Si bien, nosotros arrancamos, inventamos la noción de impulso partiendo de esto, bueno justamente lo que aprendimos es que por al ley de Newton, el impulso se relaciona así con el cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo. ¿De acuerdo? Entonces acá tenemos un ejemplo con el cual lo que podemos determinar fácilmente es cuanto era el impulso en el instante inicial, perdón, cuánto era la cantidad de movimiento en el instante inicial y cuánto era la cantidad de movimiento en el instante final. Como vectores. Ojo, ¡muy importante! Como vectores. ¿Si? ¿De acuerdo? Entonces, vamos a ver cuánto vale el impulso inicial.

18. A1: 50 por 8

19. P: La masa es 50 en gramos y la velocidad es, según dice ahí en el enunciado es 8 metros sobre segundo. ¿Está bien? Por 8 metros sobre segundo. Muy bien pero esto es un vector, así que esto tiene que ser un vector.

$p_0 = 50kg. 8m/s$
↓
esto es un vector

¿Cómo hago para que esto sea un vector? ¿Eh? Vectores. ¿De acuerdo? O sea, vectores, que es lo que tengo que hacer cuando va a haber vectores involucrados. Poner ejes. Pongamos éste. ¿Cómo les gusta que pongamos ése? ¿Lo pongo así? ¿Está bien? Pongo así el eje x y así el eje y, ¿si? ¿Está bien? Por supuesto pasa como pasaba en cinemática, como pasa siempre. Si todo ocurre en una sola dimensión, bueno no necesito escribir vectores, ¿no?
Pero es interesante saber que esto puede pasar también en dos o tres dimensiones. Por lo tanto, es bueno que nos acostumbremos a la idea de que esto tenemos que expresarlo como vectores. Así que si puse el eje x así y el eje y así, entonces, la cantidad de movimiento inicial, ¿cómo se escribe? Esto ¿qué componente es?

$p_0 = 50kg. 8m/s$
$p_0 = (50kg. 8m/s; 0)$
$p_f = (50kg. 8m/s; 0)$

20. A4: X.

21. P: X y la componente y, ¿cuánto vale?

22. A4: Cero.

23. P: Cero. O sea lo pongo así, y cero. ¿De acuerdo? Muy bien. ¿Cuánto vale el impulso final? Lo que nos decían era que se habían movido una distancia de 10 metros a una velocidad de ocho metros sobre segundo, por lo tanto la velocidad final ¿cuánto vale?

24. A4: Ocho metros sobre segundo.

25. P: También vale ocho metros sobre segundo, y muy importante, tiene la misma dirección y sentido. Porque estos son vectores. ¿De acuerdo? Así que mi impulso final es: masa, 50 Kg. por componente x de la velocidad ¿mientras que la componente y vale?

26. A3: Cero.

27. P: Cero. Muy bien. Fantástico. Listo, ya está… El impulso que actuó fue ¿cuánto?

$I = F. \Delta t$

$F. \Delta t = p_f - p_0 = 0$

28. A3: Cero.

29. P: Claro. Cantidad de movimiento final menos cantidad de movimiento inicial, cero. Entonces bueno, por supuesto, si Carlitos se mueve con velocidad constante, la fuerza neta que actúa sobre él ¿cuánto tiene que valer?

30. A3: Cero.

31. P: Claro, ley de Newton. Ley de Newton. Acá va la fuerza neta o resultante, ¿de acuerdo? Entonces, si se movió a velocidad constate, su aceleración, ¿cuánto fue?

32. A3: Cero

33. P: ¡Cero! Por lo tanto, está claro que la fuerza neta por la resultante tiene que haber sido cero…. Muy bien, sin embargo, no nos confiemos. Vamos ahora al b. vamos al b. Entonces en el b dice: Aumenta su velocidad desde ocho metros sobre segundo hasta diez metros sobre segundo, en un camino rectilíneo. O sea ahora va por un camino rectilíneo, en cierto instante tiene 8 metros sobre segundo, y un tiempo después, en el tramo final, tiene una velocidad de diez metros sobre segundo.
Bueno, ahora tenemos un problema, fíjense que no nos dicen ni cuánto es esta distancia, ni tampoco nos dicen cuanto es el tiempo transcurrido. Y sin embargo nos preguntan cuál es el impulso de la fuerza. O sea, del vector y que le pusimos nombre a pedido de… ¿cómo era tu nombre?

34. A2: Micaela.

35. P: Micaela. Bueno ¿qué hago?

36. A2: Pero no importa.

37. P: Muy bien, no importa. Ven, otra vez.

$$p_0 = (50kg.\ 8m/s;\ 0) = (400kgm/s;\ 0)$$
$$p_f = (50kg.\ 8m/s;\ 0) = (500kgm/s;\ 0)$$
$$I = F.\ \Delta t = p_f - p_0 = (100kgm/s;\ 0)$$

Estamos intentando cosas que nos permiten saber qué es lo que va a pasar, sin tener que saber todos los detalles, no necesito saber exactamente el tiempo que pasó, o la distancia que recorrió, no necesito saber todo el detalle del movimiento. ¿Por qué? Porque de nuevo ¿cuánto vale la cantidad de movimiento inicial? Bueno, otra vez, pongo este y acá, este x acá. Entonces ¿cuánto vale la cantidad de movimiento inicial? La componente x, 50 por ocho metros sobre segundo, componente x, y cero en la componente y. O sea, cinco por ocho, cuarenta, cuatrocientos kilogramos por metro sobre segundos,… unidades de masa por velocidad. Bueno, cuánto vale la cantidad de movimiento final. En la componente x vale 50 por x y en la componente y vale 0... Así que esto ¿cuánto me da? Quinientos kilogramo-masa por metro sobre segundo en x, cero en y. Muy bien, entonces para que pueda ocurrir eso, que acá tenga esta velocidad y acá tenga esta velocidad, ¿es necesario que haya actuado una fuerza? ¿Si? ¿De acuerdo? Es necesario que haya actuado una fuerza porque si no se hubiera movido con velocidad constante. ¿De acuerdo? Y el impulso que transmitió esa fuerza, mientras actúo ¿cuánto tuvo que ser?

38. A: [No se oye]

39. P: Claro. Tuvo que ser lo necesario para producir este cambio en la cantidad de movimiento. O sea, cantidad de movimiento final, menos cantidad de movimiento inicial. Así que la componente x vale 100 Kg. por metros sobre segundos y la componente y vale cero. O sea que el vector impulso ¿cómo fue?, ¿qué dirección y sentido tuvo? Positivo, ¿de acuerdo? Lo cual está bien, como la velocidad aumentó, la fuerza tiene que haber actuado hacia el mismo sentido. ¿Sí? ¿Está? Fíjense que no hace falta saber cuál fue el tamaño de la fuerza, no hace falta saber cuál fue el lapso de tiempo durante el cual la fuerza actúo, ¿si? Lo que sabemos es directamente cuánto vale este producto.

5

Bien pasemos ahora al punto c. En el punto c, dice lo siguiente “dobla en «i» y sigue por una calle perpendicular a la anterior siempre a 10 metros sobre segundo”. O sea que viene así, dobla, ¿de acuerdo? De manera que, en el instante inicial viene por esta calle con una velocidad cuyo módulo es 10 metros sobre segundo, ¿si? Cuando pongo v sin flechita ni nada, me refiero al módulo del vector, ¿si? ¿Se acuerdan que habían dicho esto en cinemática? Y después dobla y se mueve en esta dirección y sentido de modo que éste es el instante final también con velocidad de 10 metros sobre segundo. Muy bien en este caso, ¿cambió la cantidad del movimiento del ciclista?

40. A5: No.

41. P: Les doy otra oportunidad.

42. A6: El módulo.

43. P: ¡Ojo! Estamos hablando de vectores.

44. A: [No se oye]

45. P: Exactamente. Por lo tanto, vamos a poner los ejes como dijimos antes. Esto lo llamamos x, esto lo llamamos y. Entonces ahora ¿cómo es la cantidad de movimiento inicial del cuerpo?

46. A3: ¿No podemos tomar un eje torcido, como tomábamos antes?

47. P: Hagámoslo, veamos el resultado y después preguntémonos qué pasaría. La cantidad de movimiento inicial ¿cómo se calcula?

48. A3: Cincuenta por diez.

49. P: La componente x, cincuenta por diez, la componente y, cero. Recordemos que es un vector por lo tanto importa no solamente su módulo que era 500 igual que antes, sino que importa la dirección y el sentido. O sea, cuál es la dirección y el sentido de la cantidad de movimiento

inicial. ¿De acuerdo? ¿Si? Sobre esta recta que graficamos para el eje x, ¿de acuerdo? Muy bien. ¿Cómo es la cantidad de movimiento final?

50. A4: Mil.

51. P: Claro, ahora la velocidad ¿en qué dirección está?

52. A6: En el eje y.

53. P: En el eje y, por lo tanto ¿cuánto vale la componente x de la cantidad de movimiento?

54. A6: Cero.

55. P: Cero. ¿Cuánto vale la componente y de la cantidad de movimiento? El producto de la masa por la velocidad en y. O sea, 500. Por lo tanto, para que pudiera haber este cambio de dirección en el movimiento, ¿tuvo que haber un impulso otorgado por una fuerza? ¿Debió existir una fuerza que provea un impulso para que el ciclista pueda doblar? ¿O puede doblar solo, sin que actúe ninguna fuerza? ¿Puede doblar solo, sin que actúe ninguna fuerza?

56. A5: No.

57. P: ¿Por qué?

58. A5: Por la ley de Newton.

59. P: Claro, ¿se acuerdan? Si la fuerza neta que actúa es cero, la aceleración del cuerpo es cero. Y está claro que para doblar necesita aceleración, para eso aprendimos movimiento circular. ¿Si? Son cuerpos, cuando doblan están sometidos necesariamente a una aceleración. ¿De acuerdo? Fantástico. Entonces, tuvo que actuar una fuerza, tuvo que haber un impulso, y ¿cuál tuvo que ser su valor?

$I = F.\ \Delta t = (0;\ 500kgm/s) - (500kgm/s;\ 0)$

60. A: [No se oye]

61. P: Final menos inicial, ¿de acuerdo? O sea, final, 0, quinientos, como dijo Micaela, menos inicial, inicial: quinientos y cero.
Por lo tanto, el vector impulso que actuó, fue su componente x es menos quinientos y su componente y, es mil. O sea ¿qué dirección y sentido tuvo que tener el impulso de la fuerza? Dale ¿a ver? 100, 200, 300, 400, 500, 100, 200, 300, 400, 500, 100, 200, 300, 400, 500, 100, 200, 300, 400, 500, y no hay más porque me tapa lo de abajo. Bueno, entonces este vector ¿cómo es? Claro, menos quinientos, es un, dos, tres, cuatro, cinco. Quinientos, un, dos, tres, cuatro, cinco.

$I = (-\ 500kgm/s;\ 500kgm/s)$

$|\ I\ | = (-\ 500kgm/s)^2 + (500kgm/s)^2 = 707{,}1kgm/s$

$\alpha = 135^o$

Entonces éste representa el vector inicio. Entonces ¿cuánto vale su módulo?

62. A7: La raíz cuadrada de menos quinientos al cuadrado, más quinientos al cuadrado.

63. P: Kilogramos por metros sobre segundo al cuadrado, ¿esto cuánto da? 701. Bueno, a ver ¿cuánto da? Alguien que me haga el favor.

64. A8: 707 punto1.

65. P: Gracias. 707 punto 1 kilogramos por metros sobre segundo, y ¿cuál es el ángulo que forma con el eje x? ¿Cuánto vale ese ángulo?

66. A8: 135.

67. P: Muy bien, éste es 90, éste es 45, así que éste es 135. Muy bien. ¿De acuerdo? Entonces fíjense dibujado acá, esto es así.

68. Yo no sé, a mí nadie me dice como dobló el tipo. Yo no sé si vino, y dobló así de golpe como los platos voladores, ¿no?, que dicen que doblan a 90 grados y eso no se puede, se supone que es anti natural. Bueno, o dobló suavemente y después hizo así, o empezó a doblar, se le torció la bicicleta y después hizo así, y después se enganchó. ¿De acuerdo? O sea, sin saber con detalle lo que pasó en el medio, lo que sabemos es que el resultado del impulso que produjo la fuerza, que le permitió doblar, tiene que ser el promedio, y fíjense que es muy interesante porque si dobló así, imagínense si lo vieran desde movimiento circular, la fuerza centrípeta ¿para dónde tendría que haber apuntado?

69. A4: ¿Para el centro?

70. P: Para el centro, ¿de acuerdo? El impulso tiene la dirección y sentido, correcto con el sentido en el que dobla. Bueno, muy bien, entonces con esto ya practicamos... Una cosa importante. Una cosa importante es que, una vez dada la relación x por delta t, igual a p final, menos p inicial, obviamente nos pueden dar datos que nos permitan construir este lado, o nos pueden dar datos que nos permitan construir este lado. ¿Si? ¿De acuerdo? La cuestión es que uno se las tiene que arreglar para encontrar lo que les piden. Segunda cosa, vemos, sobre todo en este ejemplo, lo importante que es el hecho de que es un vector, de acuerdo, como es un vector tiene la posibilidad de tener distintas componentes y cada componente nos da información útil. ¿De acuerdo? Bueno, muy bien, ahora vamos a seguir adelante. El problema tiene más incisos, pero bueno se los debo. Lo que quiero ahora es seguir adelante. Se acuerdan que cuando hablamos de energía, también hicimos así, primero arrancamos con el caso de una fuerza constante, y después, mediante un razonamiento, dijimos veamos que en realidad sirve para cualquier tipo de fuerzas, ¿si? ¿Se acuerdan de eso?

71. A: [En voz baja, algunos responden que sí]

72. P: Ahora vamos a hacer lo mismo con esto. ¿Está bien? Ahora supongamos qué pasa ahora si la fuerza que actúa es constante a tramos. Lo hacemos con dos tramos, ¿si? Y yo espero que una vez que lo hayamos hecho con dos tramos, ustedes vean que si lo hago con tres, con cuatro o con un millón, va a salir exactamente lo mismo. ¿Si? Esto es así.

Imagínense que tengo un cuerpo. El cuerpo está haciendo un movimiento, y imaginemos que, en una parte del movimiento, está bajo la acción de una fuerza que llamo f1, mientras que en otra parte del movimiento está bajo la acción de una fuerza que llamo f2. De tal modo, que en cada tramo la fuerza si es constante, ¿de acuerdo? Entonces f1 actúa entre el instante que llamo t sub cero, y el instante que llamo t sub. 1. Entonces por acá pasó en el instante t_0, por acá pasó en el instante t_1, y por acá en el instante t sub 2. ¿De acuerdo? Entonces ¿cuánto vale el impulso transferido en el primer plano?	F constante por tramos: F_1 entre t_0 y t_1

73. A5: Fuerza 1

74. P: Claro, t_1 menos t_0. Muy bien, y eso ¿a qué es igual por lo que vimos recién?

$I_1 = F_1\,(t_1 - t_0) = p_1 - p_0$

$I_2 = F_2\,(t_2 - t_1) = p_2 - p_1$

75. A5: La cantidad de movimiento en 1, menos la inicial.

76. P: Claro. Cantidad de movimiento en 1 menos cantidad de movimiento inicial. ¿De acuerdo? Muy bien. Ahora el impulso de la fuerza 2 ¿cuánto vale?

77. A3: F2.

78. P: F2, por p2 menos p1. Pero en ese tramo la fuerza sigue constante, así que esto ¿a qué es igual?

79. A: [No se oye]

80. P: Claro. A la cantidad de movimiento del instante final, acá será la cantidad de movimiento en el instante 2, menos cantidad de movimiento en el instante inicial, en esta parte, o sea la cantidad de movimiento en el instante 1. ¿Si? Por lo tanto, el impulso total, de todo el trayecto, es el impulso de la parte 1, más el impulso de la parte 2.

$I_T = F_1\,\Delta t\,(t_1 - t_0) + F_2\,(t_2 - t_1) = \cancel{p_1} - p_0 + p_2 \cancel{- p_1} = p_2 - p_0$

$I_T = p_f - p_0$

Transferido por una fuerza aunque no sea constante

81. A: [No se oye]

82. P: … Entonces es, cantidad de movimiento en 1, menos cantidad de movimiento en 0, más cantidad de movimiento en 2, menos cantidad de movimiento en 1, por lo tanto, lo que pasa en los instantes del medio, desaparece y queda directamente la cantidad de movimiento en 2, menos la cantidad de movimiento en 0. O sea que el resultado fundamental se mantiene. Que es que el impulso total transferido por una fuerza, aunque no sea constante, ¿si?, aunque tenga que escribirse así de a tramos, vaya tomando distintos valores en distintos tramos. El resultado es que el impulso total transmitido por la fuerza, sigue siendo la cantidad de movimiento final, menos la cantidad de movimiento inicial.
Bueno, muy bien, ¿estamos? Lo único que necesitamos ahora es mirar en qué tipo de situaciones esto nos ayuda a obtener información útil o en qué tipos de cosas esto se puede aplicar. Así que vamos a ver ahora ejemplos en los cuales esto nos sirve como herramienta de trabajo. Para eso vamos a ponernos sobre el problema cuatro, que dice: "La tenista Pepita Vélez hace picar una pelota de tenis de 70 g, arrojándola verticalmente hacia el piso, con una velocidad de 20 metros sobre segundos, desde 80 cm. de altura."
Así que tenemos el piso, tenemos la pelota de tenis. La pelota de tenis es arrojada desde 80 cm. de altura, con una velocidad inicial, cuyo módulo es 3 metros sobre segundo decía por acá, y la masa de la pelotita es 70 gramos, y nos dicen que, bueno, la hace picar dándole una velocidad inicial de 20 metros por segundo, y las cosas suceden de tal modo que la pelota baja, rebota y luego del rebote llega de nuevo a 80 cm. de altura, ¿está bien? O sea, acá está al final, otra vez a 80 cm. de altura, pero ahora con velocidad cero. Bueno, fíjense que esto está muy bien.

12

$V0 = 3$ m/s m= 60g $V_f = 0$

Actúa durante cuánto Δt?

Es una situación muy realista, si uno quiere hacer picar una pelota, que después vuelva a la misma altura, comparado con aquella a la que uno la tiró, uno le tiene que tirar con un poquito de empujón, no? Con un poco de envión. Si no, rebota y vuelve más abajo, ¿si? ¿Está bien? Para que vuelva a la misma altura hay que lanzarla con un envión. Esto está describiendo una situación muy real. Bien. Entonces ¿qué ocurre acá? ¿Cómo es el movimiento?

83. A1: Vertical.

84. P: Exacto. Es un movimiento vertical, cae, llega al piso, y cuando llega al piso ¿qué pasa? O sea, mientras está en el aire, bajando, ¿qué fuerzas actúan sobre la pelotita?

85. A2: Peso.

86. P: El peso, ¿está bien? Como todos sabemos en este planeta no hay aire,… por lo tanto la única fuerza que actúa es el peso. Muy bien. Salvo cuando llega al piso, cuando llega al piso ¿qué pasa?

87. A2: Se activa la normal de la tierra a la pelotita.

88. P: Perfecto, mejor no lo podría haber dicho. ¿Está bien? O sea, actúa la normal. O sea, la fuerza que ejerce el piso, que evita que la pelota siga bajando. ¿De acuerdo? Entonces acá tenemos la normal del piso que ¿durante cuánto tiempo actúa?

89. A2: El instante que está en el piso.

90. P: Claro el tiempo que la pelota esta pegada al piso. Muy bien, que ¿cuánto es? Exacto con tres decimales.

13

N = ? $\rightarrow$ no sabemos nada Δt? $\rightarrow$ no sabemos. Es muy corto.

No sabemos, no tenemos idea. ¿De acuerdo? Muy bien. El tema es que después la pelota sale para arriba, se despega del piso, y a partir de ese momento esta fuerza deja de actuar, y otra vez actúa solamente el peso. ¿De acuerdo? Muy bien. Así que ningún problema porque no sé bien cuánto dura este tiempo. No importa. Pero cuánto vale la normal, ¿cuánto vale N? ¿Cuánto vale? O sea, la fuerza que hace el piso sobre la pelota que lo hace rebotar. ¿Cuánto vale?

91. A7: 600 N

92. P: ¿Por qué 600 N?

93. A7: ¡Ah, no!

94. P: Fíjense que si la normal compensara el peso, la pelota seguiría con velocidad constante. La ley de Newton nos dice que si la normal es igual al peso y llegó acá con cierta velocidad, se sigue moviendo con esa velocidad. O sea, claramente no puede ser eso….

95. A6: La normal menos el peso tiene que ser igual a masa por aceleración.

96. P: Claro, exactamente, la normal menos el peso tiene que ser igual a masa por aceleración, ¿de acuerdo? Pero además…, bueno, listo, no quiero complicarlos demasiado porque es un lío. Está claro que esta es una fuerza que actúa durante un tiempo muy corto, y ni siquiera sabemos muy bien cómo es, porque cuando la pelota recién toca el piso, justamente es acá que empieza a actuar. Después que la pelota bajó un poquito más y se empezó a deformar, después bajó un poquito más y se deformo más, después se deformó más y después empezó a salirse. ¿A ustedes les parece que la fuerza que está haciendo el piso sobre la pelota puede ser constante? ¿Puede ser que vale siempre lo mismo, vale lo mismo acá que allá, allá que acá? No tiene…. O sea que

tenemos un gran problema. Tenemos una fuerza, desconocida, en su módulo, en dirección y sentido, quizás no, pero en su módulo, en cómo es en función del tiempo, si es constante, si no es constante, o sea de ésta no sabemos nada. Que actúa durante un tiempo del cual no sabemos nada. ¿Está bien? Lo único que sabemos es que es muy corto, sabemos que este delta t es muy corto.

<table><tr><td>Entonces, si bien no podemos saber ni esto ni esto, en cambio sí podemos saber, esto [alude a lo que está escribiendo en el pizarrón], o si queremos pongamos directamente: [alude a lo que está escribiendo en el pizarrón].</td><td>Si podemos saber $I = F\ \Delta t$
$I = F\ \Delta t = p_f - p_0$
P_0 = justo antes del rebote
P_f = justo después del rebote
(cuando la fuerza deja de actuar)</td></tr></table>

Bueno, acuérdense que esto es una fuerza neta, donde está incluido el peso. Sí puedo saber el impulso, ¿por qué digo esto?

97. A: [No se oye]

98. P: Claro, porque esto es cantidad de movimiento final, menos cantidad de movimiento inicial. ¿Está bien? Donde cantidad de movimiento inicial ¿qué es?, es la cantidad de movimiento ¿en qué instante?

99. A4: Inicial.

100. P: ¿Cómo? ¿Acá arriba?

101. A4: No, porque estamos hablando del golpe.

102. P: Claro, estamos hablando del golpe. Estamos hablando del rebote. Lo que queremos estudiar es el rebote. ¿De acuerdo? Por lo tanto, antes que comience el rebote, es esta n cantidad de movimiento lo que me importa. ¿Si? O sea, lo que llamo acá cantidad de movimiento inicial tiene que ser justo antes del rebote. Y lo que llamo cantidad de movimiento final acá, tiene que ser justo después del rebote, cuando se despego, entonces, pegó de nuevo. ¿Está bien? Cuando la fuerza deja de actuar. Entonces esto es justo después del rebote. Entonces, ahora el problema es arreglárnosla para saber, si es que se puede con los datos que nos dan, cuánto es la cantidad de movimiento de la pelota, justo antes del rebote y cuánto es la cantidad de movimiento de la pelota justo después del rebote. ¿Estamos de acuerdo? ¿Si? Muy bien, esto es lo importante porque esto lo estamos aprendiendo de nuevo. Lo que estamos aprendiendo de nuevo es que estas nuevas cosas que definimos, estos conceptos de impulso y cantidad de movimiento, nos permiten por ejemplo, entender este tipo de situaciones en los cuales algo pasa durante un tiempo muy cortito. Eso que pasa durante un tiempo tan cortito, nosotros podemos no saber exactamente las cosas que necesitaríamos para entenderlo en detalle. No sabemos exactamente cuánto es la fuerza que hace el piso, no sabemos cuánto dura, lo único que sabemos es que durante un tiempo muy corto hay una fuerza que es capaz de proveer un impulso. Este es el concepto importante. Durante un tiempo muy corto hay una fuerza capaz de proveer un impulso, ¿si? Pero este impulso que proveyó la fuerza, nosotros solamente podemos conocerlo por cómo es el movimiento justo antes y justo después, y no mirando lo que ocurrió en detalle durante. ¿Se entiende? ¿Se entiende el concepto? Entonces ese es el concepto.

<table><tr><td>Ese es el concepto de fuerza impulsiva. O sea, fuerza, que actúa durante un intervalo de tiempo muy corto, pero dando lugar a un impulso igual fuerza por delta t, muy apreciable. ¿Está bien? Que se determina, comparando, vamos a poner… como impulso de la fuerza igual cantidad de movimiento final, menos cantidad de movimiento inicial de la fuerza. O sea, uno determina el impulso de la fuerza mirando cómo se movió el cuerpo, mirando la cinemática.</td><td><u>Fuerza impulsiva</u>: fuerza que actúa durante un Δt muy corto, dando lugar a un $I = F.\ \Delta t$ muya apreciable, que se determina como $I = p_f - p_0$
$p_1 \rightarrow p_1 = m\ v_1 \leftarrow$ justo antes del rebote
$= 0{,}06$ kg</td></tr></table>

¿Está? O sea, esta es la razón de haber encarado este problema, que es que tenemos esta cosa nueva que estamos aprendiendo ahora. ¿Está? Bueno sigamos entonces con la resolución. Habíamos dicho que necesito conocer la cantidad de movimiento de la pelota justo antes del rebote y la cantidad de movimiento de la pelota justo después del rebote. Con esas dos cosas que llamo movimiento final e inicial, sé el impulso de la fuerza. Ahora la pregunta es ésa ¿cómo hago, cómo me las puedo arreglar para determinar la cantidad de movimiento inicial? O sea ahora si entramos en una cosa que es puramente… o sea es cómo nos las ingeniamos para determinar las cosas que nos son útiles para resolver el problema. Entonces lo que llamo cantidad de movimiento inicial es la masa de la pelota por la velocidad inicial, donde inicial quiere decir justo antes del rebote. Bueno dale, la masa ¿cuánto vale?

103. A8: 0,6.

104. P: 0 coma… No, 0,6, son 600 gramos.

105. A8: 0,06.

106. P: 0,06 kilogramos. Muy bien. ¿La velocidad inicial? O sea cómo puedo arreglármelas para saber la velocidad acá antes del rebote que es lo que voy a llamar V sub cero.

107. A9: Con tiro vertical.

108. P: La fórmula de caída libre. Bueno, dale quién la dicta. O sea ahora esto es un paréntesis, ¿si?

109. A7: Velocidad inicial por dos sobre...

110. P: Velocidad inicial.

111. A7: Velocidad inicial más aceleración.

$V1 = v_0 - 10m/s\ t$

$Y = y_0 + v_0 t - 10m/2s^2 . t^2$

$v_0 = 3m/s$

112. A6: No, velocidad final.

113. P: Velocidad final, si velocidad abajo, la verdad es que no sé cómo llamarlo.

114. A6: Uno.

115. P: Eso. Velocidad uno. Bien ésta va a ser la velocidad uno, y ésta va a ser la velocidad 2, y esta la velocidad final. Entonces velocidad uno es igual, dale.

116. A6: Velocidad cero más aceleración

117. P: Velocidad cero más aceleración, bueno la aceleración ¿cuánto es?

118. A7: Menos.

119. P: ¿Diez o menos diez?

120. A7: Menos diez, depende del eje.

121. P: Sonamos, otra vez nos olvidamos de poner el eje. Bueno entonces ¿cómo ponemos el eje?

122. A2: Para abajo.

123. P: ¿Para arriba? Pongámoslo para arriba como hicimos siempre, y después en el parcial vino para abajo, ¿se acuerdan? Bueno, si lo ponemos para arriba, entonces esto es menos diez metros sobre segundos. Muy bien, listo ¿qué más?

124. A2: Altura.

125. P: Altura.

126. A2: Igual altura inicial.

127. P: Igual altura inicial. Bueno pongámosle nombre a esto porque si no… es y igual sub cero.

128. A2: Más velocidad inicial por tiempo.

129. P: Más velocidad inicial, tiempo, cien metros sobre segundo al cuadrado, tiempo al cuadrado.

130. A3: Sobre dos.

131. P: Sobre dos, ¿si?

132. A3: El v sub cero no se usó.

133. P: El v sub cero todavía no lo reemplazamos. ¿En v sub cero que tendría que poner?

134. A6: Menos tres.

135. P: Menos tres. Está bien. Como yo puse el eje positivo para arriba en v sub cero hay que poner menos tres. Bueno ¡listo! ¿Y qué quería yo con todo esto? V 1, bueno mientras ustedes lo hacen yo voy a hacer otra cosa, yo voy a usar la energía mecánica y vemos quien gana. Dale métanle. Entonces la inicial es m g. M por diez por altura más la cinética inicial que es m sobre dos por tres metros sobre segundo cuadrado. Esto es la inicial. La energía mecánica final… es potencial no tengo porque el cero de energía potencial lo pongo acá. Así que esto es cinética y es m sobre dos v 1 al cuadrado. Como la única fuerza que actúa es el peso, el sistema es conservativo, así que la energía se conserva, entonces m sobre dos, elevo al cuadrado es igual a 8… perdón, es igual a la masa por 8 por metro cuadrado sobre segundo al cuadrado, más la masa sobre dos… ¿alguien dijo algo?

$$E_m = m\ 10m/s^2 – 0{,}8m + m/2\ (3m/s)^2$$
$$E_m = m/2\ v_1^2 = m\ 8m^2/s^2 + m/2\ 9m^2/s^2$$
$$v_1 = 5\ m/s$$

136. A7: ¿No es menos diez?

137. P: ¿Dónde?

138. A7: Ahí en la aceleración…

139. P: Energía potencial gravitatoria es m por g por h. Y g es g, o sea el módulo, el número, o sea diez metros sobre segundo al cuadrado, y lo único importante era, y lo dijimos veinte veces, que h es para arriba. ¿De acuerdo? Así que yo puse el cero acá abajo, cuando la pelota está acá, mi h son 80 cm que son 0,8 metros, así que creo que está todo bien. ¿Está bien?

140. A7: Sí.

141. P: Masa sobre dos, tres por tres es nueve metro cuadrado sobre segundo cuadrado. La masa está acá, está acá y está acá, se va. Multiplico por dos en todos lados, así que éste se va. Este se multiplica por dos y éste se va. Y lo que tengo entonces es que v1 al cuadrado es dieciséis más nueve...

142. A8: No, más dos.

143. P: ¿Dos por ocho?

144. A8: Dieciséis.

145. P: ¿Más nueve? Veinticinco. Listo. ¿Terminaron los otros?

146. A9: Si, pero lo saqué mal.

147. P: [Risas] Ven listo, chau. La cinemática es complicada, aburrida, las formulas acá, teníamos que despejar el tiempo, ¿de acuerdo? Si me hubiesen pedido cuánto tarda en llegar acá, bueno no tenía otro remedio, pero como lo que me pedían era la velocidad acá abajo, chau, energía. ¿Si? Bien, no le tengan miedo a la energía. ¿Está? Bien, la cinemática no digo que está mal, pero tardas más y es más fácil de equivocarte. La energía bárbaro, así que bueno, listo. Fantástico, yo ya tengo esto. Así que cuánto vale el impulso, vamos a llamarlo impulso en el punto uno. Llamamos inicial acá arriba, llamamos uno abajo, justo antes del choque, llamamos dos abajo, justo después del choque y llamamos final arriba. ¿Está bien? ¿Si? Así que eso es 0,6 kilogramos por la velocidad. ¿La velocidad va hacia arriba o hacia abajo?

148. A8: Hacia abajo.

149. P: Hacia abajo, entonces yo el eje positivo ¿para dónde lo puse?

150. A8: Para arriba.

151. P: Para arriba, por lo tanto esto va a ser menos cinco metros sobre segundos.
Por lo cual esto es menos 0,3 kilogramos metros sobre segundo. P_1 = -0,3kgm/s
Entonces esto es la cantidad de movimiento justo antes del choque, justo antes del rebote. Bueno, ahora quiero ver la cantidad de movimiento justo después del rebote. Para eso necesito saber la velocidad v2 justo después del rebote. ¿Cuánto vale? Dos ¿no es cierto? ¿Está bien? ¿Cómo puedo hacer para saber esta velocidad?

152. A7: ¿Con la final?

153. P: Claro, si no sé nada de lo que pasó acá en el medio. Sabiendo hasta qué altura llegó al final. ¿De acuerdo? Entonces ahora al revés, en toda esta parte del camino cuando volvió a subir, la única fuerza que actuó, ¿cuál fue? El peso, que es conservativo. Por lo tanto, si yo quiero comparar algo de acá arriba con algo de acá abajo, ¿qué me conviene usar? La energía otra vez. ¿De acuerdo? Entonces, cuánto vale, entre t sub 2 y t final, ¿cuánto vale ahora la energía mecánica? ¿Cómo puedo saber cuánto vale la energía mecánica en ese tramo?

Entre t_2 y t_f (la energía mecánica)

$E_m = E_{cf} + mg\ 0.8m/s$ mirando tf

$v_f = 0$

$E_m = m/2\ v_2^2\ + 0$

$\cancel{m}\ 10m/s^2\ 0{,}8m = \cancel{m}\ /2\ v_2^2$

$\rightarrow\ 8\ m^2/s^2 = |\ v_2^2\ |$

$v_2 = \sqrt{2.8\ m^2/s^2}$

$\rightarrow\ v_2 = 4\ m/s$

154. A7: Haces lo mismo que hiciste antes.

155. P: ¿O sea? ¿Dónde miro, acá o acá? Esa es la pregunta.

156. A7: Arriba.

157. P: Arriba tengo todos los datos, ¿de acuerdo? Entonces esto lo calculo mirando la energía final. Perfecto. La energía mecánica que es la cinética final ¿que cuánto vale?

158. A5: Cero.

159. P: Cero. ¿Por qué?

160. A5: Porque la velocidad final es cero.

161. P: Porque la velocidad final es cero, muy bien. ¿Está bien? Porque la velocidad final vale cero, más la energía potencial. Y la energía potencial ¿cuánto vale?

162. A5: Masa por gravedad por altura.

163. P: Masa por gravedad por altura, 0,8 metros. Y en cambio, calculada usando los datos de abajo, la cinética ¿cuánto vale?

164. A5: m por v2…

165. P: m por v2 al cuadrado. Esa es la cinética y ¿la potencial?

166. A5: No hay.

167. P: Y la potencial cero, porque acuérdense que siempre hay que medir las alturas desde un único punto. Si no, hacemos galleta. Por lo tanto, como puse el cero de la energía potencial acá abajo, la energía potencial vale cero. Con lo cual, listo. Lo que tengo es que masa por 10 por 0,8 es igual a masa sobre dos por la velocidad de 2 al cuadrado, así que no va a ser dos. Bueno de nuevo, la masa no la reemplacé porque está de los dos lados y se va a ir. Esa es la razón por la que no puse el número. Entonces esto me queda 8 metros al cuadrado sobre segundos al cuadrado, igual a v2 al cuadrado dividido 2. Y lo que está dividiendo pasa multiplicando, y el cuadrado se convierte en raíz siempre y cuando yo ponga módulo. Así que 16, raíz de 16 es 4, entonces v2, en módulo, me da 4. Fantástico. Entonces ahora estoy en condiciones de determinar… ¡ah perdón! ¡Upa! Acá me mandé de nuevo una macana terrible. Acá puse un vector y puse un número. ¿Qué hago? Uno de los dos está mal.

168. A4: El vector es 0, menos 0,3.

169. P: Muy bien. ¿De acuerdo? Perfecto. ¿Si? Yo puse el eje y así, el eje x yo supongo que siempre está así, en este eje no pasa nada ahora, así que en realidad este vector tendría que haberlo puesto con un cero adelante. ¿De acuerdo? Pero no lo voy a poner, no lo voy a poner. ¿Por qué no lo voy a hacer? Porque como todo el problema pasa en una sola dirección, nunca voy a poder confundirme. Todo lo que pasa, pasa solamente en esta dirección. ¿De acuerdo? Entonces para que voy a andar llevando vectores, paréntesis, componentes cero, ¿para qué me voy a andar matando si yo sé que todo pasa en una sola dirección? Entonces lo que voy a hacer es... le voy a sacar el vector a éste. Ahí está. Que es lo que hacíamos cuando en cinemática veíamos tiro libre en dos direcciones. No usábamos vectores. Usábamos directamente números en esa única dirección que existía en el problema. ¿Me dejan hacer eso?

170. A10: Si.

171. P: Si. Ojo, pero teniendo presente lo que de verdad significa, por eso antes no lo hicimos. ¿Está bien? Bueno, entonces vamos a ver la cantidad de movimiento en el instante 2, ¿cuánto vale?

172. A5: 0,06.

173. P: 0,06 kilogramos ¿por?

174. A5: 4.

175. P: 4 ¿positivo o negativo?

176. A5: Positivo.

177. A7: Positivo, porque apunta para arriba.

178. P: ¿Positivo?

179. A7: Si.

180. P: Obvio no, porque… apunta para arriba. Así que esto es 4 metros sobre segundo. Así que la cantidad de movimiento, muy bien, justo después del rebote es, 0,24 kilogramos por metros sobre segundos.

Moraleja, moraleja, entonces el impulso producido por la fuerza, por la fuerza del piso, estrictamente hablando por la combinación de la fuerza del piso y el peso, ¿no? O sea, la fuerza neta, que actuó durante un tiempo tan cortito que ni siquiera sé cuánto es, pero si puedo saber el impulso. ¿Cuánto tuvo que ser el impulso?

$I = F_{neta}.\ \Delta t = p_2 – p_1$
$= 0{,}24$ kgm/s – (-0,3kgm/s)
$I = 0{,}54$kgm/s

181. A6: 0,54.

182. P: Exacto, la diferencia entre la cantidad de movimiento en 2 y la cantidad de movimiento justo antes que rebote, o sea, 0,24, menos, menos 0,30. ¿De acuerdo? O sea, más 0,54 kilogramos por metros sobre segundo. Y fíjense que otra vez, ¿está bien que sea positivo?

183. A7: Si.

184. P: O mejor dicho, ¿se puede predecir el signo de antemano?

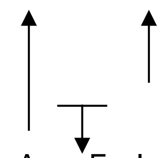
185. A7: Si.

186. P: ¿Sin saber en detalle cual fue la fuerza, y el tiempo y esas cosas? ¿Por qué sí?

187. A7: Porque el impulso lo que hace es cambiar de sentido.

188. P: Exactamente, muy bien.

La pelota venía así, y después sale así. O sea que el vector velocidad de esta pelota tuvo que cambiar de negativo a positivo, por lo tanto, ¿cómo tuvo que ser el vector aceleración?



$a \ \alpha \ \Delta v \propto F \propto I$
Proporcional

189. A5: Positivo.

190. P: Claro, ¿si? O sea en un problema que yo tengo definido mi sistema, para que la velocidad pase de negativa a positiva, ¿el cambio de velocidad cómo es?

191. A5: Positivo.

192. P: Positivo, súper positivo. La aceleración es proporcional al cambio de velocidad, ¿está bien? Y por la ley de Newton esto a su vez es proporcional a la fuerza, que por la definición de impulso es proporcional al impulso, así que impulso juega un papel parecido al de la aceleración media, o sea nos dice qué fuerza promedio pudo producir ese cambio en la cantidad de movimiento, por lo tanto está bien que si produjo esta clase de rebote, tuvo que ser positivo, ¿se entendió?

193. A5: Si.

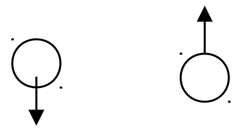
194. P: Si, bueno. Ahora yo supongo que esto sí es probable que sea nuevo para la mayoría de ustedes, ¿es así? ¿Para quién es nuevo este tema? ¿Para quién no es nuevo? Son realmente poquitos, cuatro o cinco. ¿Se entendió? ¿Si? Bueno hacemos un descansito de diez minutos, ¿si?

Corte.

195. P: …Más sobre las fuerzas impulsivas [Lo escribe también en el pizarrón como título]. Analicemos con cuidado el problema que resolvimos recién.

El rebote dura Δt un muy corto, digamos 0,1 seg
I = 0,54kgm/s

V = s



v = 4

En el problema que resolvimos recién, nosotros dijimos que el rebote dura un delta t muy corto. Por decir algo, por decir algo, sin que esté demasiado incorrecto, digamos, no sé… cero coma, una décima de segundo puede durar... Entonces, fíjense que lo que estamos diciendo es que, durante un lapso de tiempo muy cortito actúa una fuerza, que sin embargo fue capaz de proveer un impulso, ¿no? capaz de cambiar, de invertir la cantidad de movimiento de la pelota, ¿si? Hicimos la cuenta y nos dio 0,54 kilogramos metros sobre segundos, para el rebote de la pelota que entró ¿con cuánto? Entró con cinco, ¿se acuerdan? Y salió con cuatro. ¿Se acuerdan? De velocidad. Bueno, fantástico.

A ver, si bien no sabemos exactamente como es la normal, ¿si?

Si bien no sabemos exactamente cómo es la N

N media $\longrightarrow$ I

Cómo es la fuerza ésta que produjo el cambio en el movimiento, podemos hacer una vuelta y decir que la normal promedio, si hubiera sido igual durante el 0,1 segundo, hubiera actuado siempre el mismo valor de normal, ¿sí? Podemos sacar una especie de fuerza promedio que actúa, ¿se entiende? Entonces la normal media la quiero meter en la cuenta del impulso y sabiendo que el impulso generado y el tiempo durante el cual actúa la fuerza, saco una estimación de qué grande fue esa fuerza. ¿Se entiende lo que escribo? Bien, dale ¿qué tengo que hacer? El impulso sobre el tiempo, ¿qué me da?

196. A1: …una fuerza…

197. P: ¿El impulso sobre el tiempo qué me da? ¿Qué fuerza me da?

$I / \Delta t =$ "F_{neta}" media
$I / \Delta t = N_{media} - P$

198. A1: Neta.

199. P: Neta. ¿Se ve? Y la fuerza media ¿qué es?

200. A1: Es la misma, la resultante.

201. P: La resultante, por eso. ¿Y quién la compone? O sea y sobre delta t, ¿a qué es igual?

202. A1: La normal.

203. P: ¿Está bien? ¿Si? O sea usando el eje positivo hacia arriba, la normal queda arriba, o sea la normal de X, pero también está el peso, no quiero quedarme sin el peso. ¿Está bien? Muy

bien. Bueno para los que llegaron tarde, seguimos con el mismo problema de antes, el tema es… Bueno sigo con el problema anterior.

Quiero aclarar una cosa importante. Fíjense con la velocidad con la que entró el rebote y con la que salió el rebote, yo saqué cuánto tuvo que ser el impulso que le transmitió la fuerza que actuó. ¿Sí? Ahora, ese impulso yo siempre puedo decir que fue igual al tiempo que duró el rebote por la fuerza promedio, la fuerza media.

$I = \Delta t\ F_{media}$

$I / \Delta t = 0,54/0,1 = 5,4N = N_{media} - 0,6N$

$N_{media} = 6N$

Dibujo

¿Está bien? Entonces por más que yo sepa que lo más probable es que esa fuerza no haya sido constante, pero bueno puedo sacar una fuerza promedio. O sea qué valor debería haber tenido la fuerza, de ser una fuerza constante, para producir ese impulso, en el tiempo cortito que duró. El tiempo cortito que duró, le digo bueno, será más o menos una décima de segundo. Y en realidad me estoy pasando, es bastante más corto que eso. Pero bueno. Entonces para saber cuál fue la fuerza media que actuó, tengo que hacer el impulso dividido el tiempo. Pero el tema importante acá es que la fuerza que me aparece tendría que ser la fuerza de la que me habla la ley de Newton, o sea la fuerza neta. ¿De acuerdo? Y durante el choque, el rebote, entra, está chocando y sale, acá cuando está actuando la fuerza del piso, ¿sí? El peso también está actuando. O sea el peso está siempre. De manera que esta fuerza media que produce rebote está compuesta, estrictamente hablando por la normal media y también el peso. ¿Si? Muy bien. Entonces pongámosle números. 0,54 dividido 0,1. Claro, dividir por 0,1 es lo mismo que multiplicar por diez, ¿no es cierto? Así que 0,1 multiplicado por diez es 5,4 kilogramos por metros sobre segundos al cuadrado, o sea Newton. Y eso fue igual a la normal media menos el peso. Y el peso ¿cuánto era?

204. A7: 0,6, 0,06 kilogramos.

205. P: Kilogramos masa por diez, kilogramos fuerza. ¿Está bien? Así que 0,6

206. A7: Newton.

207. P: Newton. ¿Está?

208. A8: 6 N es la N media. Claro.

209. P: Claro. Entonces la normal media me dio 0,6, perdón 6. Perfecto. ¿Está? Ahora ¿qué pasa si hago el mismo razonamiento pero con un tiempo más corto?

MÁS REALISTA → $\Delta t = 0,01$ seg

$N_{media} = P = 54N$

↓

0,6N

. La "fuerza impulsiva" fue N_{media}. En cambio P da un $I = \underbrace{P}_{\text{Chiquito}}\ \Delta t$

. Peso da una contribución muy chiquita

→ no da fuerza "impulsiva"

a. chiquito

210. A9: La normal va a ser más grande.

211. P: Si pongo una centésima de segundo al rebote, ¿qué va a pasar?

212. A9: La normal se va a hacer más grande.

213. P: Claro, ¿esto cómo va a dar?

214. A9: Un número más grande.

215. P: Ahora es 0,54 dividido 0,01, o sea multiplico por 100. 54. El peso, ¿cuánto es?

216. A8: 0,6 Newton.

217. P: Muy bien, entonces ese es el punto interesante al que quería llegar. El peso da una contribución a este cambio de impulso que es muy chiquitito comparado con el de la verdadera fuerza impulsiva entre comillas. O sea la fuerza impulsiva, fue la normal, ¿está bien? En cambio, el peso, da un impulso que es el peso multiplicado por el tiempo, y si éste es muy chiquito, esto es muy chiquito. Entonces la fuerza peso no puede ser impulsiva. ¿Entienden? O sea la fuerza peso no puede producir un cambio apreciable en la cantidad de movimiento de un cuerpo si actúa durante un tiempo muy chiquitito. ¿Está? Por eso los objetos, o las interacciones capaces de proveer fuerzas impulsivas no son cualesquiera, no son todas. ¿Sí? ¿De acuerdo? Estas fuerzas impulsivas aparecen obviamente, típicamente, en choques, rebotes contra paredes, contra pisos, contra lo que sea. O si quieren, por ejemplo, un piolín, con un cuerpo que se mueve para acá. En el instante que se tensa el piolín y el cuerpo se detiene, hay un cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo muy apreciable que lo produjo una fuerza impulsiva. En este caso, la fuerza impulsiva, ¿quién la proveyó?

218. A7: La tensión.

219. P: La tensión de la soga. ¿De acuerdo? Entonces, llamamos fuerzas impulsivas, a aquellas fuerzas que pueden producir un cambio de cantidad de movimiento muy apreciable, en un lapso de tiempo muy cortito. Y de hecho este ejemplo fue interesante porque nos permite entonces separar lo que llamamos normal, o sea la fuerza del piso sobre la pelota, es la que puede proveer este cambio repentino en la cantidad de movimiento, mientras que la fuerza peso no lo puede hacer. ¿Está bien? ¿Si? Porque la fuerza peso tiene un valor que, comparativamente lo que aporta es muy pequeñito, y entonces podemos olvidarnos de considerarlo. ¿Está? Si bien no resultó tan chico en este ejemplo, en el que pusimos 0,1 segundo, si ocurrió en el caso que consideramos la duración del rebote como 0,01 segundo, que está mucho más de acuerdo con lo tecnológico. ¿Está? El tiempo de rebote es extremadamente chico. ¿Sí? Entonces, cuando a ustedes les pidan una fuerza impulsiva no necesitan tener en cuenta las otras fuerzas. ¿De acuerdo? Bien. Bueno y ahora vamos a trabajar… perdón... ¿alguna pregunta, duda, comentario? Porque vamos a cambiar el tema totalmente.
Bueno, ahora vamos a pasar a otro tipo de aplicaciones del concepto de impulso y cantidad de movimiento que realmente es el más importante. Vamos a ver, vamos a preguntarnos qué ocurre en este tipo de problemas. A ver. Bien, lo perdí.

SISTEMAS DE 2 (o más) cuerpos (cuerpos y sus posibles interacciones)

Acá está. Sistemas de dos o más cuerpos. Bueno, vamos a ver. La idea de impulso y cantidad de movimiento muestra todo su potencial y resulta mucho más útil cuando estamos analizando, no lo que le pasa a un solo cuerpo, sino lo que le pasa a más de un cuerpo, dos o más, y sus posibles interacciones, ¿está bien? Para eso pensemos exactamente lo que escribimos.
Imagínense que tengo un cuerpo A, que tiene una cierta masa y que tiene una cierta velocidad. Un cuerpo B, que tiene una cierta masa y una cierta velocidad. Entonces, éste es un sistema de dos cuerpos. ¿Está bien? Supongamos que las únicas fuerzas presentes son las de interacción entre A y B.

Las únicas fuerzas presentes son las de <u>interacción entre A y B</u>

$\Downarrow$

todos los pares de acción y reacción están CONTENIDOS

¿Sí? O sea, por lo que sabemos de la ley de Newton, siempre que de una fuerza sobre un cuerpo, la existencia de una fuerza sobre un cuerpo, es una manifestación del hecho de que ese cuerpo está interactuando con otra cosa. ¿Se acuerdan que dijimos eso? O sea no hay ninguna fuerza que salga de la nada, sino que cada fuerza que aparece en un cuerpo pone de manifiesto que ese cuerpo está siendo influenciado por otro cuerpo. Y por lo tanto, si sobre este cuerpo aparece una fuerza, esta fuerza se debe a la interacción con este cuerpo o con otros cuerpos, que están afuera. Pero supongamos que las únicas fuerzas que existen son las que están adentro. ¿Si? Por lo tanto esta fuerza es la fuerza que el cuerpo B hace sobre el cuerpo A, ¿sí? Por la tercera ley de Newton sabemos que sobre el otro cuerpo, aparece una fuerza igual y contraria que es la fuerza que hace el cuerpo A sobre el cuerpo B. Y esto es lo que llamamos siempre, un par de acción y reacción. ¿De acuerdo? Entonces, lo que estoy diciendo acá de importante es que, consecuencia de esto, todos los pares de interacción, o sea de acción y reacción, están contenidos en esta línea imaginaria que yo hice acá que encierra los cuerpos que voy a seguir, el movimiento que voy a seguir, o sea en el sistema.

en el sistema

$I_A = F_{BA}\, \Delta t = p_{Af} - p_{A0}$

$I_B = F_{AB}\, \Delta t = p_{Bf} - p_{B0}$

¿Está bien? O sea, sistema siempre es la porción de materia que el estudio me interesa. Entonces, ahora voy a contarles algo que ocurre cuando todas las fuerzas que actúan sobre estos cuerpos se deben solamente a interacciones propias del interior. ¿Sí? Muy bien. Entonces hagamos el siguiente análisis, imaginemos que pasa un tiempo delta t y yo me pregunto cuánto es el impulso, tal cual el que vimos antes, que actuó sobre el cuerpo A. Espero sugerencias.

220. A4: La fuerza que ejerce B en A

221. P: Muy bien, la fuerza vector que ejerce B en A, por el delta t. Muy bien. Y esto por la ley que estuvimos discutiendo la primera hora, ¿a qué es igual?

222. A4: A la fuerza de A sobre B.

223. A6: Cantidad de movimiento…

224. P: Eso viene después. Claro. Está bien. Lo que viene acá es la cantidad de movimiento ¿de qué?

225. A6: De A.

226. P: ¿De A qué?

227. A6: Final.

228. P: Muy bien, final, menos la cantidad de movimiento de A inicial. ¿Está bien? Bueno ahora, hagamos la cuenta del impulso que aparece sobre el cuerpo B. ¿A qué es igual el impulso sobre el cuerpo B en el mismo tiempo?

229. A4: A la fuerza que hay en A.

230. P: Muy bien, a la fuerza de A sobre B por el tiempo. Y según lo que vimos, ¿esto qué es?

231. A4: Cantidad de...

232. P: Claro, la cantidad de movimiento de B final, menos la cantidad de movimiento de B inicial. Ahora ¿cómo son F_{ba} y F_{ab}?

233. A5: Iguales y contrarias.

234. P: Ah! este es el punto fundamental de lo que quiero mostrarles ahora.

3º Ley de Newton!

$$F_{A \to B} = -F_{B \to A}$$

$$I_T = 0 = (p_{Af} - p_{A0}) + (p_{Bf} - p_{B0})$$

Tercera ley de Newton: la fuerza de A sobre B es igual a menos la fuerza de B sobre A. ¿Se acuerdan que cuando usaban vectores se escribe así? ¿Sí? Por lo tanto ¿qué pasa con esta cantidad comparada con esta cantidad?

235. P: Son iguales y

236. A5: contrarias.

237. P: Contrarias ¿Sí? Por lo tanto, si yo sumo miembro a miembro, ¿esto qué me da?

238. A6: Cero.

239. P: Claro. O sea, me da el impulso total que resulta que va a ser cero, igual… ¿esto cuánto va a valer? Si sigo escribiendo acá debajo de todo, seguro que los de allá no ven, ¿no es cierto? Bueno, si sumo esto más esto, ¿cuánto me da?

240. A6: Cero.

241. P: Cero. Como dijimos recién, con lo cual tengo este interesante resultado, el impulso total resulta que es cero. Y resulta que es igual, a la suma de esto con esto. O sea esto es el impulso de A final, menos el impulso de

242. A inicial, más el impulso de B final, menos el impulso de B inicial. O sea… voy a empezar así, disculpen. Definiendo.
¿Dije cantidad de movimiento? Definiendo cantidad de movimiento total del sistema se la siguiente manera, una P mayúscula vector, que no es el peso, como del impulso de A, la cantidad de movimiento de A más la cantidad de movimiento de B.

Definiendo "cantidad de movimiento total del sistema":

i. $P = p_A + p_B$

ii. $0 = p_f$

Me encuentro con este resultado bárbaro que es que cero es igual a, fíjense, acá tengo cantidad de movimiento de A final, más cantidad de movimiento de B final, o sea cantidad de movimiento del sistema final. ¿Se entiende?

243. A10: No, volvamos para atrás.

244. P: Volvamos. Cantidad de movimiento de A final, menos cantidad de movimiento de A inicial, más cantidad de movimiento de B final, menos cantidad de movimiento de B inicial. Entonces, fíjense, si junto éste con éste, tengo la suma: cantidad de movimiento de A final más cantidad de movimiento de B final. Pero a eso llamé cantidad final de movimiento del sistema, o sea cantidad de movimiento total del sistema final. Y restando tengo menos, lo saco factor común, ¿y qué tengo? Menos cantidad de movimiento de A inicial, más, porque el menos lo puse de factor común, y me queda un signo más, más cantidad de movimiento de B inicial. Pero a esto cómo lo llamé, lo llamé cantidad de movimiento total del sistema, en este caso inicial. En el instante inicial.
Moraleja, conclusión, del hecho de que los pares de interacción cumplan la ley de Newton, de este hecho, a causa de esto, sale necesariamente, en este tipo de situación, que el impulso total de la fuerza de A sobre B y de la fuerza de B sobre A, da cero. Y eso causa que el impulso total del sistema final, menos el impulso total del sistema inicial, dé cero, o sea, ¿qué encontré? Es decir, que si esta diferencia da cero, ¿qué significa? Significa que la cantidad de movimiento total del sistema final es igual a la cantidad de movimiento total del sistema inicial. O sea, volviendo para atrás, cantidad de movimiento de A, final, más cantidad de movimiento de B final, es igual a cantidad de movimiento de A inicial, más cantidad de movimiento de B inicial.

$$\underbrace{(p_{Af} + p_{Bf})}_{\text{i. } p_f} - \underbrace{(p_{A0} + p_{B0})}_{p_0}$$

Conclusión $\rightarrow$ de $F_{A\rightarrow B} = -F_{B\rightarrow A}$

Sale $\rightarrow I_T = 0 = p_f - p_0$

$\Rightarrow$ Ley de conservación de la cantidad de movimiento total!

$P_f = P_0 \rightarrow P_{Af} + P_{Bf} = P_{A0} + P_{B0}$

¿Entienden? Entonces la cantidad de movimiento de A solo puede cambiar, de hecho… la cantidad de movimiento de B solo también puede cambiar, pero el cambio, lo que cambia la cantidad de movimiento de A y lo que cambia la cantidad de movimiento de B, no puede ser cualquier cosa, sino que es justo lo que cambia a uno, lo que cambia al otro, tiene que compensarse exactamente, de tal manera que la cantidad de movimiento total del sistema siempre da lo mismo. O sea que encontramos una nueva ley de conservación, asociada por el concepto de impulso. Muy importante,
¡MI!
MI quiere decir muy importante, esto es un vector. Por lo tanto, si yo digo esto, o lo que es equivalente, digo esto, lo que estoy diciendo es que cada componente cumple la relación, ¿entendido? O sea, el impulso total final de componente X, tiene que ser igual al impulso total inicial del componente X. El impulso total final del componente Y, tiene que ser igual al impulso total inicial del componente Y. Y así es la vida.

$P_{fx} = P_{0x}$
$P_{fy} = P_{0y}$

SISTEMA con SOLO FUERZAS INTERNAS
→ al interactuar $\Delta pA = - \Delta pB$
→ no puede haber ΔpA sin que haya simultáneamente $\Delta pB = -\Delta pA$

O sea, sistema con sólo fuerzas interiores, internas, que cumplen el principio de acción y reacción, tenemos como resultado, que al interactuar, lo que cambia en el impulso de una de ellas, tiene que ser igual a lo que cambia en el impulso de la otra.

Moraleja: no puede haber cambio de movimiento del cuerpo A sin que haya simultáneamente, un cambio de cantidad de movimiento de B que sea exactamente igual y contrario. Ejemplo: imaginamos que tenemos un solo cuerpo, ¿qué les gusta? ¿Ustedes son más bien concretos o son más bien soñadores?
Bueno, no importa, supongamos que tenemos un tipo en una pista de hielo. De tal manera que resbala perfectamente, o sea, rozamiento cero. ¿Está bien? O si quieren algo más dramático, imagínense un astronauta, en el medio del espacio, suspendido en el medio del espacio.

Dibujos

245. A8: ...

246. P: … otras cosas, [Risas] pero bueno. Imaginémonos que esta persona se quiere mover, ¿cómo puede hacer para moverse? No lo sé.

247. A9: Tirar para abajo.

248. P: A ver, ella dice tirar para abajo.

[Risas]

249. A10: Para adelante

250. A4: Para atrás.

251. P: Sin tirar al hombre, y lo mismo vale para el astronauta suspendido en el espacio sideral. Se quiere mover, ¿qué puede hacer?

252. A5: Saltar.

253. P: Saltar. Acá hay una idea, saltar. Si salta, se mueve, bárbaro, pero quería ir para el costado, quería salir de la pista, no quería… Se puede mover para arriba y para abajo, muy bien. ¿Y éste? ¿Éste si salta qué pasa?

254. A5: Nada.

255. A7: Puede flotar.

256. P: Quiere moverse, quiere irse, ¡quiere tomar la leche! Bueno ¿y? ¡Vamos!

257. A10: …

258. P: ¿Cómo, cómo?

259. A3: ...

260. P: Puede ser un cometa, ¿no? No tiene garantizado que vaya a llegar. Bueno. Fíjense lo que acabamos de describir. Lo que acabamos de describir es que, ponerse en movimiento claramente es cambiar su cantidad de movimiento, es pasar de tener velocidad cero acá, a tener velocidad distinta de cero. Entonces una persona, ese cuerpo, para ponerse en movimiento lo que tiene que cambiar es su cantidad de movimiento. Ahora por lo que acabamos de ver, un cuerpo solamente puede cambiar su cantidad de movimiento si actúa sobre él una fuerza. El hecho de que actúe sobre él una fuerza, necesariamente tiene que estar asociado a que interactúa con otro cuerpo, ¿de acuerdo? Por lo tanto, ni el patinador, ni el astronauta se pueden poner en movimiento a menos que interactúen con otro cuerpo de tal manera de, ellos cambiar su cantidad de movimiento, que el otro cuerpo la cambie en exactamente la misma cantidad pero para el otro lado y así, moverse.

261. A5: Tirar la ropa.

262. P: Sí, ¿perdón? ¿Cómo?

263. A5: Por eso tirando la ropa se mueve.

264. P: Claro, ves, esto es una buena idea, porque fíjense, éste no puede hacer nada, ¿entienden? Si hace así con los brazos, no sirve, si hace así con los pies, no sirve, no hay nada que pueda hacer que lo ponga en movimiento. Entonces ella dice qué pasa si el tipo… bueno, qué pasa si el tipo se saca el pulóver y lo tira. Arroja el pulóver. Entonces ¿qué pasa?

265. A5: Se va para atrás.

266. P: Claro, muy bien. Ahora éste es el cuerpo A, el pulóver es el cuerpo B. ¿Está bien?

267. A: Por eso, cuando arroja la ropa se mueve.

268. P: Exactamente, entonces, cuando arroja el pulóver con un cierto velocidad del pulóver, ¿el se va a quedar quieto?

269. A5: No.

270. P: No, porque en el propio acto de lanzar el pulóver, la fuerza que él hace sobre el pulóver tiene como acción y reacción una fuerza del pulóver sobre él mismo, que a su vez le trasmite impulso. Y los impulsos… Entonces el cuerpo A… dijimos que lo que cambia el impulso, perdón, la cantidad de movimiento de B y lo que cambia la cantidad de movimiento de A, tiene que ser, ¿cómo dijimos?

271. A6: Iguales.

272. P: Iguales y contrarios. Entonces, si el pulóver tenía velocidad cero y ahora tiene velocidad para allá, entonces la persona que lo sostenía primero tenía velocidad cero y ahora tiene que tener velocidad para allá. De tal manera que se cumpla, ¿qué relación? De manera que se cumpla, ¿qué? La cantidad de movimiento total inicial, o sea cuando todo estaba quieto, sea igual a la cantidad de movimiento total final una vez que lanzó el pulóver. ¿Entienden? Entonces no

puede haber movimiento, fíjense que está bueno, porque es usando el pulóver, o sea mientras no se empuja, me da cero. Estoy haciendo exactamente lo mismo, nada más que de una manera más efectiva obviamente, porque la pared prácticamente ni se entera que uno la quiso empujar. Esperen. A ver, dale.

273. A1: ¿No depende de la masa?

274. P: Ah! ¡Momento, momento! Bueno justamente, lo vamos a ver. Entonces, vamos a ver. ¿Cuánto vale la cantidad de movimiento total inicial? ¿Cuánto vale?

$$P_{TOT},\, 0 = m_A\, v_A + m_B\, v_B = 0$$

$$_{i.} \quad \| \qquad \|$$

$$0$$

$$P_{TOT},\, f = 0 = m_A\, v_{Af} + m_B\, v_{Bf}$$

275. A1: Cero.

276. P: Cero. ¿Está bien? La masa del cuerpo A por la velocidad de A, más la masa de B por la velocidad de B. Como ambos están quietos, las dos velocidades son cero, así que esto es cero y esto es cero, así que la cantidad total del sistema en este ejemplo, inicial, vale cero. Pero por lo que vimos, la cantidad de movimiento total final, también va a tener que ser cero. ¿Y cómo se calcula? Se calcula masa de A por velocidad de A final, más masa de B por velocidad final de B. ¿Está? Entonces vamos a escribirlo ahora, en este ejemplo concreto, en una dirección. Llamo x a esto.

Entonces ésta es la componente x. Lo que tenemos es que la masa de A por la velocidad en x de A, más la masa de B por la velocidad de B, tiene que ser cero.

$$x)\; m_A\, v_{Af} + m_B\, v_{Bf} = 0$$

$$m_A\, v_{Af} = -\, m_B\, v_{Bf} \,/\, m_A$$

Por lo tanto, vamos a ver qué relación hay entre la velocidad con la que cae el pulóver cuando lo lancé y la velocidad que lleva la persona cuando lo lanzó. ¿Sí? ¿De acuerdo? Entonces, como esto tiene que sumar cero. Fíjense como es la velocidad de A comparada con la velocidad de B, para eso vamos a despejarlo. Esto estaba sumando, pasa… ¿cómo pasa?

277. A3: Restando.

278. P: Menos masa de B por velocidad de B. Y la masa de A está multiplicando, pasa dividiendo. Excelente, entonces ella tenía razón. No me acuerdo quién fue… ¿vos? Si. El hecho de que la cantidad de movimiento de ambos sea igual, no quiere decir que la velocidad de ambos sea igual. Las velocidades tienen una relación que tiene que ver con el más. Fíjense si B es el livianito, el pulóver, y A el pesado, la persona, ¿este número cómo es? ¿Este número es más grande que uno o más chico?

279. A3: Más grande.

280. A2: Más chico.

281. P: Éste es el pulóver, y éste la persona, éste pesa un kilo y éste, 80 kilos. La relación es no excluyente. ¿Está bien? Por lo tanto, la velocidad que logra el patinador arrastrando el pulóver, ¿está bien? por supuesto que es mucho más chica que con la que sale arrojado el pulóver.

282. A3: Como no frena, no importa…

283. P: Excelente, claro, muy bien. ¿Entendieron lo que dijo? Claro, cómo no se frena, no le importa. Muy bien. Bueno y ¿qué tiene que hacer si quiere doblar?

Dibujos

284. A5: Sacarse otra cosa. [Risas]

285. P: Claro, tiene que sacarse otra cosa y tirarla con la dirección al revés a la que el quiere doblar. Así que conviene ir siempre con mucha ropa, [Risas] por las dudas que uno se encuentre con alguna de estas situaciones. Éste la tiene más difícil porque si se saca el traje espacial… bueno, se terminó este problema. Bueno, muy bien. Entonces vamos a hacer ahora un análisis similar, la verdad es que no sé si ponerle o no rozamiento. Ustedes qué opinan ¿le ponemos o no le ponemos?

Imaginemos esta situación: estudiante de Física del CBC que va a pelear con [Risas] alguien que no vamos a nombrar porque alguien se puede ofender, ¿sí? Así que éste es un estudiante de física, ¿qué cuánto puede pesar? Ustedes cuánto pesan… 60. Y este es un barra brava de Inglaterra, así nadie se enoja, que tiene una masa de 180 ¿está bien? Analicemos las chances de uno y del otro, en un encuentro de mala manera. No se van a pegar, porque no exageremos, pero se van a pegar mutuamente un empujón... Entonces la pregunta es, cómo es esta situación para el alfeñique de esta facultad, y el barra brava. El alfeñique es el cuerpo A y el barra brava el cuerpo B. Entonces el alfeñique dice “mejor no lo empujo porque no voy a poder ni moverlo”, y el barra brava dice “yo sí lo empujo total, va a salir volando y yo ni me muevo”.

Dibujos

Sin embargo, analicémoslo a la luz de las cosas que estamos aprendiendo. Vamos a ver. Imaginemos que el alfeñique empuja la barra brava, qué pasa con la fuerza del alfeñique sobre el barra brava, ¿qué se obtiene como reacción?

$F_{AB} \leftrightarrow -F_{BA}$
$P_A \quad P_B \quad P = 0$
$P = 0 = P_A + P_B \rightarrow P_A = - P_B$
$v_A \leftrightarrow v_B$?
Supongamos $|v_B| = 1$ m/s
$|v_A| = m_B\, v_B / m_A = 3$m/s (proporcional al peso)

286. A4: La misma fuerza.

287. P: Claro, o sea, aparece una fuerza del barra brava sobre el alfeñique, igual y contraria. Entonces, a nivel fuerzas no hay mucho problema. ¿Está bien? Si éste empuja a éste o éste empuja a éste, en las dos situaciones, la fuerza que el primero haga sobre el segundo, tiene inmediatamente asociado un par de acción y reacción que hace el segundo sobre el primero, que es igual y contraria. Por eso, si van a pegar miren bien, total la fuerza va a ser la misma y a lo mejor ustedes tienen mejor puntería de embocar en algún lugar que duela ¿está bien? porque la fuerza sea igual no quiere decir que a los dos les va a doler lo mismo. ¿De acuerdo? Muy bien. Así que en ese sentido están empatados. Fantástico, ¿qué pasa con el impulso? Perdón. ¿Qué pasa con la cantidad de movimiento de A y la cantidad de movimiento de B? Por ahora olvidémonos del rozamiento, después si quieren le ponemos rozamiento. ¿Qué pasa?

288. A4: … va a ser igual a la velocidad de A por la masa de A sobre la masa de B por la velocidad de B.

289. P: Ésta es la velocidad ¿no? Vamos a ver si logramos entender. ¿Qué pasa con la cantidad de movimiento de A y la cantidad de movimiento de B? Después del empujón, o sea, después del empujón, obviamente se separan, éste va para acá, éste va para allá, se separan, dejan de interactuar y por lo tanto, cada uno va a tener una cantidad de movimiento fija, si no cambia más. ¿Cómo van a ser esas cantidades de movimiento de A y de B?

290. A4: La de A va a ser más grande que la de B.

291. P: ¿La de A va a ser mucho más grande que la de B? ¿Qué opinan de lo que dijo él?

292. A6: Que hace la misma fuerza porque…

293. P: No, de la fuerza ya hablamos, estamos hablando de la cantidad de movimiento.

294. A7: Que tiene la misma cantidad de movimiento porque las fuerzas son iguales y contrarias pero el tiempo de interacción es el mismo.

295. P: Claro, es igual que con el pulóver. Para el gordo tirar el alfeñique es como tirar el pulóver. ¿Está bien? O sea la cantidad de movimiento total del sistema, que inicialmente valía cero, después tiene que tener el mismo valor, o sea la cantidad de movimiento de A más la cantidad de movimiento de B, tiene que sumar cero, o sea tienen que ser contrarias, iguales y contrarias. O sea, la cantidad de movimiento con la que sale volando el alfeñique es la misma que la cantidad de movimiento con la cual el barra brava hace un poquito así. ¿Está bien? O sea que esto está muy bien fundamentado con la ley de Newton, pero tiene muy poco que ver con la realidad, ¿no es cierto? Ahora la pregunta es ¿qué pasa con la velocidad de A y la velocidad de B?

296. A3: La de B es mayor que la de A.

297. P: Para hacer esto hagamos una suposición. Supongamos, que la velocidad del barra brava, la velocidad de B, el módulo fue... yo qué se,… y la de B fue un metro por segundo. ¿Cuánto va a ser la velocidad de A?

298. A3: Masa de B por velocidad de B sobre masa de A.

299. P: Masa de B por velocidad de B sobre masa de A, es igual a la velocidad de A. O sea, las velocidades van a estar en relación a las masas. El más pesado tiene velocidad más chica, el más liviano tiene velocidad más grande, exactamente las mismas proporciones. O sea, que si este cuerpo tiene una masa tres veces menor que ésta, la velocidad de A ¿cómo va a ser?

300. A4: Tres veces la velocidad de B.

301. P: Tres veces la velocidad de B. O sea, el módulo de la velocidad va a ser tres metros sobre segundo. ¿Está bien? ¿Me dejan desviarme un poquito del tema? Supongamos que éste sale volando, supongamos que hay rozamiento, y el coeficiente de rozamiento es mu, ¿cuánto es la distancia del frenado de A y cuánto es la distancia de frenado de B? A ver… ¿Quién lo dice? Vamos a ver, la fuerza de rozamiento sobre quién va a ser mayor, ¿sobre A o sobre B?

302. A9: Sobre B.

303. P: ¿Por qué?

304. A9: Tiene más peso, más normal.

305. P: Claro, más normal, mu dinámica.

d frenado A = v^2 / 2 μDg = 9/10 = 0,9m μD=0,5

d frenado B = 1/ 10 = 0,1m

¿Está bien? Y éste va a tener menos también. Sin embargo, para frenar éste tiene menor velocidad inicial, más normal pero menos velocidad inicial. Éste tiene menos normal pero más velocidad inicial, ¿entonces cuál va a llegar más lejos?

306. A10: A.

307. P: ¿Por qué? ¿Cuánto va a ser la distancia de frenado? Bueno, saquen su carpeta, abran en energía, problema 8 creo que era. Demostrar que la distancia de frenado era dos veces V^2, no V^2 sobre dos veces el coeficiente de rozamiento. ¿Se acuerdan? Que al enunciado le faltaba el cuadrado, lo hicimos en clase. Así que pongamos para que sea fácil, pongamos el coeficiente de rozamiento igual a 0,5, y entonces veamos la distancia de frenado de A y la distancia de frenado de B. ¿La distancia de frenado de B cuánto va a ser? La velocidad de B ¿cuánto era? Uno. Uno al cuadrado sobre diez. O sea 10 cm. Y la distancia de frenado de A ¿cuánto va a ser? Fíjense va con la velocidad al cuadrado. O sea que acá, la distancia de frenado va a ser el triple. ¿Está bien? Si la velocidad es el triple, o sea la distancia de frenado va a ser nueve. O sea acá va un 0,9 metros. Entonces, típicamente, éste apenas se va un poquito para atrás y éste… Entonces ¡ojo! El hecho de que la cantidad de movimiento sea la misma, no tiene nada que ver con el hecho de que el movimiento subsiguiente sea el mismo. ¿Por qué? Porque el movimiento depende de la velocidad. Entonces nosotros de la cantidad de movimiento tenemos que sacar la velocidad, porque de la velocidad es de donde sale la cinemática, el movimiento. ¿Se entendió? Muy bien. Bueno, entonces, vamos a ver. ¿Alguna pregunta de esto? Bien. Esto era un pequeño desvío para vean que sí, que sin estudiar física igual sacamos que éste se va mucho más para atrás. A pesar de la conservación de la energía… Bueno a ver, imagínense que tenemos, otra vez, tenemos un río, un bote, una persona, desnuda, [risas] así se dejan de jorobar con la ropa, y el tipo tiene en el bote una silla de hierro, entonces el tipo dice: “bueno, agarro mi caña de pescar, cuelgo acá un imán, el imán atrae al hierro, y entonces el bote se pone en movimiento”.

308. A7: No.

309. P: ¿Por qué no?

310. A7: Porque la silla no… Al cuerpo.

311. P: Fantástico. Perfecta la explicación. Ven, nosotros empezamos toda esta discusión diciendo qué pasa cuando todos los pares de acción y reacción están contenidos en aquello que yo quiero estudiar. Justamente acá está lo que ustedes dicen, si el imán hace sobre la silla de hierro una fuerza hacia allá, por el principio de acción y reacción, la silla hace sobre el imán una fuerza hacia allá. Por lo tanto, a lo sumo lo que puede pasar es que, se estrole contra el piso, pero el bote ni se entera de lo que está pasando. En cambio, ¿qué pasa en este caso? Un paraguayo, con un sombrero de paja paraguayo, que lleva un cargamento de naranjas. Entonces digo, bueno para moverme agarro una naranja y la lanzo, ¿se mueve? ¿Logra algo el tipo?

312. A7: Tiene que tener muchas naranjas…

313. P: No. Es el río ideal. Como a ustedes ya les dije esto es física. [Risas]

314. A8: Se mueve pero muy poco.

315. P: Claro, pero ¿se mueve o no se mueve? Claro, se mueve, porque si la naranja lleva un cierto impulso, perdón, una cierta cantidad de movimiento hacia allá, lo que quedó, o sea esta otra parte tiene que llevar esta cantidad de movimiento hacia allá. Por lo tanto, se movió. Si se quiere mover más rápido ¿qué tiene que hacer?

316. A7: Tirar otra naranja

317. P: Tirar una naranja. Se va a mover al doble de la velocidad. ¿Tira otra? Se va a mover al triple. ¿De acuerdo? Ahora tenemos un problema. Los aviones por ejemplo. ¿Ustedes saben que hace muchos años existían unos aviones a hélice? ¿Sí? ¿Ustedes saben? ¿Eso dando vueltas puede hacer avanzar al avión?

318. A8: Sí.

319. P: ¿Por qué?

320. A10: …

321. P: Está bien. O sea, esto tiene que girar, chupa el aire de acá, lo tira para allá, de este lado lo mismo, entonces ¿qué hace? ¿Cómo es el balance de cantidad de movimiento? Primero ¿quiénes son los cuerpos que están interactuando?

322. A9: El aire y la hélice.

323. P: El aire y el avión. Por lo tanto, si el avión gana una cantidad de movimiento hacia allá, ¿qué tiene que haber pasado con el aire?

324. A9:

325. P: Claro. El aire, las partículas de aire, o sea el viento, tiene que haber ganado una cantidad de movimiento igual y contraria. Y gracias a eso, uno puede viajar por los aires.

326. A: Desplazarse.

327. P: Desplazarse. Pero ahora tenemos un problema. ¿Qué pasa si nos vamos fuera de la atmósfera? ¿Qué pasa si nos vamos con este avión fuera de la atmósfera?

328. A8:

329. P: Chau, se pudre. O sea que, si el principio del vuelo es, esta es una duda muy interesante, bueno, no sé a ustedes qué les parece, si el principio del vuelo es, que uno mediante un motor, una hélice, una turbina, lo que sea, logra empujarse con el aire, con la ayuda del aire, cómo hace uno para moverse afuera de la atmósfera. Los que ya vieron la película… [Risas] ¿Cómo hace uno?, porque acá no tienen como empujarse, no tienen a quien transferirle la cantidad de movimiento opuesto a la que uno quiere adquirir.

330. A8:

331. P: ¿Cómo?

332. A8: Ya tengo una velocidad inicial.

333. P: Ya tengo una velocidad, sí, tengo una velocidad.

334. A8: Me sigo moviendo.

335. P: Muy bien, bueno, tenes razón si ya tengo una velocidad, me sigo moviendo. Muy bien. Bueno, fantástico, además nosotros sabemos que las naves espaciales además son capaces de cambiar de dirección, no solamente de… Muy bien, ¿cómo dijiste?

336. A8: … las… que van tirando.

337. P: Exactamente, muy bien, es lo que dice él. ¿Qué dijo él? Que pierde masa, ¿de qué manera pierde masa?

338. A5: Queman la cola.

339. A2:

340. P: El combustible. Tienen el tanque de nafta acá, y ¿qué hacen con la nafta? ¿Qué podrían hacer con la nafta? Podría poner una pajita… ¿serviría esto? Sí, claro, servir, serviría, pero qué es lo interesante, ¿qué aporta de bueno la explosión?

341. A5:

342. P: Claro porque no es una cuestión de largar masa, es una cuestión de largar cantidad de movimiento. Entonces, si yo largo una cierta cantidad de masa casi sin velocidad, o con una velocidad así, o largo la misma cantidad de masa pero a altísima velocidad, ¿de cuál de las dos maneras estoy largando mayor cantidad de movimiento?

343. A4: De la que tiene más velocidad.

344. P: De la segunda claramente. Entonces, aunque parezca mentira, el principio de funcionamiento de los cohetes espaciales, es éste. Llevemos una carga de masa extra y vayamos tirando la masa extra así nos movemos para el lado que queremos. El principio es exactamente el mismo del que arrojar naranjas que por supuesto se va agotando, cuando se agotan las naranjas, se acabó. Lo cual es grave porque cuando uno quiere frenar… uno puede querer ponerse en movimiento y puede querer frenar.

345. A4:

346. P: Bueno, muy bien, se entendió, última pregunta. Puedo moverme si estoy en una pista de hielo, sin rozamiento, así como estoy yo, puedo moverme soplando, ¿así? ¿Sí o no?

347. A4: Sí.

348. P: Sí y ¿cuándo quiero tomar aire de nuevo cómo hago?

349. A5: Hacelo despacito.

350. P: [Risa] Hacelo despacito. Yo creo que tomaría aire así… [Risas] Extraordinario. No sé qué opinan ustedes, pero este principio de la conservación de la cantidad de movimiento, realmente abre las puertas para entender una cantidad impresionante, infinidades de fenómenos, desde la teoría del *barra brava* con el alfeñique, hasta las teorías de las naves espaciales, que están sometidos a este principio de conservación. Bien. ¿Se entendió? ¿Preguntas, dudas, comentarios? Muy bien. Para ver si entendimos, vamos a hacer un problema. Así ya se pueden poner a trabajar, miren que se nos viene el examen. Vamos a hacer el problema 3.5. Alguien que la pare [se refiere a una alumna que se “tentó” y no para de reírse]. Bueno a ver, una bala de fusil de 40 gramos, se mueve con velocidad inicial 300 metros sobre segundo. Choca contra un bloque de madera, que está en reposo, con masa de 2 kilogramos. El proyectil atraviesa el bloque y sale del mismo con una velocidad de 100 metros sobre segundo. O sea, se dirige hacia el bloque, choca con el bloque, lo empieza a atravesar, hasta que sale y cuando sale, lo que ocurre es que tiene una velocidad menor a la que tenía antes, o sea la velocidad que tiene ahora la voy a llamar velocidad final de la bala, y nos la da como dato, dicen que es de 100 metros sobre segundo. Y después me dicen: sabiendo que la fuerza de rozamiento… no existe fuerza de rozamiento. Yo les cambio el problema y les pregunto, ¿cuál es la velocidad del bloque después de ser atravesado por la bala? Bueno, soy todo oídos y tenemos 5 minutos.

351. A: [no se escucha la respuesta]

352. P: Bueno, escucho. ¿Con rozamiento o sin rozamiento? Bueno, con rozamiento. Total tenemos 3 minutos.

353. A: [no se escucha la respuesta]

354. A5: Depende de cuánto sea la masa de B, si es muy dura la masa...

355. P: ¿Depende de cuánto es la velocidad de la masa de B? No sé si es muy dura, lo que sé es que la bala la atravesó y después de salir de nuevo, o sea la bala pudo salir y tenía una velocidad de 100 metros sobre segundo, así que es bastante.

356. A5: Pero entonces vas a decir que la velocidad de B es igual a la masa de A por la velocidad de A, sobre masa de B.

$v_B = m_A / m_B \; v_A$

357. P: No.

358. A5: ¿Por qué?

359. P: Ah mira. Él dice que la velocidad de B es masa de A sobre masa de B por velocidad de B, ellos dicen esto, ¿está bien?

360. A6: Al revés. Velocidad de A.

361. P: Es como el pulóver y el gordo. ¿Está bien esto?

362. A5: No, hay una variación en la velocidad.

363. P: ¿Por qué? ¿Cuál es la variación?

364. A5: Que cuando entra al bloque se frena la velocidad.

365. A6: Y, ¿hay que hacerlo entonces antes de entrar al bloque y después de salir del bloque?

366. P: ¿Qué les parece, buena idea esa? ¿Hacemos antes de entrar al bloque y justo después de que salga? ¿Está bien? Justo antes y justo después, ¿qué les parece? Dale que nos van a echar. ¿Les parece buena esta idea?

$$P_0 = m_A \, v_{A0} + m_B \, v_{B0} = 0{,}04\text{kg } 300\text{m/s} + 2\text{kg}.\ 0 = 12 \text{ kgm/s}$$

$$P_f = m_A \, v_{Af} + m_B \, v_{Bf} = 0{,}04\text{kg } 100\text{m/s} + 2\text{kg}.\ v_{Bf} = 4 \text{ kgm/s} + 2\text{kg } v_{Bf}$$

367. A6: Sí.

368. P: Justo antes y justo después Bueno, bárbaro, pero ¿qué hacemos justo antes y justo después?

369. A7: El cálculo de la cantidad de movimiento.

370. P: La cantidad de movimiento. Perfecto, como todo esto ocurre siempre en una única dimensión que la llamo x, no le pongo flecha, no le pongo vector, estoy hablando siempre de la componente x. Todo esto ocurre en una dirección. Entonces vamos a ver ¿cantidad de movimiento del sistema inicial?

371. A7: Masa por velocidad 1. Velocidad uno es el instante antes de que choque.

372. P: Bueno, ¿tienen número 1 y 2 estas cosas? Entonces esto es, masa de A por velocidad inicial de A, más masa de B por velocidad inicial de B. ¿Cuánto vale la masa de A? 40 gramos, 0,04... La velocidad inicial de A, 300 metros sobre segundos, más la masa de B ¿que cuánto vale? Vale 2 kilos por la velocidad inicial del bloque, ¿que cuánto vale?

373. A:5 Cero.

374. P: Claro, estaba quieto el bloque antes de que la bala le impacte, ¿de acuerdo? O sea que acá va un cero. Por lo tanto ¿cuánto vale la cantidad de movimiento total del sistema antes de que la bala impacte sobre el bloque?

375. A5: 12.

376. P: Tres por cuatro, doce kilogramos metros sobre segundo. Muy bien. ¿Cuánto vale la cantidad de movimiento total, del sistema, acá, cuando la bala justo sale?

377. A5: Masa de A, por la velocidad de A final.

378. P: Masa de A, por la velocidad de A final.

379. A5: Más masa de B por velocidad final de B.

380. P: Más masa de B por velocidad final de B. Entonces esto lo sé, esto lo sé, 0,04 kilogramos. Fíjense que lo que me dicen es que la bala cuando impactó venía con 300 metros sobre segundo de velocidad, pero cuando salió, después de atravesar el bloque, su velocidad es de solamente 100 metros sobre segundos, o sea su velocidad bajó a la tercera parte. ¿Está bien? Y ahora tengo que sumar la masa de B, que es 2 kilogramos, por la velocidad de B final. Y ahora la cantidad de movimiento total inicial ¿cómo es comparada con la cantidad de movimiento total final?

381. A8: Igual.

382. P: ¿Está bien que sea igual?

383. A8: Contraria.

384. P: No, la total es igual, sumando la de los dos cuerpos tiene que dar lo mismo. ¿De acuerdo? Muy bien ¿cómo sabemos que va a ser igual la cantidad de movimiento del sistema antes y después? Acordémonos ¿qué tenía que pasar? Tenía que pasar que todas las fuerzas que participaran acá tuvieran su par de acción y reacción contenido adentro del sistema. ¿Pasa eso acá? Hagámonos una imagen mental de cómo es este proceso. La bala toca acá y empieza a meterse acá adentro. Aplica una fuerza sobre el bloque en ¿qué dirección y sentido? Claro, hacia allá. Por lo tanto, por el principio de acción y reacción aparece inmediatamente una fuerza sobre la bala hecha por el bloque sobre ella, que ¿qué dirección y sentido tiene? Claro, lo cual, esto forma el par de acción y reacción, son las únicas fuerzas que aparecen en x.

385. A5: ¿Y con el rozamiento?

386. P: ¡Ah! Lo habíamos hecho con rozamiento dijimos. Bueno esto no lo podemos decir ahora, lo vamos a retomar la próxima clase. La fuerza de rozamiento es mu por la normal. Esta fuerza no puede ser impulsiva. ¿Se acuerdan cuando hablamos en la hora anterior de las fuerzas impulsivas? Esta fuerza no puede ser impulsiva. Y si bien yo hice este dibujo así de largo para hacer el problema, pensemos una cosa, ¿cuánto tiempo tarda la bala en atravesar el bloque? Más o menos, a grosso modo.

387. A2: Depende del ancho del bloque.

388. P: Depende del ancho del bloque. Pongámosle un ancho al bloque. ¿Cuánto les parece razonable? ¿30 centímetros? ¿Está bien? Bueno, si entra a 300 metros sobre segundo ¿cuánto tarda en pasar 30 centímetros? … Así que es 0,3 metros, dividido la velocidad, o sea esto es 0,001 segundo. Ven, es un tiempo de morondanga, o sea lo que haga la fuerza de rozamiento durante un tiempo tan cortito, me lo puedo olvidar tranquilamente. Entonces necesitamos mirar la fuerza de rozamiento solamente de acá en adelante. De acá en adelante sí la fuerza de rozamiento juega un rol importante. Pero para lo que ocurrió durante el choque de la bala con el

bloque, podemos olvidarnos de la fuerza de rozamiento porque en un tiempo tan cortito no va a hacer prácticamente nada. ¿De acuerdo? Este concepto lo vamos a tomar la clase que viene, lo que me interesaba hacer de este problema es ver por qué no vale esto, porque a continuación de lo que hice antes, el impulso total daba cero, la cantidad de movimiento daba cero, entonces de acá venía este despeje. Pero ahora, la cantidad de movimiento inicial no es cero, ese número viene para acá. Bueno ¿se entendió? Les deseo suerte, que trabajen mucho este fin de semana largo, y que vengan llenos de dudas.

$$\underbrace{F\ roz = \mu\ N}_{\text{No puede ser impulsiva}}$$

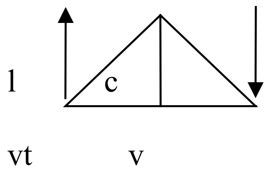
CASO 2. PROFESOR A

1. Tema de hoy: Relatividad Especial

Hay inconsistencia entre:
Propagación de la luz
Principio de relatividad
Teorías de Galileo.

Esto es ce cuadrado, ve cuadrado. ¿Está? El tiempo de ida, ¿qué podría tener?, de ida y vuelta. Horizontal, tendría que ser para la ida, ele dividido ce menos ve, y para la vuelta, ele dividido, c+w. Mientras que, para el rayo que viajó vertical, el tiempo, tendría que ser, bueno, fíjense, esto es, esto tiene que ser ve por te. ¿Está bien? Entonces, ve por te sería este cateto, ce por te, tendría que ser esto. ¿Está bien? Entonces ce por te, al cuadrado, menos ve por te al cuadrado, tiene que ser, ele al cuadrado. ¿Está? Ya está casi el tiempo. El tiempo de acá sale como, ele dividido, ce cuadrado menos ve cuadrado. Entonces el tiempo de viaje para el rayo que rebotó en el espejo que estaba vertical, hubiese sido 2 ele dividido la raíz de ce cuadrado menos ve cuadrado. O sea que los dos tiempos vendrían a ser distintos. En cambio, si la velocidad de la luz, es la misma en cualquier sistema y el éter no existe, entonces, estos dos tramos son la velocidad ce, estos dos tramos son la velocidad ce, y por lo tanto, no tiene que haber diferencia entre los tiempos de viaje de, de un rayo horizontal y otro vertical.

T viaje h = $l / (c-v) + l / (c+w)$
T viaje v = $2l / v\ c^2 - v^2$



$(ct)^2 - (vt^2) = l^2$

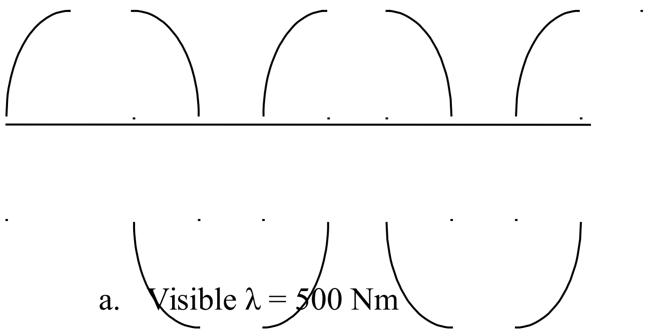
$t = l / \sqrt{(c^2 - v^2)}$

Dibujo 1

¿Está? Muy bien, entonces, como ven, es un experimento muy, muy fácil de entender. Digamos que es muy fácil de entender que, este, es bastante evidente digamos, que tiene que haber una diferencia aquí. Entonces ¿por qué fue tan famoso y porqué es tan difícil?

2. A1: Es muy difícil medir el tiempo y esas cosas.

3. P: ¡Claro! Porque la velocidad de la luz es, vale 300.000 km/seg!! O sea, los errores relativos, los errores relativos entre estos dos tiempos, son los que provengan de considerar el hecho de que esta velocidad es de 300.000 km/seg, mientras que la velocidad con la que se mueve el planeta respecto de ella, será a lo sumo unos pocos miles de km por hora, qué se yo. ¿Está bien? O sea, muy, muy, muy lejano.
El secreto, el secreto para poder llevar a cabo este experimento, es el hecho de que la luz y cualquier onda electromagnética, ¿no?, se puede pensar como una sucesión de ondas, como si fueran oscilaciones que tienen una longitud característica. Una longitud característica que es, ¡¡pequeñíiiiisima!! O sea una longitud característica del visible, por ejemplo, la longitud de onda que es, lo que dura digamos una oscilación de éstas, o sea la distancia facial que dura una oscilación de éstas, que es la longitud de onda, está ¿en qué valores?, más o menos. Ustedes saben ¿no es



a. Visible $\lambda = 500$ Nm

cierto? que los colores tienen que ver con las longitudes de onda. ¿En qué valor está más o menos la longitud de onda esta?

4. A2: Nanómetros, qué sé yo.

5. P: Nanómetros, muy bien. Quinientos nanómetros. ¿Está bien? Quinientos nanómetros es, digamos, la mitad de un micrón. O sea, es extremadamente chico. Entonces lo interesante es que, volviendo a contar los dos rayos, uno puede analizar si dos ondas, o sea, si no me interesa el tiempo, dos ondas quedarían exactamente juntas. Y entonces uno ve ciertas cosas si fuera en una pantalla. En cambio si el tiempo de espera está diferente, ¿sí? vienen corrida una respecto de la otra. Se dice que se desfasan. ¿De acuerdo? Durante el siglo XIX, éste era un fenómeno conocido (…), o sea que se sabía perfectamente cómo observar si ocurrían este tipo de cosas o no. Entonces estaban en condiciones de detectar diferencias de longitud del orden de los quinientos nanómetros, o sea del orden del micrón, aún cuando usasen brazos, digamos, obviamente, para que el efecto sea más grande uno tiene que poder usar brazos lo más grandes posible, ¿está bien? compatible con que el experimento sea realizable, ¿no? Entonces el tamaño de estos brazos era del orden de diez metros. Entonces tenían un sistema que les permitía distinguir variaciones, o sea diferencias, en el recorrido de los rayos que fueran del orden de quinientos nanómetros, cuando los rayos de luz habían viajado decenas de metros. Es espectacular. O sea la precisión lograda en estos experimentos. Ustedes están haciendo laboratorio uno, ¿no es cierto? O sea, ya tienen bastante experiencia de lo que son los errores de medición y cómo la física es toda una patraña.

6. A3: ¿Y los que no lo hicimos?

7. P: ¿O no?

8. A3: Ya nos dijiste que es una patraña, así que…

9. P: ¿O no tienen esa sensación en los laboratorios? ¡Perfecto! ¡Bien! Entonces únicamente el que ya hizo Laboratorio I puede entender lo que yo digo. Este nivel de precisión de un experimento es una joya apreciada. Es una cosa de locos. Y por supuesto, bueno, se repite la historia en que esperaban entonces, lo que esperaban con estos experimentos, era, mediante esta comparación de tiempos, sacar la velocidad de la Tierra respecto de ellas. Desde luego que, nadie esperaba no observar nada. Y resultó que no se observaba, nada. O sea, la diferencia de tiempo entre este rayo de luz que hace este camino y este rayo de luz que hace este camino, era, cero. Cero. Cero. Entonces, bueno, uno dice está bien, esto ocurrió en 1910 más o menos, o sea al principio, bien al principio del siglo XX, este…, o fines del XIX.

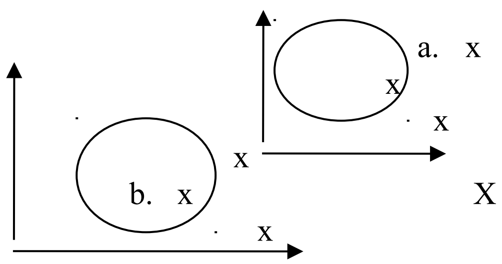
10. A4: Mil ocho setenta y pico, debe ser.

11. P: Sí, puede ser. Este, y la precisión uno cree que puede ser un diez por ciento, o un uno por ciento, ponele, la precisión que lograban. Bueno, ahora que transcurrió el siglo XX y que la tecnología avanzó muchísimo, este experimento se siguió repitiendo. ¿Está bien? O sea, cada tanto, salió todo a lo largo del siglo XX, por lo menos hasta los sesenta, y cada vez que hay un avance tecnológico, alguien se toma el trabajo de agarrar este experimento y hacerlo de nuevo. Porque todavía no lo podemos creer. Y a medida que se va refinando la precisión del resultado, se confirma con más cifras significativas, que la velocidad de la luz es la misma en las dos direcciones y no hay vuelta que darle.

12. A4: Creo que Michelson y Morley (Marison?) podían medir la velocidad del éter, de la tierra significativamente del orden de los 10 metros por segundo. Muy chica es.

13. P: Claro, muy chica, muy chica. Por eso no fue un error de medición comparado, que hay que compararlo con los 300.000 km/seg de la luz. O sea, es un grado de precisión alucinante. Además la tierra se mueve mucho más rápido que 10 metros por segundo, respecto de cualquier cosa que tuviera sentido, donde tuviera sentido que ese algo estuviera fijo. Que sería, no sé, el centro del sistema solar. El centro de la galaxia, qué se yo. No sé, el centro del Universo, qué se yo. La velocidad de la Tierra respecto de cualquiera es mucho más grande que esto. Bueno, muy bien. No era mi intención contarles este experimento, pero es importante, este, dejar bien, bien en claro que, realmente, la alternativa última, digamos, la de convencerse, de que la forma en que se propaga la luz está bien, sale de la teoría del electromagnetismo, está bien y es como es, y es en el vacío. Entonces, entran en el conflicto, entran en el conflicto, o sea, aceptado esto, entran en conflicto, el principio de relatividad y las leyes de Galileo, como mencionamos la clase pasada. Entonces, lo que dijo Einstein fue, bueno, el principio de relatividad es algo conceptualmente que me da más jerarquía que las transformaciones de Galileo. A pesar de que parece lo contrario. ¿No? Que es un problema con función más complicada, más extraña, el principio de relatividad. Sin embargo, a éste hay que darle preferencia. ¿Cómo es que lo llamamos la clase pasada? Vamos a ver, la idea era que, todo proceso físico es el producto de interacciones o sea de la influencia mutua de otros sistemas sobre uno que uno está estudiando y que por lo tanto lo que tiene que importar son las posiciones relativas, ¿no?, distancias relativas, tiempos relativos, o sea todo lo relativo de unos respecto de los otros.
    Entonces, el principio de la relatividad, pone eso como cosa más importante, y entonces dice que en todo sistema, en todo sistema, en movimiento de rotación uniforme, el resultado de cualquier proceso físico, es idéntico al obtenido en el sistema original bajo las mismas condiciones.
    Es interesante esta manera de expresar el principio de relatividad porque pone énfasis en lo siguiente: yo tengo un sistema de referencia, por ejemplo la estación de tren, como dijimos el otro día, tengo otro sistema de referencia que es el tren que se está moviendo con velocidad q, entonces lo que dice es que si yo monto un experimento en este sistema, bajo ciertas condiciones, y observo cómo se desarrolla el proceso físico, voy a observar exactamente lo mismo que si monto exactamente la misma experiencia en el sistema de la estación, con las mismas condiciones iniciales pero respecto del sistema de la estación y observo lo que ocurre

EN TODO SISTEMA EN (MOVIMIENTO CONSTANTE) TRASLACIÓN UNIFORME, EL RESULTADO DE CUALQUIER PROCESO FÍSICO ES IDÉNTICO AL OBTENIDO EN EL SISTEMA ORIGINAL BAJO LAS MISMAS CONDICIONES.



en la estación.
¿Entienden? Entonces, el principio de relatividad no me dice nada de cómo se conecta lo que se está haciendo en el tren, visto desde la estación. O lo que se está haciendo en la estación, lo que se está haciendo en la estación, visto desde el tren. ¿De acuerdo? Entonces queda la idea del principio de relatividad, queda expresada exactamente como la escribí, en el sentido de que expresa nuestra concepción de que la influencia que otro sistema hace sobre aquél que uno está estudiando, se debe a posiciones relativas, o sea a situaciones relativas respecto de un sistema respecto del otro y no a su ubicación absoluta en algún sistema. Y por un lado, si todo se traslada uniformemente, las posiciones relativas entre las partes, ¿sí? en algún sistema son las mismas y entonces tiene que observarse idéntico resultado. Bueno, muy bien, pero entonces, es consistente con que estén bien las leyes de la propagación de la luz y con que se sostenga, perdón, que se sostenga el principio de relatividad, sin que sea obligatorio que la forma de vincular lo que pasa entre un sistema y otro sistema, esté descrito mediante las transformaciones de Galileo. ¿De acuerdo? Entonces, esa es la pregunta que sigue. Acuérdense, entonces, estos dos, son los postulados básicos de la teoría de la relatividad especial. Donde, estrictamente hablando, si nos ponemos en jorobados, ¿no?, donde dice cualquier proceso físico, debería decir, cualquier proceso electromagnético. O sea donde esté involucrada la fuerza electromagnética. Podría no pasar para otra fuerza. ¿No? Entonces, al poner acá cualquier proceso físico, (…). ¿Está bien? Muy bien, por supuesto, hoy en día ponemos acá cualquier proceso físico y no electromagnético porque son cien años de teoría de relatividad y realmente, por lo menos todo lo que hay, de todo lo que sabemos cosas, lo hacemos coherente con la relatividad especial. Pero entonces, tenemos que aceptar que las trasformaciones de Galileo no son las correctas para describir una realidad en la cual nuestros dos postulados se aplican, por la sencilla razón que discutíamos la clase pasada, de que las trasformaciones de Galileo llevan a la adición de velocidades tradicional, que por lo tanto es incompatible con el hecho de que la velocidad de la luz sea la misma en cualquier sistema. Entonces, bueno, ese es el tema que vamos a discutir hoy. [Borra el pizarrón]
Si miramos las ecuaciones de Galileo, entonces tenemos que cuestionarnos acerca de cómo son las relaciones entre espacio y tiempo en relatividad. Por lo menos a mí, a mí siempre me gustó pensar ¿qué hacíamos mal antes? ¿Qué hacíamos mal antes? Como para estar tan convencidos de que todo funcionaba bien y resulta que todo funcionaba mal. Entonces, repasemos un poquito lo que hacíamos antes. O sea, ¿cómo armábamos un sistema de referencia?

CÓMO SON LAS RELACIONES ENTRE ESPACIO Y TIEMPO EN RELATIVIDAD.

SISTEMA DE REFERENCIA

14. A2: Con un origen.

15. A5: Como queríamos (en voz baja)

16. P: Con un origen, bien. ¿Qué más?

17. A2: Un sentido de, sentidos.

18. P: Sentidos. Muy bien. Buen, ya está, ¿no? Vamos a poner acá una escala de longitud, una escala de longitud, bueno, listo, entonces, eso es lo que podríamos así, brevemente describirlo como, hacemos un mapa, ¿no? hacemos una manera de identificar los puntos del espacio.

-ORIGEN + SENTIDO + ESCALA DE LONGITUD → IDENTIFICAMOS LOS PUNTOS DEL ESPACIO

a. →

Inventamos una manera de identificar los puntos del espacio. Entonces, con esto identificamos los puntos del espacio. Muy bien. Bárbaro. Con esto entonces, le podemos asignar a cada cosa que ocurra, el nombre del lugar donde ocurre. ¿No? ¿Está bien? O sea llamamos erre, en base a esto, cada lugar del espacio va a tener un número asociado, de manera biunívoca. ¿Sí? Entonces con esto identificamos el lugar del espacio donde ocurrió algo. Donde ocurre (…). Bárbaro, muy bien, ¿qué más? ¿Cómo hacemos con el tiempo?	b. r -Tiempo? Origen + Escala ↔ Reloj

19. A2: También, un origen.

20. P: Un origen.

21. A5: Y un sentido.

22. P: Bueno, el sentido está dado. ¿Está bien? Le damos el sentido en que crecemos nosotros, le damos un sentido positivo, el sentido en que crecemos, en realidad es negativo.

23. A5: Claro.

24. P: Entonces ponemos un sentido, muy bien, y ¿qué más?

25. A2: Una escala.

26. P: Una escala ¿y quién pone la escala?

27. A2: La relación.

28. P: ¿Qué necesitamos?

29. As: (dicen varias cosas al mismo tiempo entre las cuales): un reloj.

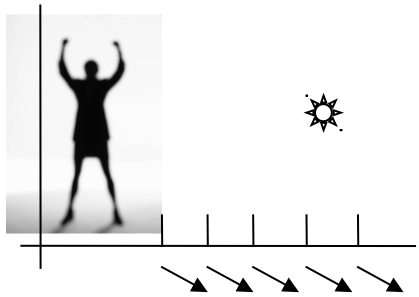
30. P: Y bueno, la escala la pone un reloj. ¿Qué es un reloj? Algún sistema especial que hace algo repetitivo, que nos permite contar. Fantástico, muy bien. Bueno, bárbaro.

Cuando usamos la palabra observar, un hecho, ¿no?, algo que pasa, algo que pasa, lo vamos a llamar un hecho o un evento o un suceso.	"OBSERVAR" ALGO QUE PASA, UN HECHO, UN "EVENTO", UN SUCESO i. "t"

Que sé yo. Según la traducción del libro que tengan va a decir una cosa o va a decir la otra. ¿Está bien? Lo interesante de esto es que se pone énfasis en el concepto éste de hecho o de evento queriendo referirse a algo que ocurre en algún lugar y en algún instante. ¿Está bien? O sea no hay algo que tenga asociado una trayectoria, ¿sí?, una cosa que viene de antes, yo qué sé, sino casi un destello, ¿sí? Que sé yo, por ejemplo, no sé, que explote una granada. Eso ocurre, en un lugar y en un instante de tiempo. ¿Está bien? Nosotros, de lo que se trata la física es de describir hechos así y asignarles nombres a los lugares y a los instantes de tiempo en los que ocurren. ¿Está bien? Eso es lo que queremos hacer y para eso nos construimos un sistema de referencia. Muy bien. ¿Cómo le asignamos el valor del tiempo?

31. A5: Miramos cuánto tiempo pasó desde que apretamos el cronómetro hasta que observamos el evento.

32. P: ¿Hasta que qué? Claro, estoy acá, vos decís que estoy acá. Estoy acá con el cronómetro, en el origen, mido la diferencia. Acá ocurre algo y cómo determino en qué instante ocurrió. ¿Cómo le doy el valor de t a esto que ocurrió?



33. As: (hablan varios juntos, entre otras cosas un alumno dice): un tiempo determinado...

34. P: El lugar lo puedo determinar porque explota algo y hace un agujero que queda. Pero el instante de tiempo, ¿cómo lo asigno?

35. A1: Lo tenés que asociar con lo que vos tomaste como longitud, digamos como mapa, o sea el tiempo como mapa.

36. A6: Con el origen de referencia.

37. A1: Y vos tenés un origen de tiempo y con respecto a eso medís el tiempo, cuántas veces contó el reloj.

38. A2: Calculás.

39. P: Lo que pasa es que ¿el reloj dónde está? Esa es la pregunta.

40. A3: Y si tenés vos el reloj, tenés que hacer la cuenta, o sea fijarte.

41. P: No quiero tener yo el reloj, o sea quiero hacerlo lo más sencillo posible, que me permita sacar un número, la cosa que me dé, diga de manera muy precisa de qué estamos hablando, cuando le damos un valor de tiempo a un hecho.

42. A: [No se escucha]

43. P: Sumergibles, anti-granadas, es un poco caro. [Risas] Entonces, la mejor idea es, agarramos, por supuesto esto no es mañana, desde luego, pero la idea es que en cada lugar, el sistema de referencias tenga un reloj. ¿Está bien? ¿De acuerdo? Entonces, en cualquier lugar que pase algo, se puede registrar inmediatamente, lo que marca el reloj de ese lugar. ¿Está bien? Muy bien. Entonces cuando hablamos de observar, no estamos suponiendo ningún mecanismo por el cual la información de que acá pasó algo, tenga que ir de un lado a otro. ¿Está bien? Tenga que venir acá y yo mire el reloj, y entonces haya una teoría de cómo es la información que viaja de acá a acá. ¿De acuerdo? Yo miro el reloj en todos lados, yo registro el instante de tiempo en el preciso lugar en el que ocurre algo. Y entonces el valor del tiempo está bien definido, sin necesidad de haber seguido ningún proceso de cálculo ni ninguna cosa indirecta que me pueda despertar sospecha. ¿Estamos? Muy bien.

Entonces, observar, observar quiere decir, registrar el lugar erre asignado de acuerdo al sistema de referencia y el valor de t ¿está bien? de un reloj, si quieren lo agregamos, o

OBSERVAR:

i. REGISTRAR EL “ $\vec{r}$ ” Y EL “t” (DE UN RELOJ sea de un reloj, en el lugar de erre, en el lugar erre.

ii. EN EL LUGAR $\vec{r}$) “EVENTO” ↔ $\vec{r}$, t

¿Está? Entonces, bueno, con eso en realidad, analizamos el concepto de evento. O sea, un evento está caracterizado por el lugar del espacio en el que ocurre, que se define por el sistema de referencia, y el instante de tiempo en el que ocurre, de acuerdo con el sistema de referencia. ¿Sí? Muy bien. Ahora la pregunta es: ¿cuál es el mecanismo que usamos, para saber que todos estos relojes marcan la misma hora? Porque sería terrible tener relojes repartidos en todo mi mapa y que los relojes, cada uno marque cualquier cosa. ¿Está bien? Entonces para poder (…) el sistema del cual yo voy a darle una designación matemática, digamos, a los eventos, a las cosas que pueden pasar, tengo que avisar al sistema de referencia a todos los relojes que marquen la misma hora. ¿Cómo se hace eso? ¿Cómo hace uno para saber que el reloj de Retiro y el reloj de la estación de Tigre marcan la misma hora?

44. A5: Una convención.

45. A4: Los sincronizas al principio.

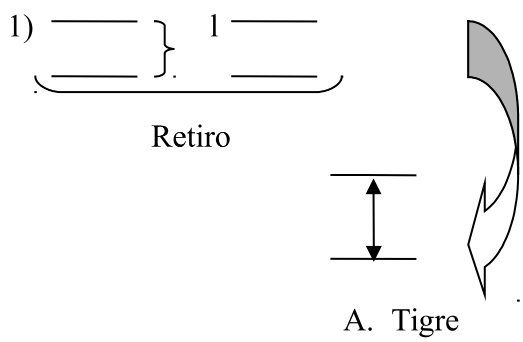
46. P: Los sincronizas al principio, ¿y?

47. A4: Si son iguales los relojes, (hablan todos al mismo tiempo y no se entiende).

48. P: Acá hay una idea muy interesante.

49. A3: Llamas al 113.

50. P: Llamamos al 113. Claro. Entonces, una idea es, tengo los dos relojes, que como sabemos pueden ser de cualquier cosa y en particular, pueden ser relojes de luz que vienen y van, total el principio de relatividad nos garantiza que en cualquier otro lugar funcionan igual. Y él dice bueno, agarramos dos relojes, pongo que marcan una hora, y éste lo vamos a poner en Retiro y después me llevo el otro a Tigre. ¿Está bien esto? ¿Está bien? Después me llevo el otro a Tigre y entonces sé que marcan lo mismo.



51. A1: Depende a qué velocidad.

52. P: ¿Está bien esto? Claro, ¿está bien esto?

53. A6: No.

54. P: No, está mal. En cuanto movemos el reloj, sonamos. Empieza a marcar otra cosa. Por lo que vimos la clase pasada.

55. As [Dicen cosas al mismo tiempo lo que impide entender] No uses un reloj de luz.

56. P: Si yo uso un reloj de arena, cae un granito, cada vez que éste va ida y vuelta. Bueno, cuando se muevan, el principio de relatividad, me garantiza que, en este sistema móvil, también, éste hace una oscilación de ida y vuelta cada vez que cae un granito.
    Entonces, si en éste tarda más tiempo en hacer una oscilación, en este reloj también tarda más tiempo en caer un granito. O sea, ¿entendés?

    2)

    - sea, salvo que encontremos algún fenómeno que viole el principio de la relatividad, todos los fenómenos físicos que sean consistentes con el principio de relatividad, vas a poder construir relojes que son, que marcan exactamente lo mismo que el reloj de luz. ¿De acuerdo? Así que esto no es un... Bueno, la otra idea era llamar al 113. Vamos a ver. ¿Se acuerdan la clase pasada cómo habíamos dicho?

57. A: [No se escucha lo que dice].

58. P: Muy bien, estamos comunicados y entonces en Retiro o en Tigre los sincronizo. Bueno, listo, ¿cómo los sincronizo?

59. (Varios alumnos hablan al mismo tiempo)

60. A2: De alguna forma que implica transmisión de información y que va a llevar tiempo, entonces.

61. P: No es física mala o buena, mejor o peor, desde lo que vemos. Nunca nadie hizo tanto despelote para hablar de la hora.

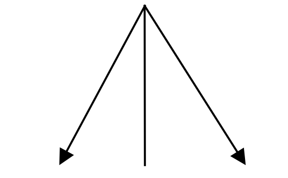
62. [Varios alumnos hablan al mismo tiempo]

63. A5: ¿Para qué queremos tanta precisión?

64. P: Aquí sale algo interesante: ¿para qué queremos tanta precisión? Tiene razón, ¿para qué queremos tanta precisión?

65. A5: O sea son especulaciones que uno hace para la teoría, pero para la vida, no hace falta, nadie se hace problema por ir de Retiro a Tigre.

66. P: ¿Están de acuerdo con eso? Claro. Claro. ¿Se acuerdan de lo que hicimos la clase pasada? El reloj que se mueve, funciona así donde, de nuevo, ¿no? el tiempo que tarda en hacer una ida y una vuelta, el reloj que se mueve con velocidad t, lo podemos determinar de manera totalmente análoga a cuando hicimos el análisis del brazo vertical del experimento de Michelson y Morley, ¿Está bien? Así que el tiempo de un tic tac, el tiempo de un tic tac en un sistema móvil, o sea tau prima, en el sistema móvil, él lo ve así. Al estar en el sistema móvil, él lo ve así. Estando en un sistema móvil lo ve así al reloj. Así que un tic tac es, si esto es una longitud ele, esto es 2 ele sobre ce. Pero el tiempo respecto del sistema fijo, o sea de nuestro

    A. $\rightarrow$ v

    $T' = 2l / c$

    $T = 2l / \sqrt{(c^2 - v^2)} =$

    $= 2l / c \sqrt{(1 - v^2 / c^2)}$

sistema, o sea el sistema del laboratorio, donde estamos trabajando, es el tiempo que tarda en hacer este recorrido la luz, o sea que es 2 ele sobre ce, bueno, por la raíz de ce cuadrado menos ve cuadrado, o sea por lo que contamos antes del experimento de Michelson y Morley, ¿no? de la luz que tenía que hacer este trayecto.

67. A6: Y eso tiende a cero con toda la furia.

68. P: Y esto es 2 ele sobre c por la raíz de uno menos ve cuadrado sobre ce cuadrado. ¿Está bien? Entonces, este es el tiempo que pasa en nuestro sistema entre, para un tic tac dentro del marco en que nos estamos moviendo. ¿Está? ¿Está bien? Entonces, el error del tiempo, o sea si yo uso este reloj, y el reloj de Tigre, lo pongo a la misma hora que me marca este reloj cuando llego, el error que va a haber en lo que marca el tiempo es, tiene que ver, digamos, con la diferencia entre estas dos cosas para... ¿Está bien? Así que el error va a estar dado por la diferencia entre tau y tau prima. ¿Está bien?

Es más, digamos, se define el error relativo, dividiendo por tau prima, y esto es entonces, 2 ele sobre ce, podíamos poner tau prima adelante, es lo mismo. Así que esto va a ser 2 ele sobre ce dividido 2 ele sobre ce, o sea uno, por supuesto, menos esto dividido 2 ele sobre ce que es uno sobre la raíz de uno menos ve cuadrado sobre ce cuadrado.

Error ~ $(T' - T) / T' = 1 - 1 / \sqrt{(1 - v^2/c^2)}$

Y pasa algo muy interesante. Entonces, el reloj que yo quiero usar para poner en hora el reloj que está en Tigre, ¿está bien? se desacomoda, en una cantidad que tiene que ver con la velocidad con la cual uno se mueve. O sea, como decía Einstein. Si lo muevo muy despacito, total la velocidad de la luz es de 300.000 km/seg, con que lo mueva a 3.000 km/seg, como esto es al cuadrado, el error va a ser más chico que uno en diez mil.

69. A4: A 60 km/h va el tren como mucho.

70. P: El tren va a 60 km/h o sea que en km por segundo, ¿cuánto es?

71. A4: Poco.

72. P: Algo es. Quince metros por segundo, ¿no? quince metros por segundo que son cero coma cero quince km/seg. ¿De acuerdo? Con lo cual entonces, podemos poner los relojes. O sea la manera en que nosotros armamos nuestros sistemas de referencia, o sea, una manera concreta de armarnos un sistema de referencia es agarrar un reloj, llevarlo por todas las estaciones, y comparar el reloj que está en la estación con uno de la misma hora del reloj que nosotros llevamos, y podemos hacer esto con distintas velocidades. ¿De acuerdo? Y después, y después, tomamos el límite para la velocidad con la que se mueve el reloj tendiendo a cero. ¿Les gustó? [SILENCIO]

Entonces, bueno, para evitar, para que no haya ningún error, tomamos límite para v tendiendo a cero de la hora del reloj móvil.

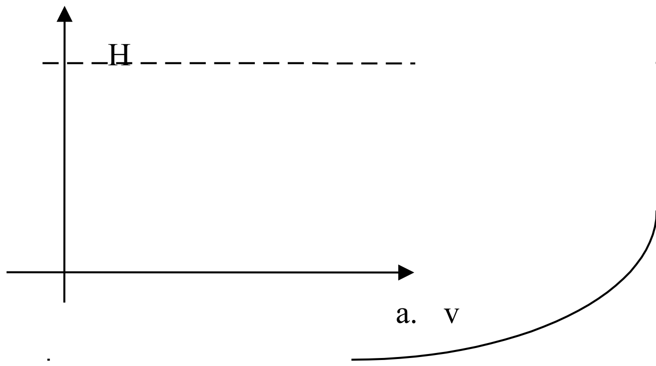
TOMAMOS lim (hora reloj móvil)
i. $v \to 0$

73. A5: ¡Pero no vas a llegar nunca!

74. P: Esta es la típica, esta es la típica situación en la cual la función no existe para un cierto punto pero el límite sí. Es igual que la velocidad instantánea. Ya lo discutimos veinte veces, ¿no? O sea lo remplazan por la velocidad instantánea, es una estupidez, no tiene sentido, o sea, uno no

puede comparar cómo se avanza en un instante, nunca, por lo tanto, no puede comprobar la velocidad instantánea, mirando lo que pasa solamente en el instante. Chau.

La función, parece, para este te igual cero no está definida, no existe. Sin embargo, sí existe el límite de la función tomando delta t distinto de cero y después lo hago tender a cero. ¿Está bien? Eso es lo que los matemáticos llaman una función que en un punto no está definida, pero que, usando los puntos al costado, tiende a un valor. Y entonces inventan el concepto ése de singularidad evitable. ¿Está bien? Entonces una singularidad es un agujerito en un punto que casi no se ve. Podemos extender la función. Y acá lo mismo, ¿está bien?, acá lo mismo, o sea yo puedo agarrar y decir, en función de v, vamos a escribir ve cuadrado ve tilde, ¿no? y puedo hacer en función de t, en función de la velocidad con la que vino el otro reloj, la hora que marca.



¿Está bien? Entonces, si vine muy rápido va a tener un valor, para velocidades normales va a tener otro valor, para velocidades muy grandes va a tener otro valor, para velocidades (un silbido), para velocidades muy chiquitas, (otro silbido), va a tender, va a tender, ¿a cuánto? Los que igualan cero, son igual a cero, no importa. Ya sé que hay un detalle porque acá hay un v cuadrado.

75. A6: El error va a ser cuadrático.

76. P: ¿Se entiende? Entonces yo, obvio, con velocidad cero, no lo puedo hacer, pero lo puedo hacer con cualquier velocidad tan cercana a cero como yo quiera. Puedo hacer integral, puedo poner límite. ¿Está? Muy bien, ¿por qué me tiene que dar esta función? Me tiene que dar esta función porque así es como nosotros ponemos la hora en los relojes. Como decía Einstein, nos movemos a 60 km/h, en un avión nos movemos a 1.000 km/h. ¡Oh! ¡Qué miedo! (todos se ríen). ¿Está bien? Entonces, claro, ni nos preguntamos, cómo fijamos la hora, cómo determinamos las constantes del tiempo, no nos preguntamos. Porque no hay ninguna necesidad. ¿De acuerdo? Sin embargo, es interesante tomar conciencia, justamente ahora que nos dimos cuenta que tenemos que sospechar porque cuando un reloj se mueve, le pasan cosas raras, ¿está bien? Está bueno que pongamos negro sobre blanco y cuando decidamos ponerle tiempo a las cosas que ocurren, implícitamente está pensado un procedimiento de este tipo. ¿De acuerdo? ¿De acuerdo? Muy bien. Entonces, el tema es que esta observación antes no era importante, ahora se vuelve importante. Bien. Fantástico.

El siguiente, el siguiente y bien importante es que, para un sistema de referencia, armado así, o sea, así quiere decir como lo hicimos, como lo hicimos hasta ahora, es que encontramos el resultado del valor de la velocidad de la luz. Fíjense, es importante aclarar esto. Porque justamente, medir una velocidad es comparar las dos posiciones y comparar los instantes de tiempo.

PARA UN SISTEMA DE REFERENCIA ARMADO ASÍ ES QUE SE ENCONTRÓ EL VALOR DE c Y EL RESULTADO DE SER, EN VACÍO, INDEPENDIENTE DEL MOVIMIENTO DE LA FUENTE

i. “$C = \Delta x / \Delta t$ “

¿Está bien? Entonces es importante que sepamos de qué estamos hablando cuando le damos valores numéricos a esas posiciones y esos instantes de tiempo. Sobre todo ahora que tenemos que empezar a sospechar de que los relojes se me descalabran cuando se ponen en movimiento. ¿De acuerdo? Entonces vamos a hacer la referencia, armando así, es que se encontró el valor de c, y el resultado de que es constante en el vacío independientemente de la fuente. ¿No? En vacío, independiente del movimiento de la fuente. Bueno, muy bien, obviamente, este c salió de analizar el delta equis sobre delta t, en base a algún experimento con relojes en un lugar y en otro, en el mismo lugar midiendo lo que la luz tarda en venir…

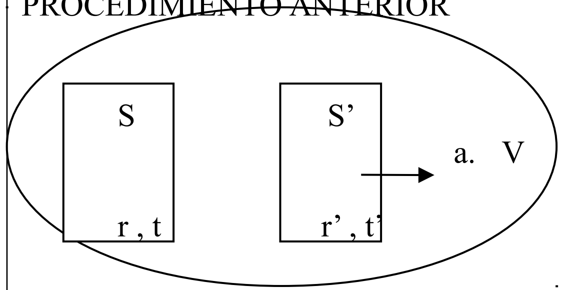
77. [Los alumnos hacen comentarios que no se escuchan]

78. P: Van a tener una idea del estudio que se van a poder bajar de la página del departamento, ¿está bien? en el cual están contados y dejados un poco en suspenso para que ustedes analicen también, dos experimentos posibles para medir la velocidad de la luz. Uno de ellos es el experimento de Fizeau, que es terrestre, digamos, el tipo agarró, se paró, dijo bueno, a ver donde hay una montaña, se encontró una montaña a 8 kilómetros y medio de su casa, de su laboratorio, o de la otra ventana, qué se yo, no sé, y dijo bueno, aunque la luz vaya muy rápido, en 9 kilómetros, yo la voy a poder medir. Y se diseñó el experimento que permite medir la velocidad de la luz sobre una distancia de 9 kilómetros. Es una maravilla. El ingenio de ese tipo es una maravilla, no me van a decir. ¿De acuerdo? La cuestión es que entonces, alguien hizo una cuenta de este tipo para llegar al valor de la velocidad de la luz y sacar la conclusión de que es una gran constante. Bueno, muy bien. Entonces hasta acá, o sea, lo único que hicimos fue repasar el criterio con el cual establecemos una escala de tiempo cuando queremos hablar de la hora en la que ocurren las cosas. ¿No? ¿A qué hora salió? ¿A qué hora llegó? Para medir velocidades, ese tipo de cosas. Muy bien. Hecho esto, ¿qué nos impide seguir con nuestra vida como fue siempre?

79. As: Nada.

80. P: Nada, ¿está bien? Nada. O sea, en nuestro sistema de referencia que observamos nuestra vida puede seguir lo más bien como siempre. ¿O no tanto? La pregunta entonces ahora es: para saber si la forma en que veo, evidentemente no sirve (…) sabemos que para la luz no puede ser esa, ¿qué pasa si otra persona arma su propio sistema de referencia siguiendo exactamente la misma receta y se arma un sistema que se mueve con velocidad uniforme respecto del que nos armamos nosotros? ¿Está bien?

SE PUEDE ARMAR UN SISTEMA DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO (CON V UNIFORME) SIGUIENDO EL MISMO ~~PROCEDIMIENTO ANTERIOR~~



Entonces esa es la pregunta. Entonces, en base al principio de relatividad, sabemos que una persona que arme su sistema de referencia siguiendo un procedimiento idéntico al nuestro, va a obtener un sistema de referencia que es equivalente, en el sentido que él respecto de su sistema y nosotros respecto de nuestro sistema, vamos a describir todo lo que ocurre, exactamente igual. Después vamos a comparar. ¿Está? Y ahora queremos ver, lo que queremos tratar de hacer es ver cómo se conecta uno con el otro. Entonces, el principio de relatividad se puede, o sea en base al principio de relatividad se puede armar un sistema de referencia en movimiento con velocidad uniforme, ¿no? siguiendo los mismos procedimientos que antes. ¿De acuerdo? Entonces ponemos, el sistema S original, en el cual dijimos cómo identificábamos los puntos del espacio y los instantes del tiempo. Y ahora, alguien se armó un sistema que llamamos S prima, donde el procedimiento para identificar a los lugares del espacio y a los instantes del tiempo, que llamamos r prima y t prima, por las dudas, como ahora dudo de todo, cuando cambio de sistema le pongo prima a todo y aprovecho lo que tenemos. Que tiene la característica de que está armado sobre un sistema que se mueve con velocidad v, como un todo, ¿no? obviamente, respecto del... Y yo quiero establecer las relaciones entre estos dos sistemas que reemplazan a las transformaciones de Galileo. Bueno, muy bien. Para esto, antes de meternos de cabeza en eso, vamos a un pequeño preliminar. [PRELIMINAR]

Vamos a discutir una analogía que quizá, bueno, quizá, que se yo, por ahí los ayuda digamos, a que les entre en la cabeza el tipo de cosa que vamos a hacer en física. ¿Está bien? ¿Está? Una analogía. La verdad que no me podía decidir. Bueno. A ver. A ver si, si, si me creen. Cuando nosotros enfatizamos el concepto de evento, como les decía antes, estamos refiriéndonos a algo que implica un único valor de r y un único valor de t.	VAMOS A DISCUTIR UNA ANALOGÍA (O NO TANTO) ii. $\vec{r}$ "EVENTO" r , t iii. Ev 1 •

- sea lo que sería un punto en el cosmos. ¿Está bien? Un punto en todo sentido, en el sentido espacial y temporal. Entonces por ejemplo, tenemos, en un cierto lugar, en un cierto instante ocurre un evento uno y en otro cierto lugar, en otro cierto instante, ocurre un evento dos. No tenemos armado ningún sistema de referencia, nada, somos unos vagos, andábamos por ahí nada más. Y ocurrieron dos cosas. Por ejemplo, no sé, por ejemplo dos rayos, dos truenos, dos bombas explotaron, qué se yo. Lo que sea. Y me pregunto: ¡uy! ¿Fueron simultáneos? O sea, ¿cómo hace uno para saber si dos cosas que ocurrieron separadas espacialmente, son simultáneas?

81. A1: Tiene que estar parado en algún lugar.

82. P: ¿Quién?

83. A1: El observador.

84. P: ¿El observador?

85. [Otro alumno interviene pero no se entiende lo que dice, algo así como tiene que pasar en el mismo instante].

86. P: Claro, tiene que ser en el mismo instante. ¿De qué estamos hablando? Bueno, muy bien ¿Cómo puedo yo darme cuenta de que pasó en el mismo instante?

87. A1: Por los relojes.

88. P: No tengo relojes.

89. A1: Medís la distancia.

90. P: ¿Mido la distancia?

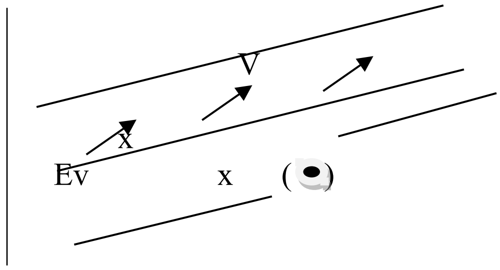
91. (Los alumnos hablan al mismo tiempo y no se entiende).

92. P: Bueno, es muy fácil el ejemplo. Si yo estoy acá en el medio…

93. A2: En algún lado tenés que estar.

94. P: En algún lado tengo que estar. ¿Está bien? Entonces, bueno, supongo que sale luz de acá, sale luz de acá, ¿y por qué digo luz? Y bueno, porque luz es lo que se propaga en vacío, no vaya a pasar que haya viento ni cosas raras, ni nada, ¿no? Supongo que esto ocurre en el vacío que esto es la luz, justamente. Y tengo que ver al mismo tiempo, ¿qué tiene que pasar?

95. A3: Que la luz te llegue al mismo tiempo.



96. P: La luz te llega al mismo tiempo. Si la luz de éste me llega al mismo tiempo que la luz de éste, concluyo: fueron simultáneos. ¿Está bien? ¿De acuerdo? ¿Sí? ¿Todo el mundo de acuerdo? Muy bien.
Es más, podemos, podemos suponer que yo todavía no armé mi sistema de referencia pero sí tengo digamos, mi sábana donde podría armar mi mapa, es decir, mi sistema de referencia y puedo suponer que, cuando ocurrió esto, se hizo una marca en mi sábana. Cosa que yo puedo ir y mirar exactamente en mi sábana, dónde ocurrió, y este evento también, deja una marca y puedo exactamente ir y mirar ¿sí? Por lo tanto el procedimiento de ver y de identificar dónde está el punto medio es un procedimiento prácticamente bien definido, no hay ninguna ambigüedad. ¿De acuerdo? Por lo tanto, si la luz me llegó al mismo tiempo los eventos fueron simultáneos. Si la luz no me llegó al mismo tiempo, los eventos no fueron simultáneos. Y buenas noches. ¿Está bien?

97. A2: Debe estar mal. [Risas]

98. P: Hay un pequeño detalle que se nos escapó que es éste: ¿qué pasa? Y acá es donde es importante hacer la abstracción del hecho de que esto es algo que aparece y desaparece. ¿Está bien? Esto también es algo que aparece y desaparece. Que perfectamente yo puedo dejar dibujada la marca de donde ocurrió. Eso no está mal pero el evento parece y desaparece. Entonces no tiene sentido, o sea yo no puedo saber, cómo es, yo puedo estar acá en el medio pero puedo estar en el medio en reposo y puedo estar en el medio en movimiento, con una cierta velocidad v. Pero qué pasa si yo pasé con mi sábana, justo por el punto medio, marqué en mi sábana los lugares donde ocurrieron las cosas, pero después yo con mi sábana, me iba con sábana y todo, me fui con sábana y todo para algún lado.

99. A4: Va a haber una diferencia entre lo que marcó en la sábana…

100. P: Esta marca se fue para aquel lado, esta marca se fue para allá conmigo, de tal manera que, todo se fue conmigo. Muy bien, entonces, puedo identificar que estoy en el medio, ¿sí? y puedo ver qué pasa con la señal que me llega de lo que pasó acá y lo que pasó acá. ¿Sí o no?

101. A5: No.

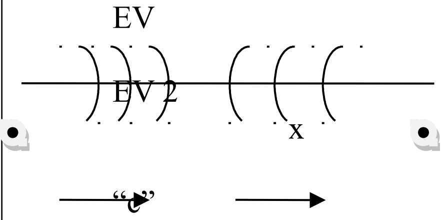
102. P: ¿Por qué no?

103. A5: No porque tenés que tener otro sistema que esté quieto respecto de esos eventos.

104. P: Justamente no existe nada quieto respecto de los eventos. Eso es lo que les quiero meter en la cabeza.

105. A5: No necesitás...

106. P: Los eventos como tocan en un punto del espacio en un instante de tiempo nada más, están igual en reposo que cualquier sistema o igual en movimiento que el sistema. No tiene sentido asignarles movimiento o estaticidad, no sé como decirlo. ¿Entienden? Por eso, siempre que estudien relatividad, la palabra clave va a ser evento.



107. (Hablan todo al mismo tiempo y no se entiende).

108. A6: Pero la información del evento sí.

109. P: Justamente para tratar de sacarse de la cabeza el hecho de que hay algún sistema en el cual esto pasó en reposo. No hay un sistema en el que esto pasó en reposo. ¿Está bien? Pasó, uh, pasó uh, pasó y desapareció, pasó y desapareció. ¿Entienden? Entonces perfectamente puede ocurrir que yo haya pasado justo en el punto medio, y eso lo puedo chequear, a posteriori, ¿está bien? Con eso no hay problema, pero, yo sí puedo estar acá en reposo o en movimiento. Hagamos una división para que la cuenta sea fácil. Imagínense que yo me estaba moviendo para allá con velocidad pe, entonces la información de que pasó esto, viaja hacia el punto medio, la información de que acá pasó esto, viaja hacia el punto medio, y si yo pasé moviéndome para allá ¿qué va a pasar?

110. [Hablan todos al mismo tiempo y no se entiende].

111. P: Llegarían al mismo tiempo. Para alguien que se está moviendo para allá, ¿llegan al mismo tiempo?

112. A3: No.

113. P: No. Porque ya pasó, no está. No es mejor estar quieto que estar en movimiento. O sea no hay que distinguir estar quieto o estar en movimiento respecto de, solamente, tuc, tuc, dos eventos. ¿Está? Entonces, ¿qué ocurre? Ocurre lo siguiente, si la velocidad con la que esta información puede llegar a este punto, es infinita, ¿está bien? por ejemplo, como nosotros creemos que son las cosas en fuerza gravitatoria. ¿Está bien? O sea nosotros creemos que si uno tiene la Tierra y la luna. ¿Está bien? Si la Tierra se corre, la luna se entera al instante, exactamente en el mismo instante. ¿Está bien? O sea no hay delay, no hay un retraso. Sin embargo, las leyes del electromagnetismo dicen que no. Por lo menos para los fenómenos que tienen que ver con las fuerzas eléctricas y magnéticas, sí hay un retraso, asociado con la velocidad finita de viaje de la luz que es c. Entonces, por supuesto si la velocidad con la viaja la información de acá al punto medio es infinita, que yo al mismo tiempo me esté moviendo, no cambia nada, ¿está bien? y el concepto de simultaneidad es absoluto. Pero, si la velocidad con la que la información de que acá ocurrió un evento, se transmite a una velocidad finita, ¿sí? entonces, estar quieto o estar en movimiento produce un resultado totalmente diferente.

114. A3: Pero siendo tan grande la luz, ¿no va a ser despreciable esa diferencia?

115. P: Va a ser despreciable para cualquier fenómeno que ocurra a una velocidad despreciablemente baja con respecto a la velocidad de la luz, que es, como ocurrió nuestra vida desde los griegos hasta el 1905. ¿Está bien? Y hubo física y hubo química y hubo muchas cosas.

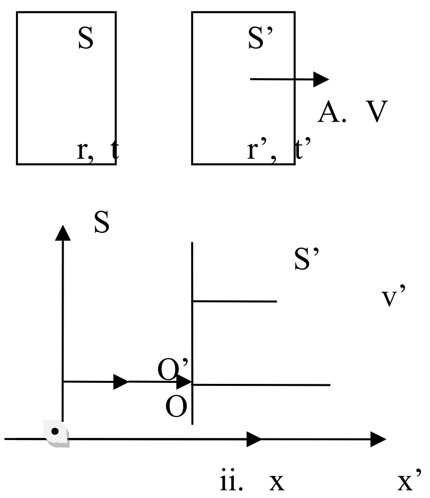
116. A3: El punto es que es indistinguible si hay movimiento o no.

117. P: Claro, exactamente. No hay, no hay de qué agarrarse. Bien. Entonces tenemos que construirnos una manera, bueno, una manera de hablar del espacio y del tiempo ya la construimos, es compatible con lo que hacíamos desde los griegos hasta 1905, no hay ningún problema, ¿de acuerdo? Muy bien. Pero vemos en este hecho que, si yo tengo dos personas en movimiento relativo, dos sistemas en movimiento relativo, lo que para un observador va a ser simultáneo, para otro observador no va a ser simultáneo. Lo cual es interesante porque significa que cuando dos fenómenos impactan a la misma hora, en un sistema, en el otro sistema no impactan a la misma hora. Porque justamente que impactan a la misma hora, implica cosas que ocurren simultáneamente en ese sistema. ¿Está? Muy bien. Entonces, bueno, listo. La historia que era, digamos un preliminar para darse cuenta de porqué, tomar conciencia de que lo que uno está describiendo son eventos, entonces, acá, no es distinguible, o sea no existe estar acá en reposo. ¿Sí? Y personas que vean, digamos, observadores, sistemas, que pasen por acá, con distinta velocidad, van a sacar distintas conclusiones acerca de la simultaneidad o no de las cosas que ocurren. ¿Está bien? Por supuesto, eso va a ser apreciable en la escala en que las cosas sean comparables a la velocidad de la luz y van a seguir siendo totalmente despreciables en nuestra vida cotidiana. Bueno. Bien. Entonces, si me creyeron esto, y les resulta razonable, es más probable que me crean lo que vamos a hacer en la segunda parte. Ahora sí, un descansito de cinco minutos.

[Recreo]

118. P: Entonces quizás ahora estemos preparados para aceptar el hecho de que, cosas que son simultáneas, ¿verdad? yo voy a comparar un sistema S en el que…, me armé un sistema S prima siguiendo exactamente los mismos procedimientos, la misma receta, los erre prima y los t prima, con la diferencia que ahora todo eso junto se mueve con velocidad te. Bueno, entonces lo que hay que discutir es la relación entre r, t y r prima, t prima, de <u>un</u> dado, de <u>un</u> dado evento. ¿De acuerdo? O sea, una cosa que ocurre, ¿sí? por ejemplo la explosión de una supernova, qué nombre le pongo al lugar y al instante respecto del sistema original y qué nombre le voy a poner en el otro sistema. Bueno, para facilitar las cosas, para facilitar las cosas, vamos a… que es suponer que el sistema S prima y el sistema S tienen los ejes equis coincidentes, ¿está bien? y el origen del sistema S coincide con el origen prima del sistema S prima, en el instante, o sea en el valor de tiempo, llamado t igual a cero en S y t prima igual a cero en S prima. ¿De acuerdo? ¿Qué significa eso? Significa poner un mismo punto del espacio, un mismo instante de tiempo, un mismo evento, como origen de los dos sistemas de referencia. ¿Está bien? Como

RELACIÓN entre (r, t) Y (r', t') de un dado EVENTO



- de S coincide con el

O' de S' en el instante llamado
t = 0 en S
t' = 0 en S'

origen de espacio y tiempo de los dos sistemas de referencia. Por supuesto que de ahí en más el origen del sistema S prima se va a mover con velocidad v y el origen de O prima en el instante t igual a cero, obviamente no va a estar más acá sino que va a estar en otro lado.

Bien, bien, lo tradicional. ¿Se entendió? ¿Se entendió? Bueno, muy bien, por supuesto, esto no es obligatorio pero no perdemos nada, esa es la realidad, no pagamos ningún precio, y nos podemos sacar las dudas en matemáticas.

Bueno, muy bien, ¿de donde vamos a arrancar? Vamos a arrancar de lo siguiente: proponemos, una transformación lineal, o sea que equis prima, o sea, el valor de equis prima de ese evento, ¿si?, que ocurrió, se relacione con el de equis y el de t, mediante dos relaciones: a por equis más be por t.

PROPONEMOS UNA T LINEAL

$$\begin{cases} x' = ax + bt \\ t' = cx + dt \\ \text{“}y' = y\text{”} \end{cases}$$

Y que el instante de tiempo que se le asigna a ese evento, ¿no? a este mismo evento ¿no?, o sea, lo que es común es el evento que estamos observando, ¿está bien? Lo que difiere es la descripción en los dos sistemas. Igual, igual que antes como hicimos antes. F prima va a ser a, be, ce, de, c por equis más d por t. ¿De acuerdo? Entonces, las transformaciones de Galileo: a igual uno, be larga igual menos ve, este, como se dice, c igual a cero, de igual a uno. ¿Está bien? Entonces, la coordenada en la misma dirección en la cual está la velocidad, suponemos que cambia, y en cambio la perpendicular suponemos que no cambia. ¿De acuerdo? Esto, bueno, les pido que me lo crean, ¿está bien? se puede justificar a priori, digamos, antes de hacer lo que yo voy a hacer, ¿de acuerdo? Me salteo la justificación normal. ¿Sí? ¿De acuerdo? Digamos, esto lo puedo poner a priori. Bueno, muy bien, entonces, cómo puedo hacer ahora para ver cómo tiene que ser o qué posibilidades hay, no puede haber velocidad única, ¿no?, ¿qué posibilidades hay para estos coeficientes, a, be, ce y de, de modo que se cumpla el principio de relatividad, ¿sí? y que se cumpla que la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas.

Entonces, para hacer esa construcción tenemos que pensar en dos cosas: primero, si en equis igual a cero, t igual a cero, ¿si?, se emite un destello de luz. Bueno, se emite luz, los puntos a los que llega la luz, los puntos a los que llega la luz serán los que estén sobre la esfera, ¿no? Radio de la esfera al cuadrado igual velocidad de la luz por tiempo, al cuadrado. ¿Están de acuerdo? O sea en el sistema de referencia S se emite luz y la luz va pasando por los puntos que están a lo largo de una esfera centrada, ¿está bien? en el origen de S, como charlamos el otro día.

1º) Si en x = 0, t = 0 se emite un destello de luz los puntos a los que llega la luz serán

119. $r^2 = (ct)^2$

¿De acuerdo? Muy bien. Segundo, si en equis prima igual cero, te prima igual cero, uno hace lo mismo, ¿qué va a pasar?

120. A2: Se emite luz.

121. P: Se emite luz, entonces, voy a tener la misma propiedad pero, para los puntos identificados en el sistema S prima, ¿está bien? O sea los puntos que alcanza la luz en el sistema S prima, después de un tiempo t prima, va a ser velocidad de la luz por tiempo al cuadrado. No sé para qué lo pongo al cuadrado si podría no tomarlo al cuadrado ¿no? haciendo el módulo de

2º) Si en x’ = 0, t’ = 0 se emite luz →

$r'^2 = (ct')^2$

erre es lo mismo que al cuadrado. Pero bueno. ¿Está bien? ¿Está bien? Fantástico. Pero equis cero te cero y equis prima cero te prima cero, son el mismo evento, o sea que es el mismo destello de luz, el que estoy describiendo en el sistema S de esta manera y en el sistema S prima de esta manera. ¿De acuerdo? Conclusión, bueno, conclusión, equis cuadrado más y cuadrado menos ce por t al cuadrado, igual cero para los puntos ¿no? de la emisión de la luz y esto tiene que ser igual a equis prima cuadrado más y prima cuadrado menos ce te prima cuadrado.

1 $\underbrace{x^2 + y^2 - (ct)^2}_{S} = 0 = \underbrace{x'^2 + y'^2 - (ct')^2}_{S'}$

sea los puntos que en el sistema S definen los lugares por los que pasa la luz, ¿sí? definen toda la superficie. La superficie se define mediante esta ecuación. Para un tiempo fijo, ¿no? Muy bien, los puntos para esa misma superficie en el sistema S prima, se describen así, y tiene que ser la misma superficie.

122. A3: Los eventos ocurren en los dos sistemas por separado.

123. P: No importa. Pero la luz llegó o no llegó.

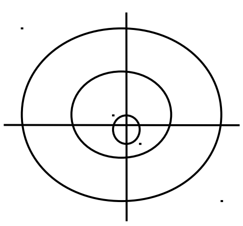
124. A3: Pero cuando decís que es el mismo evento…

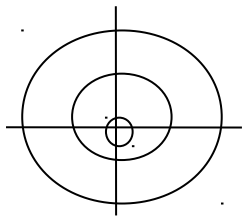
125. P: Así se ve que en el sistema S, ¿cómo se ve en el sistema S prima?

126. As: Igual.

127. P: Igual. Se ve así.

128. A4: Pero equis cero te cero.





129. P: Sin embargo, todos esos puntos y todos estos puntos, tienen que ser el mismo evento. El mismo evento. O sea aquí hay una curva, se iluminó o no se iluminó.

130. A4: El mismo fenómeno.

131. P: El mismo fenómeno, claro, el mismo fenómeno. Por eso (…) de esto nos fuimos a eso, un fenómeno. ¿Está bien? Yo estaba parado en un lugar, y el lugar se iluminó o no se iluminó. ¿Qué me importa … en un sistema no inercial ¿se acuerdan? Lo que pasa, pasa. Pasa y punto. Es una sola cosa. ¿Está? Muy bien. Entonces tenemos esta relación que tiene que cumplir la emisión de luz en un sistema y en otro, que nos va a permitir ponerle condiciones a…

132. (Un alumno dice algo acerca de los coeficientes pero no se entiende qué). Vt'?

133. P: Las otras cosas que puedo usar son las siguientes: (La primera no se entiende) La segunda cosa que voy a usar es que el origen del sistema S prima, el origen de S prima, o sea el punto que llamé O prima, tiene en el sistema S ecuación horaria, en S, ecuación horaria, equis igual v por t, ¿de acuerdo? ¿De acuerdo? O sea, mientras estemos en nuestro sistema con nuestro mapa y nuestros relojes, la vida es (…). ¿Está bien? Entonces el origen,

2

El origen de S', o, en S, ecuación horaria

$X_{(0)} = vt$

el punto del sistema S prima, identificado como origen, en el instante t igual a cero coincide con el origen del sistema S y después se movió con velocidad v para allá, su ecuación es: equis igual a v por t. ¿Está bien? O sea es el equis del O prima, del punto O prima. Fantástico. Pero, el equis del punto O prima, se tiene que relacionar con el equis prima del punto O prima, mediante esta relación que está acá. Pero, el equis prima del punto O prima, ¿cuánto vale? El equis prima del punto O prima. ¿Cuánto vale?

Pero $x'_{o'} = 0$
todo t'

134. A5: Cero.

135. P: Cero. El origen del sistema S prima, siempre está en el origen. Del sistema S prima. ¿Está bien? Están todos los elementos. Fantástico. Pero este equis, este t, este equis y este t se tienen que relacionar como dice ahí. O sea, tengo una fácil de identificar que es ésta.
Cero tiene que ser igual a a v por t más be por t. ¿Está bien?

$0 = avt + bt$

Entonces ésta es una pista para descubrir estos coeficientes obtenida a partir de observar los eventos relacionados con la emisión de un pulso de luz. Esta es una pista que me va a ayudar a descubrir estos coeficientes relacionada con describir el movimiento del origen del sistema S prima respecto del sistema S. ¿Sí? Por supuesto, ahora, usando el principio de relatividad, puedo hacer exactamente al revés.
O sea, el origen del sistema S, el origen del sistema S, el punto que llamé O, se mueve con menos v, ¿está bien? respecto de S prima. ¿Está bien? Y acá estamos, de manera muy pesada, usando el principio de relatividad. Si S prima se mueve respecto de S con velocidad v para allá, S se mueve respecto de S prima con velocidad menos v. Por lo tanto, puedo escribir lo mismo pero para el origen O, o sea, el valor de equis del origen O en el sistema S que es cero, tiene que ser igual a (…). Va a ser que cero, o sea, equis prima del origen O, o sea del origen del sistema S, es menos v por t prima.

El origen de S, O, se mueve con –v respecto de S'. X_0 = o-

" $x'_0 = -vt'$ " pero $x_0 = 0$

¿Está bien? Entonces, ésta es la descripción del movimiento del origen del sistema S respecto del sistema S prima. ¿Sí? Bueno, por lo tanto, bueno, pero la posición de O en el sistema S, obviamente es igual cero, de manera que si ésta es una función (…) de un sistema al otro, tienen que estar relacionados entre sí.
Así que esto es: menos v por t prima, es igual a a por cero, (si quieren lo pongo), más be por t. Mientras que t prima, es igual a ce por cero, (lo pongo), más de por t. ¿De acuerdo? Entonces de acá, lo que saco es que a por v más be es igual a cero. Y de acá, dividiendo miembro a miembro, lo que saco es que menos v es igual a be sobre de, o lo que es lo mismo, be más ve por de también es igual a cero. ¿Está? Con lo cual, a ver si podemos ponerlo en, equis prima va a ser, a y be larga lo voy a poner como, como se ve acá, be larga lo puedo poner como menos a por ve corta.

$-vt' = bt$

$t' = dt$

$0 = avt + bt \rightarrow av + b = 0$

$-v = b/d \quad \Rightarrow b + vd = 0$

A. $b = -av$

De acuerdo, entonces acá, o sacar factor común acá y puedo poner equis menos v por t. Bueno, muy bien. Fíjense, de estas dos, a por ve más be es cero, y de por ve más be es cero. Con lo cual a y de son iguales. ¿Está bien? a y de son iguales. ¿Sí o no?

136. A5: Sí.

137. P: ¿Está bien? Así que donde dice d también puedo poner a. Así que t prima es igual a ce por equis más a por t. ¿Está bien? Bueno, muy bien. Ahora déjenme arreglar la macana que me mandé, que es que llamé a esto ce y después a la velocidad de la luz la voy a llamar ce y voy a hacer una (…) terrible, así que déjenme cambiar el nombre de este coeficiente y le voy a poner, a, be, ce, de, e.

$x' = a\,(x-vt)$
$t' = cx + at$
$\downarrow$
e

Disculpen, siempre hago este tipo de macana. Bueno, ya está, listo. Ustedes fíjense, me queda muy poquito, me queda muy poquito, por averiguar que es el valor del a y el valor del e. Para eso voy a usar la relación del impulso de Bruce. ¿Sí? que mencioné pero que no lo usé todavía.

Entonces voy a escribir: acuérdense, equis prima al cuadrado más y prima al cuadrado, menos ce t prima, todo al cuadrado, tiene que ser igual a equis cuadrado más y cuadrado, menos ce t cuadrado. Esto fíjense entonces, ahora reemplazo, el equis prima es: a cuadrado por equis menos ve por t al cuadrado, más y prima al cuadrado, bueno y la puse porque ya había dicho que eran iguales, menos ce por t prima al cuadrado, es ce cuadrado por e por equis más a por t al cuadrado. Ahora resulta que esto tiene que ser, igual a equis cuadrado más y cuadrado menos ce por t, todo al cuadrado. ¿Ven?

$$x'^2 + y'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 - (ct)^2$$

$$a^2\,(x-vt)^2 + y^2 - c^2\,(ex + at)^2 = x^2 + y^2 - (ct)^2$$

Fíjense, una condición muy fuerte. ¿Qué va a salir de acá? Para eso desarrollo los cuadrados y pongo junto todo lo que va con equis cuadrado, todo lo que va con y cuadrado, todo lo que va con t cuadrado y los dobles productos. ¿Sí? Entonces ya me queda, a ver, ¿lo hacemos de una? ¿Se animan?

A ver, a cuadrado cuando aparece con equis cuadrado, a cuadrado, menos ce cuadrado, e cuadrado. ¿Está bien? Todo esto aparece con equis cuadrado. Muy bien, y cuadrado está de los dos lados (…), algo igual, no molesta, ¿quién va a estar con t cuadrado? Más. ¿Quién va a estar con t cuadrado? a cuadrado ve cuadrado, ¿no? de acá, menos ce cuadrado, a cuadrado, t cuadrado. ¿Está bien?

$$\underbrace{(a^2 - c^2 e^2)}\,x^2 + \underbrace{(a^2 v^2 - c^2 a^2)}\,t^2 \quad *$$

$1 \qquad -c^2$

138. (Un alumno dice algo que no se entiende).

139. P: Acá, ¿no? acá va a cuadrado, t cuadrado.

140. A6: Factor común.

141. P: Gracias. (Un silbido), t cuadrado. Y por último el doble producto, acá tenemos, menos dos a cuadrado ve por equis por t. Y acá voy a tener menos dos ce cuadrado, por e por a por equis por t. Muy bien. Conclusión. Esto tiene que valer uno. Esto tiene que valer menos ce

$$* \quad -2a^2\,vxt - 2c^2\,e\,xt$$
$$\underline{\qquad}\ 0\ \underline{\qquad}$$

cuadrado, ¿si? Y esto más esto tiene que dar cero.
Entonces con esas condiciones entre los coeficientes, se va a cumplir que la ecuación que representa a todos los puntos que alcanza el pulso de luz emitido en t igual a cero y equis igual a cero, coincide con todos los puntos de luz. ¿Sí? Fíjense que lo que estamos haciendo aparecer es la descripción de toda la superficie. ¿Está bien? No estamos diciendo que sea punto a punto, ¿está bien? Tiene que coincidir como descripción de toda la superficie. Fantástico. Entonces, a ver qué es lo más fácil.

Acá tenemos ¿no?, a cuadrado, ve cuadrado menos ce cuadrado a cuadrado, tiene que ser dijimos, ce cuadrado. Con lo cual ya está determinado el valor de a. ¿No? O sea saco factor común a cuadrado, doy vuelta esto, ce cuadrado menos ve cuadrado, le cambio el signo, me queda ce cuadrado, paso dividiendo, (un silbido), ce cuadrado menos ve cuadrado, o sea esto es, ¿cuánto es? Uno dividido uno menos ve cuadrado sobre ce cuadrado. Con lo cual a es uno sobre la raíz de uno menos ve cuadrado sobre ce cuadrado. Y por lo tanto ahora, lo único que nos falta determinar es el valor de e, el valor de e lo puedo sacar quizás de acá, ¿no? Lo que tengo es que 2 por a al cuadrado por ve, más 2 por ce cuadrado por e por a es igual a cero, por lo tanto, bueno, el 2 se va, a cuadrado se va, ¿está bien? a cuadrado se va, muy bien, me queda: e sobre a es igual, a menos ve sobre ce cuadrado. Bueno, ¿por qué saqué e sobre a? Porque entonces acá, el a lo podemos sacar factor común igual que arriba, ¿está bien? O sea esto, lo puedo poner así, t prima es igual a: a por e sobre a veces equis más t. ¿Está bien?

$$a^2 v^2 - c^2 a^2 = c^2$$

$$a^2 \cancel{(v^2 - c^2)} = c^2 / (c^2 - v^2) = 1 / (1- v^2/ c^2)$$

$$a = 1 / \surd (1- v^2/ c^2) = \delta$$

$$2a^2 y + 2c^2 ea = 0$$

$$ea = -v / c^2$$

$$t' = a (e/a\, x + t) =$$

De hincha nomás, no tiene ninguna cosa… Así que ¿cómo me queda? Pasando en limpio, bueno, vamos a introducir nomenclatura habitual de los libros de texto, acuérdense, esto es un número, así, muy general. ¿Está bien? Le ponemos un nombre, se llama gama. Si éste se llama gama, en todos los libros se llama gama. ¿Está bien? Cuando uno lee otro artículo de una cosa sobre relatividad y le ponen gama a otra cosa, es un error de tipografía, gama es... Bueno, muy bien.

Así que tenemos, equis prima es igual, lo voy a poner en el orden que enfatiza la similitud con las transformaciones de Galileo. Gama por equis menos ve por t. Muy bien... Y t prima es igual a gama por t, ¿está bien? como el de adelante. Y ahora reemplazo acá, e sobre a era menos ve sobre ce cuadrado. O sea, menos ve equis sobre ce cuadrado. Y prima igual y. Bueno (…).

$$\left.\begin{array}{l} x' = \delta\, (x - vt) \\ t' = \delta\, (t - vx/c^2) \\ y' = y \end{array}\right\} \otimes$$

Entonces, a ver, esta es la forma de las relaciones entre la manera de identificar los puntos del espacio y los instantes de tiempo, de dos sistemas de referencia construidos de la manera que lo hicimos. Entonces, obviamente, fíjense que lo que dice acá, es que el tiempo transcurrido respecto de un sistema y el tiempo transcurrido respecto de otro, ¿está bien? difieren en una cantidad que está, cuanto más lejos, más grande es la diferencia. Bueno, está bien, entonces estas son las famosas Transformaciones de Lorenz⊗.

Bueno, muy bien, entonces, por supuesto, bueno, fíjense, este número gama es uno sobre la raíz de uno menos ve cuadrado sobre ce

$$\delta = 1 / \surd (1- v^2/ c^2)$$

cuadrado.
ve sobre ce, en los libros, se lo suele indicar con la letra beta, y los argumentos que construimos son suponiendo que la velocidad ce es la máxima velocidad, o sea no hay propagación de información más rápida que la velocidad ce, que es lo que nos impedía establecer la simultaneidad con un sentido absoluto, por lo tanto, esto está construido sobre la base de que no hay información que pueda viajar a velocidad mayor que ce, nada físicamente interesante puede involucrar una velocidad acá que sea mayor que ce.

Por lo tanto eso tiene sentido para beta menor que uno e igual, cuando se trate efectivamente de la propagación de luz o de alguna interacción digamos en que también se propague la luz.

$v/c = \beta \leq 1$

$\delta \geq 1$

Así que esto tiene sentido solamente para velocidades menores que la de la luz, con lo cual entonces este número, es un número que siempre es mayor o igual que uno, cuando acá es muy chiquitito, el número crece (todo esto acompañado con un silbido), así que este es un número que va entre cero y uno y este es un número que crece entre uno e infinito. Ahora por supuesto que (…) dado gama. Fíjense esto, cuando la velocidad es pequeña comparada con la velocidad de la luz, si uno hace un desarrollo en serie de Taylor de esto, ¿cuánto da? ¿Saben hacer desarrollo en serie de Taylor ya? ¿Sí? Es muy fácil. El desarrollo de la raíz, ¿cómo es?

La raíz de uno más epsilon. Uno más epsilon sobre dos. ¿Se acuerdan? No mucho, por lo visto. Bueno, muy bien. Muy fácil, ¿no? o sea lo elevás al cuadrado y te queda el término del doble producto y el otro te queda al cuadrado. ¿Está bien? Por eso necesita epsilon sobre 2. Muy bien, así que esto de acá dentro, la raíz la tengo que reemplazar por uno menos ve cuadrado sobre 2 ce cuadrado y después uno sobre, uno menos epsilon ¿Cómo es el desarrollo en serie de Taylor de primer orden?

$\sqrt{(1 + \varepsilon)} = 1 + \varepsilon / 2$

$1 / (1 - \varepsilon) \approx 1 + \varepsilon$

142. A7: Equis a la i.

143. P: Uno más epsilon, o sea se da vuelta el signo. ¿Se acuerdan de esto, no? Ustedes dicen que se acuerdan todo y nadie se acuerda. Perdoname. Pero les resulta familiar. O sea discutieron esto alguna vez y saben lo que hay que saber. En la física, siempre en la física se termina en el primero o segundo orden. Bien.

Con lo cual esto entonces, desarrollado a primer orden de ve cuadrado sobre ce cuadrado, va a ser uno más ve cuadrado sobre 2 ce cuadrado.

$\delta = 1 / \sqrt{(1 - v^2/ c^2)} \approx 1 + v^2/ 2c^2$

¿Ven? O sea el efecto notable, ya ce es grande, el efecto notable depende de ce cuadrado. ¿Está bien? O sea que para que el efecto ese sea notable, bueno, tenés que estar realmente en una situación en la cual la velocidad es muy próxima a la de la luz. ¿Está bien? Bueno, fíjense que si ve es un centésimo de la velocidad de la luz, eso ya te da una función de uno en 10.000, no en 20.000. ¿Está bien? Y la centésima parte de la velocidad de la luz es 3.000 km/s, ¿está? Bueno, por eso tardó tanto en descubrirse esto y (…). Realmente es en condiciones muy extremas que esto ocurre. Y lo mismo pasa con este término acá, en la manera cómo se relacionan la forma de identificar quién (…).

Entonces, en la relación entre t prima y t, la parte que contiene a equis, tiene un ve equis también sobre ce cuadrado.

$t' \leftrightarrow t$
$x \rightarrow vx / c^2$

¿De acuerdo? Por eso entonces, cuando uno puede despreciar efectos de orden ve cuadrado sobre ce cuadrado, uno vuelve a ver las transformaciones de Galileo. Porque si uno pone gama igual a uno, y tira este término, están las transformaciones de Galileo. Que, efectivamente, ese es un requisito fundamental de las transformaciones. Cuando la velocidad de transformación es suficientemente pequeña, tenemos que hacer un aterrizaje suave en las transformaciones de Galileo, obviamente. A bajas velocidades funciona bastante bien y así estaba construida la física durante xx siglos. ¿De acuerdo? Bueno, fantástico, por hoy vamos a dejar acá, lo interesante entonces es, bueno, la clase que viene vamos a cerrar. La manera de no equivocarse, para sacar conclusiones correctas en base a esto, es acordarse que el equis que dice acá y el t que dice acá, el equis prima que dice acá y el t prima que dice acá, corresponden a los valores asociados a un mismo hecho, a una misma cosa que tiene que suceder, ¿está bien? o sea, se prende una lámpara, sale el tren de la estación ¿está bien?, qué se yo, lo que sea, pero es un hecho que ocurre en un punto y en un instante, ¿está? ¿De acuerdo? Entonces, ¿cuáles son los efectos, ahora, cinemáticos si se quiere, espectaculares, que trae (…)? Por supuesto, la primera es, la diferente duración de lapsos de tiempo en que ocurren las cosas en un sistema o en otro. Los lapsos de tiempo en que transcurren las cosas toman distinto valor según el sistema que estemos usando. Entonces, bueno, nos vamos a quedar en este tiempo que sumo ¿tentativamente? El otro efecto conocido es el de la contracción de las longitudes. El que dice que si formo un movimiento, (un silbido) tiene una longitud. Su dimensión, digamos, en la dirección del movimiento (otro silbido), está contraída. Y por último, para sacar conclusiones fundamentales, tratar de determinar con esta ley de composición de velocidades que se obtiene, en base a esta manera de relacionar lo que pasa en un sistema y en otro. ¿Sí? O sea, la ley de composición de velocidades sumando directamente las velocidades, salía de las transformaciones de Galileo, si cambiamos las transformaciones de Galileo, la ley esa de transformación de las velocidades va a cambiar y queremos ver cómo cambia en base a estas transformaciones. Bueno, muy bien, entonces, esas son las tres cosas con las cuales está bien, si salimos de física uno con esas tres cosas, está bien. Así que bueno, espero la clase que viene poder llegar, supongo que sí, y después me estiro un poco para que aparezca e igual eme ce cuadrado, que si no… Lo que pasa es que eso es meterse en la dinámica, ¿entienden? Para sacar esa, e igual eme ce cuadrado, tenemos que meternos en la dinámica, entonces, no (…). Pero bueno, todavía no (…). Bueno, preguntas, dudas, comentarios…

144. A6: Cuando, porque también, está en el problema que cambia la masa…

145. P: Por eso, ahí te metés en la dinámica. Ahí te metés en la dinámica pero bueno yo confío en de alguna manera llegar con eso.

146. A1: Una pregunta respecto del cambio de masa, porque es por eso que hablaban de que se podía entender lo de los agujeros negros, lo de (…)

147. El profesor sigue el diálogo (no se entiende con claridad la mayor parte del diálogo).

148. A1: Que le podían dar tanta energía que podían hacer colapsar.

149. A2: La densidad tiene que tender a ∞

150. A3: Pero tomando límite, no se llega a explicar eso…

151. P: No creo, no lo sé, pero no creo…

152. P: Bueno, a mí me quedó la impresión de que la clase pasada muchos se quedaron con ganas de probar esos aparatitos y como el parcial va a ser sobre rígido, no va a ser sobre relatividad, ¿no? o sea pongamos las pilas en los prácticos, pongamos las pilas en el lugar indicado.

153. A4: ¿En el final va a entrar relatividad?

154. P: Sí, por supuesto. Especial y General. [Risas] El último día de clase discutimos bien, qué entra y hasta dónde, ¿está bien? A mí me gustaría, no, ustedes quieren que, este, aunque sea

entiendo no muy profundamente... (…). Llevarse en la cabeza las fórmulas de las transformaciones de Lorenz, saber y aceptar las consecuencias de lo que la teoría de la relatividad implica, aceptar los fenómenos de la expresión del tiempo que cambia las longitudes, ese tipo de cosas que después aparecen en millones de fenómenos de la física que ustedes se pueden encontrar en física 2, física 3, en laboratorio 4, entonces, bueno, por lo menos, llevarse en la cabeza eso. ¿Está bien? Yo por supuesto, de ninguna manera voy a pretender una lección sesuda… (Siguen charlando entre todos un rato más y manipulan algo). Los invito en serio a que prueben la cosa esa que charlábamos la vez pasada, no se maten por favor.

155. A4: Gracias!

CASO 3. PROFESOR B

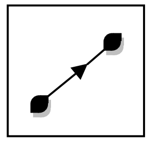
1. P: Vamos a ver aplicaciones de la función… La vez pasada les dije que íbamos a hacer… para darle coherencia, hoy vamos a hacer otra cosa. Lo que vamos a hacer es discutir un poquito algunas aplicaciones, sí, algunas aplicaciones de lo que estuvimos viendo hasta ahora. En términos de ver para qué sirve esta descripción abstracta de mapas y demás. Vamos a describir algunas explicaciones y algunos problemas variados en el campo de la mecánica, en el campo de la biofísica y demás.

$$\dot{x} = f_1(x, y) + A\cos\phi$$

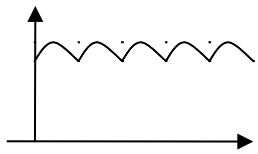
$$\dot{y} = f_2(x, y)$$

$$\dot{\phi} = \omega$$

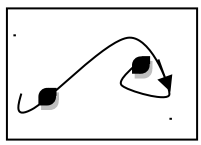
Σ



Se acuerdan que nosotros empezamos discutiendo el problema de los flujos en tres dimensiones, y nos daban una descripción tal que si teníamos un conjunto de variables reales y tenemos un sistema dinámico definido entre ellas y llevamos a cabo un forzado... Y habíamos explicado el espacio de fases tridimensional que provenía de tomar el tiempo, módulo del periodo del forzante, el primer transcripto era que íbamos a tener un sistema dinámico, en términos de ciertas variables y vamos a poner un forzado… de tipo periódico. Y lo que decíamos era que esto era equivalente a mirar el problema en un espacio de fases aumentado, donde la dinámica de esta… era trivial. Pero como el campo vector era idéntico en la caja cero, período, 2 veces el periodo y demás, nos restringía más a mirar lo que ocurría en la primera parte del tiempo, en el primer intento. Y habíamos discutido que en principio, si teníamos la misma unidad periódica y llevamos a cabo una inspección espectroscópica, lo que diríamos en ese mapa, o sea lo que estoy dibujando acá es el mapa,… microscópica del problema, está como un punto fijo. Eventualmente si existiera alguna otra órbita periódica ésta se va a representar como un punto fijo. Y la conexión entre estas órbitas periódicas, podría ser muy sencilla, podría ser que esta órbita periódica estuviera en la órbita inestable dentro de ésta, por ejemplo.
Y si yo mirara el mapa, lo que puede ser que ocurriera, era que simplemente, una órbita periódica fuera estable y viviera en la realidad inestable de ésta que está aquí. Es decir yo podría imaginar que tengo la realidad inestable de la primera órbita periódica, cuya intersección es la intersección que estoy mirando acá y que fuera ella la realidad estable de esta órbita periódica.



Por lo tanto si yo llevo a cabo una simulación numérica de este problema, una inspección de este problema, lo que voy a ver es que en cualquier condición inicial, termine evolucionando, acercándose a esta órbita periódica y después de cierto tiempo yo lo único que voy a ver es este puntito fijo si inspecciono el mapa o si miro la señal temporal de este problema, lo único que voy a ver es la señal periódica que corresponde a la solución que tengo aquí.
Ahora lo que también discutimos, en estas clases, fue que eventualmente en este problema, yo podría tomar los parámetros, y en función de las variables, podría ser bastante más complicado por qué, porque podría ocurrir lo siguiente, podría ocurrir esto. Podría suceder que si yo tengo el mapa, al cambiar los parámetros, que la realidad inestable alimente a la órbita periódica pero en forma rotacional. ¿Qué quiere decir esto?



Quiere decir que el espacio de fases que voy a tener ahora, una solución periódica, cuya realidad se enrosca como si fuera un rollo de papel, en ésta que está aquí. Si miro qué es lo que ocurre en la condición inicial, cercana a esta primera órbita periódica, esta condición inicial gira alrededor de la condición inicial de la órbita periódica que originalmente va acercándose, llevando a cabo algún tipo de rotación y eventualmente termina convergiendo a este punto fijo.
Esto queda representado por la situación ésta que estoy describiendo acá. Ahora podría ser que ocurriera lo siguiente. Podría ser que moviendo los parámetros, esta rotación que les estoy mostrando aquí, sea tal que, en un período del forzante, yo roto exactamente 180 grados.
Podría ser que al correr los parámetros, si yo tengo mi órbita periódica, puede ser que una perturbación que empieza por aquí, digamos, se acerque a la órbita periódica, sigue siendo estable, pero tal que, se encuentra

I

180 grados rotado respecto de la orientación inicial. Cuando vuelvo a iterar, me acerco nuevamente, pero en la misma dirección que tenía la órbita periódica con la condición inicial. Y así siguiendo, como siguiendo el borde de una variedad orbital, como si fuera siguiendo una trayectoria en una cinta de Moebius.

Y podría ocurrir el caso que si yo sigo moviendo mis parámetros, esa condición inicial deje de acercase asintóticamente a la órbita periódica, podría ocurrir entonces, en ese caso, pasáramos a tener en lugar de la órbita inicial, esta órbita, que ya no va a ser estable y es la continuación que sobrevive, de manera tal que después de dos iteradas, después de dos iteradas, vuelva a repetir su posición inicial. Lo que ha pasado entonces, es que ha nacido una órbita periódica de periodo dos, es decir que esta perturbación no mueve esta órbita periódica anterior, sino que sobrevive e intercepta la sección de Poincaré, dos veces. Este es el nacimiento de una órbita periódica y que si ustedes se fijan, tiene una particularidad desde el punto de vista geométrico, es que esta órbita periódica se enrosca alrededor de ésta, de periodo uno, es justamente el borde de una cinta del Moebius que tenga la órbita periódica dibujada en el medio y no sé porque alrededor de ésta. Son transiciones posibles que ocurrirían cuando yo voy moviendo los parámetros. ¿Qué parámetros en mi problema?

Y eventualmente esos parámetros podrían ser la amplitud, el forzante que estoy aplicando, la frecuencia del forzante.

[A, ω]

Por supuesto que yo podría seguir el juego y eventualmente a esta órbita periódica le podrían ocurrir cosas. Por ejemplo, le podría ocurrir que alrededor de esta órbita periódica, que había nacido como una órbita periódica estable, las perturbaciones se repitan, pero también dejando sobre una variedad orbital y que pasen a transformarse en una órbita que tiene periodo doble que la inicial o sea una órbita de periodo cuatro. Por ejemplo. Ahora ¿por qué estoy insistiendo en esta transformación posible? Porque hoy en la práctica van a ver, que si ustedes miran esto que ocurre cuando en un problema, después de mirar microscópicamente qué es lo que ocurre, si el sistema se nuclea sobre sí mismo alrededor de una forma de herradura, ustedes van a ver que las soluciones que estuvimos mirando en el periodo uno, una que estaba aquí, la otra que estaba aquí, y la solución del periodo dos, están organizadas de tal manera que se arriman en espacio espacio como en el ejemplo que les estaba describiendo hace un ratito.

Es decir, unos de los ejercicios de la práctica que les va a mostrar Mariano hoy, plantea justamente qué es lo que ocurre si en un problema yo hago lo que se llama una suspensión, o sea, imaginarse cómo pueden estar evolucionando el espacio de fases para terminar mapeándose en forma de herradura, y ustedes van a tener que seguir algunas órbitas periódicas y tratar de demostrar por ejemplo, esto que les decía recién: que la órbita del periodo dos se adecua de una manera especifica.

2

Esto va a cuenta de que nosotros estuvimos mirando el proceso de la formación de la herradura del espacio de fases, que nosotros discutíamos qué es lo que ocurría cuando nos acercábamos en la manera de tocar las variedades, nos acercábamos a esa situación límite tan fea, donde existían las conexiones transversas y lo que decíamos es que en el proceso ocurrían en forma suave, un montón de bifurcaciones en las cuales nacían órbitas periódicas. La que estudiamos en detalle fue el nacimiento de estas órbitas que eran rotaciones, las órbitas de Newhouse.

Estas órbitas que, a partir de un periodo dado, nacían y se acercaban, a partir de un periodo dado a estos puntos de recuperación…. y habíamos discutido que estas órbitas periódicas nacían en bifurcaciones de nuevo un ciclo.

Pero hay muchas bifurcaciones que ocurren en el proceso de ir tocando los parámetros cuando las variedades se van aproximando. Esta que les expliqué hace un ratito, sistema de Duplicación de periodos.

Lograr que una perturbación que gira alrededor de una cinta de Moebius se preserve como solución. Todo ese conjunto de transformaciones nos permiten llegar, con todos los parámetros,

DUPLICACIÓN DEL PERÍODO

de la situación inicial, que es justamente el primer… en el mapa, un punto fijo que corresponde a una órbita periódica y otro punto fijo que corresponde a una órbita periódica, a esta situación tan complicada donde existen infinitas órbitas periódicas como las que estuvimos discutiendo hasta ahora.

Nosotros no vamos a hacer, para el caso de la herradura, la discusión de todas estas bifurcaciones, pero lo que sí vamos a notar, es que en el caso límite de que ya hayan nacido todas estas órbitas particulares, esas órbitas si lo que les ocurre al espacio de fases es estirarse, doblarse, remapearse, quedan organizadas de una manera específica. Y lo que les comentaba alguna vez es lo siguiente, por ejemplo esta afirmación que hacíamos recién, discutimos que es lo que ocurre localmente con las variedades en la duplicación del período y marcábamos que la órbita del periodo dos se enroscaba alrededor de la órbita del periodo uno, de una de las órbitas del periodo uno y no alrededor de la otra. Cuando yo siga creando órbitas periódicas en el proceso por ejemplo, de crear estas infinitas órbitas periódicas que son rotaciones, o en el proceso final de generar todas las órbitas periódicas que aparecen en la herradura de Smale. Todas esas órbitas coexisten con las anteriores pero… es la propiedad de, por ejemplo, la órbita del periodo dos, que está enroscada alrededor de la órbita del periodo uno y no alrededor de la otra, cuando yo cambie los parámetros no va a poder cambiar. ¿Por qué? Porque mientras existan estas órbitas periódicas, mientras existan, nunca van a poder alterar sus propiedades topológicas. Nunca por ejemplo una órbita que está enganchada alrededor de otra, como ocurre con esta órbita del periodo dos. Fíjense que si yo terminara identificando este plano y este plano, yo tendría una primera órbita periódica y luego una segunda, que es lo que dividiría el borde de esta cinta de Moebius que tuviera esta órbita periódica alojada en el medio. Son dos órbitas que están enganchadas en el espacio de fases. Yo puedo deformarlas pero nunca desengancharlas.

Si yo muevo los parámetros de forma suave, podría ser que esta bifurcación se revierta y mueva a la órbita del periodo dos, podrá hacer que desaparezca, pero mientras exista la órbita del periodo dos, va a estar organizada alrededor de esa órbita de periodo uno de una manera que es invariante, porque cambiar esa propiedad, implicaría que en algún punto estas dos órbitas periódicas se tocaran y eso no puede ocurrir por la unicidad de las soluciones de estos campos vectores.

Entonces ¿por qué es tan importante el sistema de Smale que organiza todas estas infinitas órbitas periódicas? Por el hecho de que nos da una imagen de todo lo que pudo ocurrir en el sistema eventualmente, para que esto no… los parámetros, su organización topológica, es la organización topológica final que se mide en la herradura de Smale. Y eso es una asignatura de lo que le ocurre a este sistema por la manera en la que se llama p mas… Entonces, la herradura de Smale es interesante, no porque nos explique una situación que experimentalmente sea tan relevante. ¿Por qué? Porque de hecho, si un sistema se está mapeando sobre sí mismo de esta manera, yo nunca voy a ver una solución atractora que tenga un comportamiento como el de esas órbitas periódicas. ¿Por qué? Porque, son todas inestables. Fíjense que en la herradura de Smale, yo lo que tengo es que estiro y doy vuelta. Y este estiramiento implicaba primero, achicar en esta dirección y estirar en esta dirección, o sea que para cada punto del conjunto invariante, voy a tener una variedad estable, que es ésta que está acá y una variedad inestable en la dirección en la que estoy estirando. Por lo tanto, todas las órbitas periódicas que están ahí son de tipo ensilladura, son órbitas a las que me acerco eventualmente pero luego salgo despedido. Entonces ninguna es un atractor. Ninguna de las órbitas periódicas del conjunto invariante de la herradura de Smale es un atractor. A lo sumo, son cosas que cuando yo vaya evolucionado en el espacio de fases voy a ir esquivando, porque siempre voy a ser repelido en la dirección inestable. Sin embargo son importantes porque me dicen: en un sistema, tal que cambiando sus parámetros yo vaya a converger, a tener una parte de espacio de fases, se nuclea sobre sí misma como herradura, las órbitas periódicas que hayan nacido, van a tener las propiedades topológicas que tiene en este caso el límite que está acá. Y ésa es una de las maneras en las cuales, en estos sistemas complejos podemos validar el resultado…. Jacobo me preguntaba en una de estas clases, si ésta era la única manera de tener comportamientos raros. Está claro que esto es un comportamiento raro. ¿Por qué? Porque fíjense que yo lo que estoy haciendo es por un lado, generando una inestabilidad y después reinyectando al sistema sobre sí mismo, entonces al sistema lo estoy obligando a pasar por una zona por donde el sistema es inestable. ¿Está bien? Pero claro, la esencia de esa complejidad, ¿qué es? Que por un lado, yo genero esa inestabilidad y por otro lado, obligo al sistema a visitar esa inestabilidad una y otra vez. Entonces cualquier mecanismo que yo me imagine que genere una inestabilidad y después me obligue a visitarlo de nuevo, va a eventualmente tener comportamientos tan complejos como éste. En la práctica numérica que hicieron la otra semana, estudiaron el sistema de Lorenz, ¿no? Era uno de los sistemas.

Y el sistema de Lorenz no es un sistema de herradura. En el sistema de Lorenz se acuerdan que las simulaciones numéricas eran tales que ustedes iban por acá, después eventualmente terminaban en periodos, luego pasaban a otra banda por aquí, y así sucesivamente.

¿Qué era lo que estaba generando la complejidad que ustedes vieron numéricamente? La existencia de un punto de ensilladura, un punto de ensilladura, en el cual dependiendo de si ustedes estaban de este lado o de este lado, se iban para la derecha o la izquierda. O sea el mecanismo de generación de inestabilidades, lo pueden entender estrictamente con métodos lineales. Lo que me está generando la inestabilidad es algo que lo pueden entender solamente mirando la parte lineal. Ahora el sistema tiene unas linealidades que hacen que el sistema neces…, las condiciones que eventualmente se separan por acá sean coinyectadas. Entonces estoy obligando al sistema a pasar permanentemente por ese punto, donde tengo que tomar una decisión crucial, ¿me voy hacia la derecha o me voy hacia la izquierda? Entonces yo tengo una alternativa horrible, me voy a la derecha o me voy a la izquierda. Dependiendo de si estoy un poquitito por allá o un poquitito por allá. Y después tengo una linealidad que me obliga a pasar por ahí, como si fuera una cortadora de fiambre, ¿está bien? Entonces en el sistema permanentemente cualquier diferencia a las condiciones iniciales, hace que eventualmente yo termine teniendo que elegir si me voy a la derecha o si me voy a la izquierda. Ahora en este sistema no existe ningún tipo de dobleces, en el espacio de fases ustedes no habrán visto ningún tipo de doblez como el de la herradura.

De hecho si yo tuviera que hacer una caricatura de esto, si yo tuviera que hacer una caricatura de este sistema, lo que diría es que básicamente esto se mapea de la siguiente manera. Tengo la posibilidad de tener una órbita periódica, que será algo por aquí, una órbita periódica, que será algo por aquí, y lo que esté cerca va a estar mapeado o de este lado, o me voy al otro, que es lo que estoy tratando de dibujar de esta manera y para esta situación pasa lo mismo: o termina mapeado en torno a esa órbita periódica o eventualmente me voy al otro lado.

Pero es un sistema completamente simétrico, acá no existe un doblez como en el caso de la herradura. Entonces si yo hiciera el mismo ejercicio que hicimos con la herradura de Smale, en donde para caricaturizarla tuvimos que usar este dibujo.

Existe una zona en donde hay simplemente un estiramiento y una zona donde hay un estiramiento pero un doblez, ¿está bien? Esto es una caricatura del sistema de Smale. En el sistema de Smale fíjense cómo era el flujo.

En el sistema de Smale si yo veo esto resuelto en el tiempo lo que veo es que termino mapeando un cuadrado y no una herradura. Entonces tengo una banda horizontal que se mapeaba, ¿se acuerdan? en toda esta banda vertical que tengo acá. Entonces todo este conjunto de puntos termina mapeado en algo estirado pero sin ningún tipo de doblez. Y existía otra zona que se mapeaba en una cosa vertical que era lo que quedaba doblado. Eso es lo que estoy tratando de representar en esta caricatura. Entonces en este sistema, habíamos discutido, existía una órbita de periodo uno y una órbita de periodo dos que se enroscaba alrededor de una solución y no de otra. En el sistema de Lorenz, una órbita del periodo dos, no necesitará enroscarse alrededor de ninguna de estas órbitas periódicas. Es decir, los distintos mecanismos de generar soluciones complejas, generan órbitas que se organizan en el espacio de fases de manera diferente.

Entonces en la práctica de hoy van a hacer una suspensión de la herradura de Smale. En la práctica de hoy lo que van a hacer es mirar cómo se generan distintas órbitas periódicas en la herradura de Smale y cómo se organizan en espacio de fases. Pero otros mecanismos que generen soluciones complejas, van a tener organizaciones de órbitas periódicas distintas. Entonces ese es el único efecto que quiero transmitir ahora, el hecho de que para generar soluciones complejas necesitan una inestabilidad lineal y una reinyección y que el mecanismo de Smale es un mecanismo posible de generar inestabilidad y reinyección, que es a través de estirar y doblar. Pero que existen otros, por ejemplo el de Lorenz, que simplemente lo que hace es que estira y pegotea. Entonces mecanismos que generen inestabilidad, algo que genere una inestabilidad de tipo lineal, un estiramiento y una no linealidad que…. Esos son los ingredientes básicos. Y la consecuencia que, de vuelta, hoy lo van a ver en la práctica de Smale, es que todas las órbitas periódicas posibles se organizan de forma distinta según de qué manera ustedes generaron la solución compleja, el flujo complejo. Entonces esa historia viene a cuento de que lo que hoy quería hacer era discutir algunos ejemplos físicos o biológicos, distintos, de aplicación de este concepto. Quería darles un mapa de una variedad de ejemplos distintos que van a ver por su cuenta antes de pasar al pizarrón. Están en la fotocopiadora. Estos apuntes que es un librito, viejo, que escribió Nick Tufillaro y se llama An experimental… [Nick Tufillaro, "An experimental approach to non lineal dynamics and chaos."] Acá hay una serie de ejemplos discutidos, de experimentos que ustedes pueden hacer en alguno de estos Labo 4 o 5, no me acuerdo cómo se llaman, en los que ustedes tienen que proponer un experimento, llevarlo a cabo. Es Labo 5.

2. A1: Todos.

3. P: ¿Todos? Uno y dos no.

4. A1: No lineal depende del profesor, es 5 o 4 y 5.

5. P: Ah! OK. Acá hay una serie de casos discutidos, no los voy a hacer en detalle, se los voy a dejar para que lo fotocopien, déjenme contarles más o menos de que van nada más. Uno también lo va a explicar Mariano en el práctico de hoy, es el problema de Baus y… Es un problema súper sencillo. Es agarrar una pelotita, como si ustedes tuvieran una pelotita y quisieran moverla con una raqueta, lo único que en lugar de una raqueta, lo que utilizan es un batidor, ponen un pequeño vibrador.
Y lo que hacen es tirar una pelotita y la empiezan a sacudir, y la idea es que para algunos valores de los parámetros, los parámetros van a ser la frecuencia del forzante y la amplitud del forzante, se van a encontrar con que la pelotita tiene una dinámica periódica y para otros valores de la amplitud de frecuencia, lo que sucede es que la altura va variando de un golpe a otro, hasta que eventualmente es completamente irregular o caótica.
En la práctica de hoy, Mariano va a inducir o les va a explicar cómo se induce un mapa sobre eso. Es decir se pueden tomar variables que son significativas en este problema, por ejemplo, los tiempos entre rebotes y la velocidad de la pelotita, cuando ocurren esos golpes. Y ocurre que si ustedes hacen un mapa de este estilo, pueden ver que el sistema se mapea como una herradura de Smale. Como una herradura de Smale. Dependiendo de los parámetros, la… va a ser más violenta y… más complicada, dependiendo de los parámetros, hay zonas del espacio que se mapean sobre un pedacito de la herradura, el resto es muy sencillo. Pero es un ejemplo concreto de un sistema en donde naturalmente se escriben las cosas en términos de mapa. Otro ejemplo que está discutido en este libro, es el problema de tomar una cuerda tensa, entonces van a ver una pequeña variación de lo que ustedes vieron en física II, que vieron la ecuación de ondas para esto y en un punto dado tenían la ecuación de un oscilador. Básicamente. Lo único que, si ahora tienen en cuenta de que estas cuerdas en principio son no lineales, van a empezar por aparecer términos no lineales, por ejemplo el término cúbico, que sí vieron en física II y va a quedar un sistema que es un oscilador que es no lineal. Después lo que van a hacer es pasarle una corriente a ese cable y van a ponerle un campo magnético. Y van a forzar esa cuerda. Para distintos valores de la amplitud y la frecuencia, van a notar que el sistema en vez de seguir como un

oscilador lineal, reforzante, empieza a tener todos estos comportamientos complicados de tipo oscilador armónico. Bueno, nada, hay una serie de ejemplitos ahí que pueden hacer. Mi intención es contarles otro, otro ejemplo, que no es mecánico sino que es de tipo biofísico. Vamos a hablar de pajaritos. Cuando uno no prepara la clase, habla de lo que puede. Entonces hoy vamos a hablar de pajaritos.

Y lo que vamos a hacer es describir para estos pajaritos cómo se genera el canto. Y vamos a tratar de ver cómo lo vinculamos con estos comportamientos complicados que estuvimos estudiando hasta ahora.

Lo primero que les quiero contar es cómo hace el pajarito para generar sonido. Un pajarito para generar sonido utiliza un sistema, físico, muy parecido al que utilizamos los humanos cuando generamos sonidos voceados. ¿Qué es un sonido voceado? Es un sonido que ustedes perciben como una vibración cuando se tocan acá. Cuando dicen ssss, no sienten nada. Cuando ustedes dicen “aaaa”, sienten una vibración. Entonces, esos sonidos, los sonidos voceados, se producen cuando ustedes, hacen pasar aire entre las cuerdas vocales y las cuerdas vocales empiezan a sonar, a vibrar.

Entonces, un pajarito tiene acá un dispositivo muy parecido al que tenemos los humanos, lo único que en vez de tener un par de cuerdas vocales, tienen un par de labios en cada lado, entre los bronquios y la traquea.

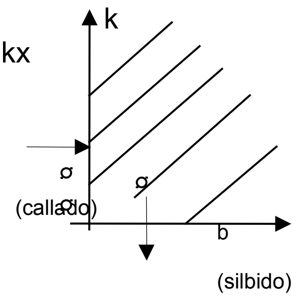
sea que los pájaros pueden cantar a dos voces. Pero lo que ocurre acá es tan parecido, tan parecido, pero tan parecido a un sonido voceado, que ustedes agarran un modelo para una vocal. Pero en vez de decir que la persona mide un metro ochenta, hacen así chiquitito, que mida 5 milímetros, la “a” suena como [silbido]. Es así. Hacen scaling de las ecuaciones y les ocurre eso. Entonces el pajarito cuando genera estos sonidos, estos silbidos, no está silbando, está generando vibración pero a frecuencias muy altas, algunas son muy chiquitas, unas son más altas y demás. Entonces, lo que ocurre en cada uno de estos lados, lo que ocurre en cada uno de estos lados, es que tienen este par de labios que cuando hacen pasar aire, se ponen a vibrar, ¿por qué se ponen a vibrar? Se ponen a vibrar porque se excitan dos modos de este sistema extenso, es un sistema extendido. Son láminas, son pequeños labios que están aquí y que tienen distintos modos de vibración. Se excitan dos modos, si estudian el problema como un continuo, se excitan dos modos, cuando entra el aire. Cuando ustedes soplan entre dos hojas, las hojas se ponen a vibrar. Estos dos modos son, uno de ellos, que los labios, se acerquen uno a otro, es el movimiento de…

Y el segundo modo, es simplemente el de extender una onda, en donde los labios se están moviendo así.

Entonces, cuando se combinan los dos modos, cuando se combinan los dos modos, lo que ocurre es lo siguiente, eventualmente ocurre que, cuando los labios se están alejando uno del otro, presentan un perfil convergente y cuando se acercan presentan un perfil divergente. Si eso ocurre, cuando los labios se están alejando uno del otro, el aire, entre los labios, tiene una presión muy parecida a la de los sacos aéreos, a la de los pulmones, que es más alta que la atmosférica. Entonces, hay una fuerza que empuja hacia fuera. Y cuando se acerca, la presión promedio es más parecida a la atmosférica, por lo tanto es una presión más baja. Eso es el resultado de una fuerza en dirección de la velocidad de los labios y eso determina una pequeña energía. Entonces si ustedes se fijan… la dinámica de un pequeño puntito que está por acá, por medio de los labios, pueden describir un sistema dinámico como los que estuvimos discutiendo hasta ahora. Entonces, qué quiere decir cada cuál.

$$\begin{cases} \dot{X} = y \\ \dot{Y} = -kx + b\gamma - x^2\gamma \end{cases} \qquad m\ddot{x} = -kx$$

oscilaciones



Es un sistema de dos ecuaciones de primer orden, porque esto viene de plantear las ecuaciones de Newton para los labios. Las ecuaciones de Newton son la masa por la aceleración igual a la suma de las fuerzas. Cuáles son las fuerzas. Bueno, la restitución elástica de los labios: -k por x, es ésta que está acá. Un término de saturación no lineal.

¿Qué quiere decir eso? Que la disipación es bajita, y en este término, si los x son pequeñitos, si yo estoy cerca del equilibrio, no pasa nada, pero si yo me voy muy cerca de los tubos que están conteniendo a los labios o me aproximo a los labios, disipo muchísima energía. Entonces este término es un término disipativo, porque acompaña a la velocidad, pero que va a ser importante solamente cuando los desplazamientos sean grandes, cuando los desplazamientos sean pequeñitos, x^2 es superchiquitito, y es despreciable. ¿Está bien? Este término es el término que da cuenta, por un lado de disipación lineal, pero por otro lado, es el término de transferencia de energía que estábamos discutiendo antes. Esa fuerza proporcional a la velocidad que depende de la presión. Yo hice un modelo fenomenológico para entender la dinámica de estos bichos. Entonces, si ahora hacemos el ejercicio de bifurcaciones correspondientes a la primera parte del curso y nos preguntamos por cuál es la dinámica de estos labios, podemos dibujar en el espacio de parámetros, de k y de t, dos de los puntos estacionarios, o sea las posiciones dónde son estables y dónde son inestables. Y esto es un ejercicio que ustedes pueden hacer, podría haber sido un ejercicio de parcial sobre sistemas dinámicos. Cuál es el punto de equilibrio en x igual a cero, y en y igual a cero.

Pueden analizar entonces cuál sería la estabilidad lineal de este problema, y linealizan esta matriz, que da cero, 1, menos k y b. Linealizan la matriz… y se fijan qué es lo que ocurre con las soluciones, cuando el módulo de autovalores es mayor que 1 y menor que 1. Y se encuentran con que existe una zona en donde el sistema tiene oscilaciones.

$$\begin{array}{c} (x, y) \\ DF = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & b \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Qué bifurcación ocurrió desde el punto de equilibrio a la zona donde oscila? Adivinen. ¿Qué bifurcación puede haber ocurrido?...

6. A2: Hoff

7. P: Hoff. ¿Quién la dijo?

8. A2: La biología.

9. P: Bien la Biología, bien la Biología! Varios motivos por los cuales vamos a sospechar que es una Hoff. Primero porque estoy diciendo que esto lo podía sacar de perturbar linealmente. Y hasta ahora lo único que vimos, para perder estabilidad… en la parte lineal, es la de Hoff. OK? Pero es cierto, si ustedes empiezan a aumentar esto, los autovalores complejos, pasan a tener… Entonces, si yo me meto por acá, los labios no oscilan. O sea que si yo estoy mandando poquito aire, los labios no oscilan. Pero si empiezo a mandar muchísima presión, los labios empiezan a oscilar, tal como si yo pusiera un par de hojas de papel, soplo un poquito, no pasa naranja, empiezo a soplar fuerte y esto empieza a oscilar. Y, por supuesto, claro yo podría haber hecho la cuenta, entonces, cómo es la parte imaginaria de estos autovalores. ¿Alguien se anima a pensar qué es lo que va a ocurrir si yo aumento acá? Hay dos maneras, una súper rápido para calcular autovalores, vamos a pensar un cachito en la física de esto.

10. A1: Sube la frecuencia de la voz.

11. P: Exactamente. Sube la frecuencia. Con una tensión muy alta. Exactamente, con una tensión muy alta, estas cosas están más rígidas y empiezan a oscilar más rápido. Pero de todas maneras, la intuición ayuda, pero si no están seguros, calculan los autovalores, digan cuál es la parte imaginaria de esto y estoy seguro que tiene que ir como… la refleja. Vamos a hacer las cuentas por las dudas. Menos lambda, calculamos el determinante, esto nos da, bueno no.

12. A: Directamente sin los términos no lineales, es un oscilador…

13. P: Esa es más fácil, esa es la que había que hacer. Yo me olvido de esto, lo que él dice, me olvido de la parte no lineal… y este es un oscilador armónico. Cuanto más grande sea el k, más grande la frecuencia. Eso es lo que había que haber contestado. Muy bien. Entonces, nos ponemos acá y el bicho está haciendo [silba]. Nos ponemos acá y el bicho está callado.

Ahora, si ustedes escuchan el pajarito, y miran la frecuencia en función del tiempo, no escuchan [silba], sino que escuchan [silba]. ¿Ven? Entonces, supongamos que escuchamos eso [silba de distintas maneras]… [Risas] Cómo hago para generar este oscilador.

14. A3: ¿Cómo? ¿Cómo?

15. P: ¿Cómo hago para generar este oscilador que está acá, con este mecanismo físico?

16. (Pasan varios segundos en silencio)

17. A4: Voy cambiando el tiempo…

18. P: … si voy cambiando en el tiempo. ¿Entonces?

19. A4: Voy aumentando k.

20. P: Exactamente. Te pones a oscilar. O sea, te metes acá dentro y va aumentando k.

21. A: (No se escucha)

22. P: Vos querés hacer eso, querés hacer esos sonidos, te mandas en este camino de espacio… Querés hacer este otro camino, te mandarás de otra manera. Y si ustedes graban un pájaro durante mucho rato, se dan cuenta de que para generar la diversidad de cantos, tiene que hacer un montón de trayectorias distintas. Entonces, lo que vamos a hacer ahora, es intentar hacer un modelo del sistema respiratorio de los pájaros para generar este tipo de trayectorias que nos permiten… Entonces, ahora vamos a abandonar esta parte, que es la parte física, donde utilizamos nada más que la primera parte de la materia, las bifurcaciones de Hoff y nos vamos a ir acá arriba. Donde el pájaro tiene un montón de neuronas. Esas neuronas van a estar tratando de controlar esos músculos que permitieron que los parámetros varíen en el tiempo. Y vamos a tratar de ver si podemos generar un modelito para eso.

23. A1: ¿Tenes idea cuál es el orden de magnitud distinta del número total de neuronas entre una persona y un pájaro?

24. P: No, no, lo único que tengo como dato es que cada uno de los pedacitos que vamos a tratar de modelar, cada uno de estos núcleos tienen del orden de 10.000, pero, por ejemplo, en el área de Broca no sé cuánto tienen.

25. A1: No, hay además no sé si también tiene que ver con la cantidad de conexiones por neurona.

26. P: La verdad es que no sé, la verdad es que no lo sé. Supongo que sería una cuenta que se podría, en realidad porque el tamaño de cada neurona…

27. A: (no se escucha)

28. P: ¿Cómo?

29. A1: … el volumen fijo de la neurona.

30. P: Claro, si el volumen cúbico… La verdad es que nunca lo hice. Nunca lo hice. Bueno. Vamos entonces a pasar de la primera parte de la materia a la segunda. [Borra el pizarrón] Porque vamos a mirar un sistema que tiene una dimensión más grande que… Lo que vamos a hacer es, primero, tratar de ver cómo generamos la presión.
Entonces, de vuelta, tenemos nuestro pajarito, todos los pájaros de

laboratorio son felices. … Y acá está… La primera cosa que el pájaro tiene que hacer es generar este patrón de presión que dependa del tiempo, para prender y apagar… aumentar la presión y disminuir la presión. ¿Cómo hace esto un pájaro? Lo hace activamente, para incrementar la presión tiene un músculo que va a contraer, va a contraer como fuelles que hacen pasar aire por lo pulmones que son rígidos, entonces son como una bolsitas donde hay un músculo que los contrae, entonces aumenta el volumen y disminuye la presión.

Y para disminuir la presión, tiene músculos que, activamente, agrandan el volumen y bajan la presión. Pero eso es normalmente lo que nosotros tenemos como respiraciones de tipo mecánicas. Entonces, ¿cómo hace eso? Bueno, acá, tiene unos núcleos, en la médula, que se encargan de mandar instrucciones a los músculos. En realidad, van a la columna y de la columna a unos músculos, unos músculos que controlan… la inspiración y unos músculos que controlan la expiración. Es decir, son conjuntos de neuronas, unos de los cuales controlan la inspiración, cuando están activados, se activan los músculos de la inspiración y otros que cuando están activados, le permiten al pájaro expirar. Por supuesto inspiración y expiración se inhiben mutuamente. O sea, la acción de uno inhibe la acción del otro. Y estos se están acoplando, están forzando a un sistema mecánico que es una bolsa de aire. La única parte de todo esto que es súper fácil para nosotros imaginarnos, es el modelado de la dinámica de la bolsa de aire.

La bolsa de aire es una bolsa mecánica, que… Tendrá cierta disipación. Tendrá cierta restitución. Y después va a tener un forzado que explícitamente depende de una función creciente de la actividad de los núcleos del conjunto de neuronas que expiren y que inspiren. Es decir, acá es una función… de la actividad del primer núcleo y de la actividad del segundo núcleo. Digamos que esta actividad es la variable de este núcleo y esta actividad es la variable de este núcleo. Qué quiere decir actividad. Esto también lo vimos al principio del curso, es tomar de todos estos disparos que están ocurriendo en estas neuronas, la actividad media. Una ventana. Entonces si las neuronas están disparando, ¿qué es lo que tengo que activar?

$$mx' + \beta x' + i\,x = i_1 - i_2$$

Una variable que tiene un valor importante, cercano a algún valor máximo, uno por ejemplo. Y si están apagadas, veo que va a cero. Entonces esto está hipercaricaturizado. Si algunas neuronas están disparando digo que está activo, se me va a uno. Si no está disparando, digo que está desactivo y se me va a cero. Y ese es uno de los modelos que utilizamos en las primeras clases para discutir las primeras bifurcaciones en sistemas dinámicos. Decíamos que, la dinámica de estos sistemas era… El caso de…

¿Se acuerdan de este modelito? …parámetros de activación. Y después tenía [ESCRIBE] Vamos a escribir. [ESCRIBE] Se acuerdan cómo era la dinámica de este problema. A ver, miren el espacio de esta ecuación diferencial. Decimos que tenemos una ecuación que… a las X, más una función sigmoidea de ro más c por x. ¿Se empiezan a acordar de esto? Bien. Esta es la función S(x), es cero o 1. ¿Está bien? Entonces, si el argumento de todo esto, era mayor que cero, esta función converge a uno y el x punto toma valores racionales que es x igual a S (x).

a. *

$$i_1' = - i_1 + S\,(\Gamma_1 + a_{i1} - b_{i2})$$
$$i_2' = - i_2 + S\,(\Gamma_2 + c_{i1} - d_{i2})$$

$$\dot{X} = -x +5\,(\rho + cx)$$

Se acuerdan de eso. Ahora cuando yo cambiaba la condición del punto fijo, entonces era que x, la recta x, era igual a S de lo que estuviera acá. Entonces, yo cuando cambiaba el ro, corría la posición de la sigmoidea y eventualmente apagaba las cosas, si la sigmoidea me quedaba acá o prendía las cosas si la sigmoidea se me corría a la izquierda. Se acuerdan de eso. Bueno este es el modelo trivial de actividades de núcleos neuronales. Si la suma de cosas que le llegan al núcleo, si la suma de cosas que le llegan a este conjunto de neuronas, excede determinado umbral, se prende. Y si no llega a superar ese umbral, se apaga. Entonces, el chiste en este modelo que yo tengo acá, es que los argumentos de estas funciones tienen que representar una arquitectura de cosas conocidas. Y el chiste entonces de esto, es este signo menos, que me dice que, de los inputs totales, por ejemplo de la dinámica de Newton, y los interviene tratando de callarlos, o sea i2 está tratando de inhibir. Entonces cuando éste se prende, esto resta y trata de apagar el sistema. Entonces, la información de que una inspira y otra expira, está dada en el hecho de que la contribución de i_2, en la ecuación de i_1, tiene un signo menos y que la contribución de i_1 en i_2, tiene un signo menos. O sea que este signo, está representando la inhibición mutua. Inhibición mutua. Preguntas hasta acá respecto del modelo. ¿Está bien? ¿Seguimos?

31. A5: ¿Cómo se mide esto?

32. P: Bueno, es todo un tema eso. Es todo un tema.

33. Ay: No es tan fácil. Es un conjunto de neuronas.

34. P: Es un conjunto de neuronas. Entonces, es un problema, porque la definición de esto es que es la actividad media. Vos tenes que evaluar los spites, si pudiera medir todos ellos, sumar la actividad, sumar alguna variable que me va a dar una determinada ventana. Y eso, no se puede hacer porque no se puede poner electrodos en todas las neuronas. Entonces, una cosa que podes aspirar y ahora Jacobo me va a corregir, es a meter un electrodo que no esté súper cerquita de una neurona, sino que capture la actividad eléctrica de un conjunto de neuronas y tener, de alguna manera, una intuición de lo que sería la actividad a través de sumar unas cuantas pocas. Entonces, es interesante, porque cuanto peor es tu medida, o sea cuando peor pones los electrodos…

35. A6: Es más global.

36. P: Es más global y es más cerca de estos modelos. Pero la gente en general trata de ir a otra cosa. Trata de meter electrodos dentro de una neurona particular y embocarle y quedarse quieto, cerca de esa neurona. Entonces, las mejores medidas son las menos adecuadas para este modelo y las peores medidas son las más adecuadas para este modelo. Sin embargo, yo estimo que no en mucho tiempo habrá técnicas dignas y que te permitan poner algún tipo de voltaje *sensitive ligth*. O sea un colorante sensible al voltaje, sí, pero que te permita medir al mismo tiempo con el pájaro en vivo. Algo así. No sé. Lo ideal sería poder poner, por ejemplo, uno de estos en un tomógrafo.

37. Ay: Sí, pero tenes que agregarle resonancia

38. P: También tenes problemas de escala, porque por ahora el problema de la resolución espacio temporal no te permite…

39. A6: …un resonador para tener una estructura… y esperar…

40. P: O sea que en este momento, todavía no se puede medir. Sin embargo, la resolución de estas cosas aumenta rápidamente, entonces en algún momento se podrá medir actividad fácil o más o menos fácil… Tampoco me imagino al pájaro cantando en el tomógrafo.

41. (Risas)

42. Ay: Además el pájaro tiene que estar quieto.

43. P: Tiene que estar quieto. Lo único que podes aspirar es a hacer una medición así, a través de local… Pero la pregunta es interesante además por otra cosa, porque… el problema de qué

medir en este problema. Porque vos decís bueno, describís un modelo, te matas con el modelo. Qué medís, estas variables no. Concedido, ahora también te desafío a que vayas a un láser y midas la... de población. Tampoco. Entonces, es un problema que nos pasa siempre en Física, que los modelos están escritos en términos de unas variables, de los cuales medir, fácil, alguna. Entonces el láser mide intensidad. Y en esto lo que me dice la función es que es una función del x. Una función del x. Entonces acá el chiste es medir lo que se pueda. Vamos a medir la presión. [Borra el pizarrón] La presión es una función del desplazamiento del volumen de esto. O sea, el desplazamiento respecto del volumen del equilibrio de los átomos. O sea, cuánto más grande sea la variable más baja es la presión. Cuánto más chiquita es la variable más alta la presión. Entonces, qué medir, la presión. [Escribe en el pizarrón: ¿QUÉ MEDIR? La presión, función de x] Es una función de x. Y este problema, lo único que le falta es, que hasta ahora respira pero no canta. ¿Cómo hace el pajarito para decidir que el ritmo respiratorio lo voy a cambiar, lo voy a cambiar para cantar?
La actividad de un Núcleo Encefálico, que se llama RA. Hay un conjunto de núcleos que activan estos que están aquí y cuando quiere cantar, empieza a mandar actividad. Y eso actúa como un forzado en las vías respiratorias. Entonces acá aparece, un forzado.

44. A4: No entendí.

45. P: Entonces esto lo que te está describiendo es la inspiración, expiración. Entonces vos con esto podrías estar explicando simplemente la respiración. Ahora cuando vos queres cantar, tenes que cargar este sistema. Y eso el pajarito lo hace activando un conjunto de neuronas, encefálicas, que cuando el pájaro canta se activa y empieza a disparar como ametralladora, disparos. El pajarito tiene un conjunto de núcleos acá, que cuando quiere disparar, empiezan a activarse. El más alto es lo que se llama el High Vocal Center. Se generan oscilaciones, nadie sabe cómo todavía. No se sabe si es químico, si es calcio,… que lo controlan. No se sabe. En algún momento se prenden oscilaciones y cuando esas oscilaciones se prenden, activan otro conjunto de neuronas.

46. A4: Entonces hay dos osciladores hasta ahora, el de la respiración y el del canto.

47. P: Claro. Entonces, el tema es que, cuando este oscilador empieza a mandar su información, su actividad a estos núcleos que están acá, el ritmo respiratorio se afecta, se afecta, para seguir este forzado.

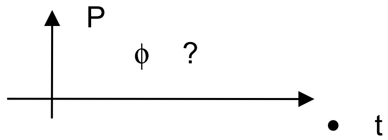
48. A4: Ah! No es directo… no es otra entrada a la bolsa, digamos.

49. P: No. Hay un punto ahora que lo mencionas, en el cual se acoplan la mecánica y la parte neuronal, que es la siguiente: la inspiración debe detenerse cuando el sistema está muy inflado. O sea, no solamente se detiene la inspiración cuando se activa la expiración, sino que además hay sensores, de… y de tensión, que te indica que vos estás demasiado inflado. Y tenes que cortarla con inspirar, porque si no reventas. Y eso es una función decreciente, del volumen. Bueno, ahora estamos en condiciones de medir, las predicciones del modelo.

50. A5: ¿La función de qué dijiste? Perdón.

51. P: Del desplazamiento de volumen. O sea, el x que te está midiendo el desplazamiento respecto del volumen de equilibrio.
Entonces si vos generas la variable presión y la medís en función del tiempo, este sistema tiene patrones muy particulares, este modelo tiene… muy particulares. Por ejemplo, si la frecuencia del forzante es muy alta, genera soluciones así chiquititas. Si la frecuencia es un poquito más baja del forzante, genera soluciones así. Si incrementas un poquito la frecuencia, obtenes patrones

aleatorios como estos.
¿Qué es lo interesante de esto? Y ahora volvemos al comienzo de la clase porque ya es hora de tomarnos un café. Uno puede tomar, o sea, lo que usamos para generar este modelo es lo que se llama frecuencia. Acá fuerzo con una frecuencia, acá fuerzo con otra y acá fuerzo con una tercera frecuencia. Lo interesante del modelo, es que ahora yo puedo utilizar estas técnicas que les decía hace un ratito, para después comprobarlas con el experimento.
Es decir, yo puedo tomar este segmento de órbitas, de verlas y generar una órbita periódica en el espacio de fases, tengo presente este pedazo de la presión. A este que está aquí. A este segmento que está aquí. Y la idea entonces es ésta. El sistema se está comportando de una manera muy compleja, pero, yo tengo una predicción específica sobre cómo se tienen que organizar en el espacio de fases los distintos segmentos de mi solución. Muy específica. El núcleo debería enroscarse, por ejemplo alrededor de esto.
Como les dije hoy que se enroscaba la solución del período 2 alrededor de la solución del período 1. Y entonces una solución del período 1 que se enroscará o no con la otra solución del período 1 y empieza a poner restricciones sobre lo que me predice el modelo, que tendré que chequear en el experimento. Este es un trabajo que hicimos juntos con Mariano, entonces yo voy a preferir que la descripción de si esto coincide o no coincide se la hagan en la práctica a Mariano. Pero es una predicción específica. Nosotros ahora soñamos que poder ir a este pajarito y ponerle una pequeña cánula, en los pulmones del saco aéreo, mandar la información a una maquinita que tenemos del trasductor de presión y mirar ese trasductor de presión, como varía el voltaje, cuando el pájaro está respirando mientras canta. O sea ustedes hacen esta pequeña intervención, al pájaro le ponen una hembra y se pone a cantar. Por más perforado que esté con la cánula, [Risas] el pájaro lo hace igual. Entonces, el problema es que ahora tenemos datos experimentales en función del tiempo.
Entonces el asunto es cómo se compara con el modelo. Y eso… Pero de esa manera es que se puede usar la dinámica, para tratar de obtener propiedades topológicas robustas de las soluciones, que constituye una predicción específica.



Y dejame que termine la idea antes de contestarte. Y esa es una de las cosas que yo quería transmitir en la clase de hoy. Una vez que uno se da cuenta de que un sistema no lineal puede tener comportamientos muy complicados, hay muchas cosas de todo lo que vieron hasta ahora, en la carrera, que tienen que dejar de lado, muchas. Por qué. Porque nosotros, o sea, la física construyó confianza en ella misma como disciplina, es su poder de predecir… Fue espectacular su éxito por el hecho de que el tipo dijo: Marte va a estar en el 2058 acá. Y está o va a estar ahí, espero. [Risas] Digamos, se dan cuenta, o sea el hecho de que pueda hacer predicciones específicas es lo que construyó confianza en la Física. Y lo que todo lo que estuvimos discutiendo hasta ahora sobre órbitas complejas, herraduras de Smale, mecanismos de inestabilidad, dicen… funciones muy complicadas. Y lo que dicen las simulaciones numéricas con las ecuaciones de Lorenz, ustedes cambian un poquito las condiciones iniciales y tienen una solución distinta. Entonces el gran desafío, en términos de la dinámica, es cómo construir observables que permitan refutar o validar modelos, en el paradigma de que tenemos que renunciar a la predicción específica del comportamiento del sistema físico. O sea, si yo voy a decir que un sistema es hipersensible a las condiciones iniciales, cómo voy a hacer para decir que le emboqué a un modelo físico, un modelo matemático al que le apliqué un experimento, si ya sé de entrada que, cambiando un poco las condiciones iniciales, voy a tener que el sistema no hace lo que estaba esperando. Y yo les conté la anécdota de Lorenz, Lorenz, el tema de la ecuación diferencial, integra dos veces, pero con un pequeño error… se va a tomar un café, vuelve y la solución es distinta. En un modelo mismo matemático, yo lo quiero probar dos veces. Le pifio en no acertarle en cómo está redondeando la máquina y yo tengo algo distinto. Entonces, imagínense ustedes, trabajando profesionalmente en un modelo donde aplicaron 200 millones de cosas y ahora se dan cuenta que no se pueden hacer predicciones. Cómo construir observables que permitan refutar o validar modelos, sin sacarnos de encima el paradigma de qué podemos predecir exactamente el comportamiento de lo que va a ocurrir. Y esto que les estoy mostrando hoy, es un ejercicio en esa dirección. De repensar no sólo topológicamente… y después ir a comprobarla con un experimento, es una estrategia posible.

52. A5: Ya contestaste la pregunta con una cosa… Quería anotar bien el papel de... Lo que planteaste vos es que queremos encontrar propiedades, digamos, topológicas del espacio, que las pueda contrastar después con experimentos.

53. P: Exactamente. Entonces hoy en la práctica van a tener una introducción a eso, a través de ver cómo se genera con un mecanismo dado, órbitas periódicas. Después discutiremos, que es un detalle, cómo hacemos para caracterizar topológicamente. Existe un montón de libros… muy parecidos de lo que ven en Física 3, en teoría de nudos… Pero describir estos modelos topológicos es más fácil que darse cuenta que la topología es la herramienta más poderosa para comparar modelos creados en sistemas no lineales a diferencia como discutíamos el otro día… Que son tan sensibles… Bueno, vamos a tomarnos un café y…

Recreo

54. P: Lo que quiero contarles ahora. Eh… Ya que la clase de hoy viene desorganizada, voy a terminar desorganizándola un poco más.

PROBLEMAS ABIERTOS DE LA DINÁMICA Sistemas extensos	Quisiera discutir problemas abiertos de la dinámica, motivado por este ejercicio particular. Hay un problema dentro de la dinámica, que surgió en la primera parte de la clase: sistemas extensos.

Por qué, digamos, eh, hicieron en el intervalo una mención bastante interesante sobre una neurona en el núcleo, tiene que conocer la forma de la neurona y si la información está en el núcleo, si está en el conjunto, si está globalmente expandida, si está… Si ustedes van a una conferencia de neurociencia y discuten con alguien, se van a encontrar con alguien que se especializa en canales, es experto en canales y piensa que el que no hace canales es un nabo que está mirando otro canal y que la cosa pasa por el canal que está mirando él. Es así. Y ustedes van a otro laboratorio y se estudia una neurona, a nivel de una neurona que, por supuesto que cumple un montón de canales, canal de agua, manejan distribuciones quizá distintas y máquinas que bombean, salen ganando… y mantienen determinado equilibrio, se pinchan y se estudia la dinámica actual de una neurona, se quiere conciliar evidentemente el oscilador armónico con el problema de la biología.
Después, van a hablar con I.S. que trabaja en sistemas... Como un rasti (como un Lego)… neuronas. Son 21 segmentos y 250 neuronas. Entonces, están conectadas, es muy difícil, porque están conectadas todas… qué se yo, medio kilo de neuronas muy interconectadas, es un problema muy difícil. Pero ustedes se pueden imaginar el que se pone 50 años a estudiar este problema, tiene que ser que en algún momento lo va a entender, llegará el momento en que va a entender el oscilador armónico en el sistema nervioso completo. Se trata de neurona, se trata de ver cómo se activan los problemitas con el... Es lo que se llama la escala de los sistemas. Después vienen a hablar con nosotros en el laboratorio y decimos no, miren, toda la bibliografía de ¿Carlos? se entiende con el tema de cuatro o cinco ecuaciones diferenciales ordinarias porque la posta está en mirar los núcleos. Y yo puedo dar con una persona que mire una neurona y nos escuchamos mutuamente, nos interesa, pero él se va pensando, este tipo no está entendiendo la posta que es entender lo que ocurre dentro de una neurona y yo me voy a quedar pensando, este tipo invierte 2 millones de dólares en mirar a una neurona y eso no sirve para nada. ¿Por qué ocurre esto en neurociencia? No es que nosotros no tengamos determinados problemas en física. Nosotros vamos a la física y nos preguntamos: ¿en qué trabajás vos? Y vos me decís: bueno, yo trabajo en computación cuántica, o y yo trabajo en, que sé yo, física molecular, estudio las moléculas y su organización y otro tipo me dice, yo trabajo en ciencias atmosféricas, nos quedamos tan tranquilos. ¿Por qué? ¿Por qué nos quedamos tranquilos? No es que nosotros pensemos que vamos a entender la atmósfera midiendo otra cosa que la presión y el volumen y temperatura. ¡No! Pero sabemos que de última, no hay una incompatibilidad entre lo que pasa a nivel molecular y el nivel global. Porque nos quedamos tranquilos con lo que Gibbs y Goldsman

hicieron en mecánica estadística. Entonces, vos estudiás el problema de un átomo, o de una molécula, yo estudio el problema de 10 a la 23 átomos y moléculas, y nos quedamos tan tranquilos, primero que no vamos a hacer la cuenta solos, jamás, pongamos, que si alguien quisiera pasar de la cuántica al mundo macroscópico, usamos la mecánica estadística, que es algo que tenemos más o menos resuelto. Entonces, el problema grande es que si nosotros nos planteamos lo mismo para sistemas no lineales donde la no linealidad sea algo realmente relevante, y nos preguntamos porqué lo que ocurre con un sistema de 10 a la 23 unidades no lineales, no existe la mecánica estadística para sistemas no lineales. Entonces, ese es uno de los problemas grandes que tiene el área. Cómo se estudian los sistemas extensos no lineales. ¿Cuál es la extensión del trabajo de Gibbs a sistemas no lineales? [Escribe en el pizarrón: ¿Cuál es la extensión del trabajo de Gibbs a sistemas no lineales?] Y esto no se ve en la facultad. ¿Cómo se pueden pensar pequeños proyectos para tratar de ver cómo se podría llegar a hacer esto? Bueno uno podría intentar pensar de manera inductiva.

Estudiar a…, donde para cada uno de estos sistemas ponemos sistemas no lineales como estuvimos estudiando hasta ahora y que estén conectados de maneras específicas. Y la idea es tratar de entender en qué condiciones se forman patrones de distintas características. ¿Existen condiciones de sincronización? ¿En qué condiciones?

¿Existen condiciones de sincronización? ¿En qué condiciones?

Entonces, ¿cuál es el status de este problema? Es un problema muy candente en la dinámica el problema de la sincronización. Uno tiene sistemas que eventualmente son no lineales, caóticos, ¿pueden sincronizarse? ¿En qué condiciones? ¿Qué tipos de acople? ¿Qué tipos de arquitecturas de conexiones dan lugar a movimientos sincrónicos? En eso existen, eh, digamos existe bastante trabajo, si les interesa el status de este tema, hay un colega nuestro, llamado ¿Esteban? Bacaletti que acaba de publicar Physics Report, digamos que Physics Report es un trabajo que resume la investigación en el área, más que más que por el trabajo en sí, seguramente muy interesante, es una revisión pequeña, lo que él hace es una revisión del problema de sincronización.

Bacaletti
Revisión del problema de sincronización.

Existe un interés bastante grande en vincular los problemas de condiciones de sincronización o de no sincronización, en función de la topología de conexión. La topología de la conexión. Este campo es un campo muy fértil en muchas disciplinas distintas. Una es el área de la neurociencia. Que es el que nos motivó hoy en este tema. Tenemos 10.000 neuronas, queremos discutir a nivel de una población.

Ahora, yo les conté que existían… ¿se acuerdan el problema de tener las dos variables, una gamma y una delta? Y teníamos, este, las neuclinas del problema y comentábamos en algún momento del curso, teníamos un valor estacionario y una dinámica que era de tipo excitable, como para modelar el problema de excitabilidad.

En condiciones iniciales iban, eran pequeñas perturbaciones de valor estacionario, volvían en forma lineal y perturbaban por encima de determinado umbral en función del espacio de las fases. Esto es a nivel de una neurona. Ahora, el paso de una neurona al problema de un montón, que cuando empezamos el curso identificamos cuáles, este problema, cómo se lleva un sistema… o un sistema… model, no es un problema que esté resuelto. Ni ése, ni ningún otro, en este campo. Y la pregunta es interesante porque no es la única manera, la sincronización, como para poder pasar de una unidad a un conjunto de unidades. Es decir, nosotros tenemos, vamos postulando en el modelo, tenemos en cuenta la actividad, podremos dar cuenta de los patrones de expresión de este pajarito. Ahora si ustedes se van a pinchar algunas neuronas particulares, no pasa exactamente lo mismo. O sea que el problema se puede seguir con una dinámica sencilla, aunque el sistema no esté completamente sincronizado. Entonces cómo se llega a ecuaciones de campo medio en la dinámica no lineal, es un problema abierto.

55. A3: ¿Por qué la dinámica estadística no aporta en este caso?

56. P: Porque, si vos lo mirás con atención, en todo lo que hiciste, en mecánica estadística, estuviste asumiendo que los sistemas eran lineales en todos lados. Si el sistema fuera a desplegar órbitas distintas o versiones distintas… es una hipótesis que no te permite llevar a cabo especulaciones intelectuales… O sea que no podés, o sea, el andamiaje de Gibbs se cae a pedazos si vos pensás que tenés un montón de órbitas distintas coexistiendo al lado. O sea, vos asumís que en todos lados que tenés… campos medios y demás, en todos lados… Y todo el andamiaje de la mecánica estadística se cae. Vos fijate que el problema es el siguiente, si vos querés… términos, tenes que podes probar que esos términos son chiquititos… y un sistema que pueda desplegar… un sistema… todas esas colitas del sistema que se van… osciladores… sistemas que eventualmente… se puede… para tratar de responder estas preguntas, pero con preguntas globales, son respuestas abiertas. [No se escucha con claridad la respuesta al alumno] Hay un montón de problemas interesantes, que están empezando a ser interesantes, porque existen muchos agentes interactuando y uno trata de entender la dinámica del sistema. Por ejemplo el problema epidemiológico, ¿no?, uno tiene el problema de un conjunto de una población infectada, susceptible y… Y uno puede escribir una ecuación diferencial muy sencilla para entender el problema epidemiológico. Y ahora pensamos cómo se expande una epidemia. Y, ya, es decir, uno tiene la función…, uno tiene una cantidad de infectados, voy a tener una cierta probabilidad de contagiar a los no infectados y sé que las infecciones se propagan o se propagaban en la Edad media, en la época de la peste negra. Ahora, uno se imagina qué ocurre ahora, con la gripe aviar y que se conecta todo el mundo con todo el mundo, y en pocas horas tengo un enfermo de China que viene a parar a Buenos Aires, qué tipo de dinámica emerge, cuáles son los tipos característicos. Eso ¿cómo se organiza un sistema?, ¿cómo se auto-organiza? Qué soluciones tiene un sistema que tiene una topología rara y los sistemas individuales que se acoplan, para formar un sistema extenso, es un problema abierto y en muchas disciplinas se estudia, por ejemplo, biología, economía. Para eso, este es un campo completamente virgen. Se pueden definir proyectos parciales pero en un campo completamente virgen. El segundo problema, que sería interesante destacar ahora cómo un problema abierto, que está también vinculado con el pajarito éste que estábamos…

¿Cómo caracterizar sistemas dinámicos de más de 3 dimensiones?	2) ¿Cómo caracterizar sistemas dinámicos de más de 3 dimensiones?

Ustedes vieron lo que me llama la atención a mí, ¿no? La debilidad de cada uno, de dimensión mayor que 3. Nosotros tuvimos una gran suerte cuando hicimos este trabajo en estos años con Mariano, que fue el haber mostrado el arte de proponer ecuaciones dinámicas muy sencillitas para el núcleo y que dieran.

Que prácticamente dieran, pero si hubiéramos pensado si teníamos todas las herramientas antes de empezar el trabajo, seguramente no lo hubiéramos empezado porque el sistema dinámico que teníamos, tiene una, dos, tres, cuatro, cinco dimensiones. Si nos animamos, y tiramos los términos..., digamos que tenemos un sistema de 4. Bueno. Pero definitivamente no es un sistema tridimensional.

i. $\ddot{x} + \beta \dot{x}' + \Gamma x = i_1 - i_2$

Dimensión 5 $I_1' =$

ϕ 4? $I_2' = \quad + A \cos \omega t$

Y cuando empezamos la clase y dijimos que en la práctica de hoy íbamos a empezar a estudiar la suspensión del sistema del Smale… las órbitas periódicas, el ejemplo que les mostré de cómo período dos… el período uno, dijimos cómo se enrosca una órbita alrededor de la otra. Cómo se linkea. Vamos a caracterizarlo topológicamente. Toda relación topológica de soluciones, está desarrollada para sistemas de dimensión 3.

Teoría de nudos. Linking H´s.

Teoría de nudos. Linking H´s.

Ahora, ¿qué pasa si yo tengo un sistema de dimensión 4? Miren que pregunta estúpida. ¿Cómo valido o refuto un sistema dinámico de dimensión 4 si lo tengo que comparar con el experimento? Este problema no es fácil, ¿OK? Este es un problema abierto. Qué ocurre con sistemas de dimensión 4 en adelante. El problema es completamente abierto ¿Cómo valido o refuto un sistema de dimensión mayor que tres?

57. A5: ¿Jorge?

58. P: Sí.

59. A5: El tema es, con 4, para sistemas más complejos… Para sistemas mayores que 3, se usaría lo mismo que… el mismo tipo de dinámica… no logran ver qué es… son otros modelos… modelos complejos o… Bueno, no importa!

60. P: No, dale, explicalo de nuevo.

61. A5: Para sistemas más complejos.

62. P: ¿Más complejos físicamente o de descripción matemática?

63. A5: No, tampoco, no sé, más dimensiones, pero… ¿viste lo que son las Small World y esas cosas? …. O porque directamente no hay nada ya, cuatro o cinco dimensiones es mucho. Y no hay problemas, no va a haber problemas. A lo que voy, problemas físicos? (no se escucha bien)

64. P: Si le das una vuelta más de rosca te la voy a entender. Suponete que tenés un problema de Small World. Para todos los demás, un problema de Small World es un problema donde yo tengo un montón de agentes. Imaginemos que acá tenemos, que en cada uno de éstos, hay una población de infectados, recuperados y susceptibles ¿no? Un problema epidemiológico, entonces armo un sistema dinámico que diga, la variación de los infectados, la variación de los recuperados, la variación de los sensibles, ¿cómo será? Entonces, ¿cómo debiera ser la cantidad de infectados?

$$\begin{array}{ll} \phi & \\ I & \\ \phi & \\ R & \\ \phi & \\ S & \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{I} = SI - bI \\ \dot{R} = \text{———} \\ \dot{S} = -SI + aS \end{array} \right.$$

Bueno, la cantidad de infectados dependerá de cuál es la probabilidad de contacto entre un tipo infectado con un tipo que está susceptible, este, un término no lineal que será el producto de esto. Y después la cantidad de infectados también disminuirá por los infectados que eventualmente se mueren.

65. A: [No se escucha]

66. [Risas]

67. P: Los susceptibles, este, claro cada vez que se infectan, bajan en la misma cantidad. Los susceptibles digamos que, nada,…

68. A6: Hay que borrarlos. [Risas]

69. P: Estaba pensando, entonces este es un sistema de dimensión dos. Y luego me pregunto qué es lo que ocurre si estamos todos sanos y de repente un tipo se enferma. Entonces, lo que les decía antes, si, el único contacto que existe entre éstos y los vecinos, yo lo que puedo decir es que, eh, yo lo que puedo decir acá es que si este tipo se enferma, la probabilidad de que éste se enferme, la probabilidad… es un tipo de solución de una onda viajera. Ahora, qué es el Small World que decía Mariano, el Small World es decir que además tengo la posibilidad de que este tipo y este tipo eventualmente se contacten, por ejemplo porque existe cierta probabilidad de que yo haga un viaje, entonces, altero la topología de la conexión muy poquitito, pero puede haber cambios dramáticos. De hecho, hay soluciones de mi problema que no existen y cuando yo expongo estas soluciones, existen. Por ejemplo que toda la población esté oscilando en una pandemia. Bueno, entonces, eso es un Small World. Tengo un conjunto con ene dimensiones para cada punto. Y ahora sí, tu pregunta.

70. A5: Yo lo que decía. Esto es mecánica estadística de, un sistema de muchas dimensiones, la forma… en el medio por qué no…?

71. P: Es por lo que te decía yo antes.

72. A5: ¿Porque no hay las herramientas todavía o porque los problemas que van a ser en 4, en 6 dimensiones van a ser…?

73. P: Porque no están las herramientas. Porque no están las herramientas.

74. A5: Ah! Porque no están las herramientas. Cuando se desarrollen van a empezar a aparecer y la gente…

75. P: Yo creo que sí. Este es un problema que tenés, de 2 dimensiones, para cada una de estas unidades y tenés ene unidades. El problema 2ene dimensional desde el punto de vista de la teoría de ecuaciones diferenciales. Entonces, la pregunta es porqué la gente se va a hacer medidas de tipo estadístico sobre eso. Y es cierto, se hacen medidas de tipo estadístico pero de vuelta, yo quiero insistir sobre este punto, se toman observables estadísticos pero no se hace la mecánica estadística. Y esa es la diferencia por la cual a mí me resulta un problema abierto. Ustedes mencionan la mecánica estadística sobre esto y alguien me dijera yo tengo este modelo individual, después usted toma una función de partición, después calcula entonces la ecuación media y demás, entonces puede haber una herramienta, predecir la dinámica de un punto, que es lo que ocurre en todos lados, no sería un problema abierto. Si fuera… de la mecánica estadística. Pero no existe nada de eso. No existe nada que a vos te permita entender cuál es la dinámica de uno de estos conjuntos, operatoriamente cómo llevar a cabo mediciones de variables promedio. Entonces, como eso no existe, lo que se hace es copiar el tipo de observable de la mecánica estadística, pero se trabaja en forma numérica ciega. Entonces vos agarrás, te simulás lo que querés probar, te pongo conexiones acá, te pongo conexiones acá, hago la cuenta numéricamente y lo disfrazo de los resultados de la mecánica estadística. Entonces, eso es lo que para mí hace que este problema sea un problema abierto. Que no existe una operatoria tal que el conocimiento de la dinámica de alguno de estos lugares, te permita estudiar qué es lo que va a ocurrir. Entonces, se mete en la caja negra de la máquina, se simulan los resultados y después se lo disfraza del gusto de los resultados de la mecánica estadística. Entonces vos te preguntás cuál es la alternativa para estos sistemas dinámicos. Vamos a sistemas dinámicos. Tenemos uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, tenemos seis por dos, doce, un sistema en un espacio de fase de dimensión doce. Y te lo estudia Magoya. O sea, doce, no sabemos cómo diferenciar nada. Ni las reglas periódicas, ni las variables estables, ni las variables inestables, ni qué tipos de comportamiento cualitativamente distintos podes tener. En sistemas de dimensión cuatro, o sea mapas de 3 en 3, vos sabes cuales son los siguientes flujos que habría que estudiar, por ejemplo, el K, ¿no es cierto? es un mapa que hago un doblez dentro de sí mismo. A pesar de que no podés embeber en un mapa bidimensional, lo podés embeber en tres. ... Hay pistas de cómo avanzar para tres. Pero después no tenés herramientas como para validar por ejemplo los experimentos. O sea cómo se hace con un sistema que realmente utiliza las cuatro dimensiones para comprobarlo como experimento, y no sabemos. Tan poquito podemos avanzar. Ese también es un campo completamente abierto. También se pueden hacer proyectos específicos, se pueden hacer flujos de… y tratar de estudiarlos y tratar de estudiar sus bifurcaciones, tratar de hacer... Pero para problemas de dimensión 4, a nosotros, los científicos naturales, de última, lo que decía del problema de cómo validar o refutar el experimento, nadie lo sabe.
Bueno, y otro problema, un tercer problema. Acá lo que dijimos es que los sistemas extensos, o sea por la inexistencia de una mecánica estadística, no podemos validar o refutar problemas de dimensión mayor que tres y el tercer problema es un problema interesante aunque creo que puede llegar a ser más fácil es, acá lo que sabemos es que si tenemos un sistema dinámico no lineal puede tener comportamiento complicado, pero si me dan un sistema complicado, ¿cómo escribir el modelo? Se dan cuenta cuál es la pregunta. Ahora me reconcilio con la idea de que un sistema simple puede tener soluciones complicadas. Ustedes lo vieron en la práctica numérica, las soluciones complicadas. Ahora, dada una solución complicada, a lo mejor la regla es simple. ¿Cómo saco el modelo?

76. A5: A partir de… puedo sacar el modelo.

77. P: Exactamente. Y, este también es un problema de hoy, es decir, dada… compleja, dados datos complejos. Para algún conjunto de ecuaciones diferenciales, para alguna familia de ecuaciones diferenciales, esto se puede hacer. Si ustedes tienen un sistema como, el de Rosler no lo vimos creo todavía, ¿no?

78. A4: No.

79. P: ¿A ver si acá está?

80. (Se establece un diálogo con el Ay que no se entiende).

81. P: Si uno tiene el sistema de Rosler, que es un sistema de dimensión tres, voy a decir dos palabras sobre el sistema de Rosler.

El sistema de Rosler es un sistema que extiende a tres dimensiones lo que hicimos con xxx, se acuerdan que nosotros con lo de xxx lo que hicimos fue que decir que xxx equis e y, teníamos una xxx de este estilo, después lo que afirmábamos era que la dinámica era que xxx la pirámide xxx, ¿se acuerdan? Bueno, el sistema de Rosler es un sistema muy parecido, que lo que tiene es, en vez de una curva unidimensional xxx, lo que tiene es una especia de sábana doblada en el espacio de fases de tres dimensiones, zeta, equis e y. Entonces, está metido de manera tal que cuando está sobre esta variedad de abajo, hay un punto estacionario que es repulsor. Entonces, el sistema… sube, a la variedad atractora que es bidimensional y la dinámica cuando el valor de zeta es grande, es tal que puede bajar. Entonces el sistema lo que hace es dar vueltas en…, dar vueltas y por lo tanto genera soluciones muy complicadas. Bueno, si ustedes tienen esto que viene a ser efe uno, equis y zeta, efe dos, equis y zeta, efe tres, equis y zeta, uno puede intentar hacer lo siguiente: uno puede definir una nueva variable, llamémosla y, a partir de equis punto.

$$\dot{X} = f_1 (x, y, z) = \tilde{Y} \qquad \dot{X} = \tilde{Y}$$

$$\dot{Y} = f_2 (x, y, z) \qquad \dot{\tilde{Y}} = \check{Z}$$

$$\dot{Z} = f_3 (x, y, z) \qquad \dot{\check{Z}} = g(x, \tilde{y}, \check{z})$$

Después definir, entonces yo digo que equis punto lo voy a llamar y, después digo que llamaré zeta a la derivada de y, y cuando tenga que calcular zeta punto, lo que haré es remplazar los efe uno, efe dos y efe tres y obtendré una cierta función, ge, de equis, y grande y zeta. Entonces, qué ventaja tiene haber escrito el sistema, esto lo pueden hacer algebraicamente, esto lo pueden hacer, en algunos sistemas de ecuaciones. La ventaja que tiene este sistema es que… que ustedes están midiendo, la variedad temporal, la segunda variable, se la calcula tomando la derivada. Esta, toma la derivada dos veces. Y esta es una función que se puede ajustar.

82. A2: ¿No es un poco general? Digamos.

83. P: Ese es el problema.

84. (Se establece un diálogo que no es audible)

85. P: Bueno, exactamente, entonces existe toda una familia de problemas que se pueden llevar a ésta y una enorme familia de problemas que... Entonces, si el problema es justamente la... Entonces en algunos casos se puede hacer y en otros casos no. Como problema general está abierto. … que se puede hacer, ajustar esta función es súper difícil. Y hacerlo por parámetros que hay que la solución que vos usas, que por construcción va a ser una solución del sistema, además estable, yo eso no lo vi resuelto. Entonces, esto es una estrategia posible que tiene una cota… cuánta distancia puede llevar esta fórmula. De hecho la simetría de este sistema standard hace que… Lorenz puede demostrar que no se puede hacer. Entonces, sabemos que si tenemos reglas

sencillas, el comportamiento es complejo. Ahora si tenemos comportamiento complejo, en una u otra dimensión, ¿cómo se puede mover esto? no se puede. Como ustedes verán, son preguntas súper básicas. O sea que el tema, es un tema muy abierto. Lo cual no quiere decir que sea muy fácil. Pero bueno, esto es lo que hay. Ahí es donde estamos. Entonces, en función del problema del pajarito, ¿qué hicimos nosotros para construir el modelo éste? Fenomenología pura y lápiz. Es decir, apostemos a que con la dinámica global de núcleos va a andar. Pero no existe ninguna manera de justificar estos modelos que utilizamos nosotros, a partir de un promediado de soluciones que... Esto es porque nos falta la mecánica estadística para sistemas no lineales. Hay que ir a la fenomenología y apostar a que uno está mirando donde está el error. ¿Por qué pudimos validar o refutar este sistema? Porque tuvimos suerte. Porque la dinámica de este sistema colapsa en dimensión baja. Porque el hecho de que sea de muchas dimensiones no quiere decir que el atractor necesariamente las explore todas. Pero tuvimos suerte. Va dimensión baja. Entonces podemos construir todas estas... y comparar con experimento y la cosa da. Pero si no, ni nos podríamos haber animado. ¿Y cómo extraer el modelo? No podemos hacerlo a partir de los datos experimentales y construir un modelo como para validar o refutar esto que está ahí. No existen modelos para reconstruirlo a partir de la señal temporal de otros modelos. Hay que construirlos fenomenológicamente a través de intuición, de arquitectura y conexiones... Estos son los problemas que, no solamente se trabajan en dinámica, trabajando en cualquier campo, seguramente se van a encontrar. Bueno, les prometo que la clase que viene es más normal. Vamos a ver entonces el método de Wiggins para demostrar la existencia de valor… en flujos corticulares y bueno, después veremos.

CASO 4. PROFESOR B

[Escribe en el pizarrón: MUY BUENAS NOTICIAS: ¡última clase!]

1. P: Bueno, la clase de hoy entonces va a estar, la vamos a separar en dos partes, el ánimo de la clase va a ser un poco un repaso y un mapa global de lo que se sabe, lo que no se sabe en dinámica y en qué áreas hay mucha actividad. Es decir, voy a retomar el cuadro con el que comencé el curso, el cuadro de separar las cosas en sistemas lineales, no lineales, dimensión baja, dimensión alta. Lo que vamos a hacer es un repaso de las cosas que vimos, las cosas importantes para el final y las cosas donde, creo yo, hay mucho por hacer. Esa es la 2º parte de la clase. La primera es un poco distinta de las anteriores, porque lo que quiero hacer es dejarles un ejercicio en serio de alternativa al final. Un ejercicio tal que si lo resuelven y muestran el resultado, ni siquiera les pregunto como lo obtuvieron. Resuelven el ejercicio, me dan el resultado y se van con un 10 a sus casas sin más preguntas. Pero este ejercicio requiere un poquito de introducción. Y el tema es el de la formación de estructuras, que es por eso que tienes estos caracoles acá y todos estos bultos.

2. A1: ¿Teorema o tema?

3. P: ¿Cómo?

4. A1: ¿Teorema o tema?

5. P: Tema, tema…. Hay un dicho que dice que a los 20 tenes que ser matemático, a los 30 tenes que ser físico y a los 40 tenes que ser biólogo. Yo trabajo en biología ahora. Entonces, nada, yo ya me olvidé de todos los teoremas. No me acuerdo de ninguno.
   El tema es formación de estructuras. Y quisiera introducirlo a través de un ejemplo particular, que es el problema de embriología. El problema de embriología, del cual yo no sé nada, la verdad es que no sé nada.

   FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS ESPACIALES.

   EMBRIOLOGÍA

   Como pregunta científica es súper interesante porque uno lo que obtiene es, que con la fertilización comienza un proceso de división celular y se obtiene una pelota de células. Que contiene esa masa homogénea. Le sigue una diferenciación. Esa diferenciación da a lugar a estos organismos tan complejos como uno, estrellitas de mar, los pulpitos, en fin. Entonces una pregunta muy interesante es cómo empieza a surgir toda esa estructura a partir de una masa de células no diferenciadas.
   Entonces tenemos un primer proceso de fertilización, proceso de división celular y después la diferenciación. Y la diferenciación, es un proceso de diferenciación posicional, es decir cosas que están en lugares distintos,

   FERTILIZACIÓN
   DIVISIÓN CELULAR
   DIFERENCIACIÓN

   se transforman en cosas distintas, en los lugares en que están, aparecen cartílagos, aparece tejido… Y existen varias teorías que compiten, en este momento respecto de cómo es el proceso éste de diferenciación posicional. Teorías muy distintas que compiten. Este proceso de diferenciación posicional…

   DIFERENCIACIÓN POSICIONAL

   Una de las teorías más sencillas consiste en que las células tienen la capacidad de activar genes que son los que van a llevar a cabo esta diferenciación, en base a la lectura de la concentración de una sustancia, un químico, que vamos a llamar morfógeno. Y por lo tanto, sería un proceso como esclavizado a este proceso químico ontogénico, es decir del morfógeno. O sea que uno tendría una estructura, empieza a aparecer un patrón de este morfógeno, y después las células van leyendo la concentración y empiezan a activar distintos tipos de genes. Es una teoría muy sencilla, que está siendo superada y hay gente que empieza a agregar los problemas dinámicos involucrados en reacciones bioquímicas, etc.

Bueno, estamos hablando de conjeturas acá. Pero básicamente consiste en que hay patrones espaciales, de estos morfógenos, que son leídos y dan lugar a un proceso de esclavamente

i. diferenciación

ii. ↑

DIFERENCIACIÓN POSICIONAL → patrones espaciales → activación de genes

ii. Morfógenos

estos procesos espaciales, activación de genes. Que de última son responsables de la diferenciación. Y esto no es una clase de embriología ni de morfogénesis, por lo tanto no me siento contenido que sea éste el fundamento de la teoría dominante, coexiste con otras. Pero históricamente es muy importante porque es la que trabajó Turing con el problema de cómo se generan patrones en los sistemas extensos. Entonces el problema es que acá, en la formación de la patrones espaciales. Turing dijo: acá hay una cuestión muy interesante: cómo se forman los patrones. Cómo se forman los patrones espaciales.

Entonces lo que este hombre sugirió, lo que Turing sugirió, es que en general, para formar patrones espaciales, hacen falta dos componentes: uno el activador, y otro que llamó inhibidor. Y compiten entre sí.

$$\text{Turing}\begin{cases}\text{Activador}\\ \text{b. Inhibidor}\end{cases}$$

El activador entonces, de alguna manera, tiene un efecto autocatalítico, o sea la presencia de este activador, activa, genera, induce más activador. Y al mismo tiempo enciende al inhibidor que lo controla. Pero este tipo se dio cuenta que, para que existieran estructuras espaciales, además había que probar una restricción sobre cómo interactuaban en el espacio. Entonces dio un ejemplo que es muy simpático, que es el siguiente:

Si yo tengo un campo seco, un campo seco, tengo un montón de saltamontes, transpiran muchísimo, cuando hace calor. Entonces lo que Turing planteaba era lo siguiente, si yo enciendo un fuego, en principio podría pensar que si el campo está seco, el fuego éste empieza a expandirse por todos lados quemando toda la superficie seca.

Dibujo

Pero lo que el tipo éste dice es: bueno, si yo tengo creciendo un fuego, los saltamontes pueden escapar razonablemente rápido y la presencia de este fuego y de este calor adicional, hace que en una población muy grande de estos saltamontes, haya mucha transpiración, se humedezca el campo y entonces el problema es que el fuego, una vez que crece después de cierto valor, se encuentra con pasto humedecido y ese pasto humedecido frena el establecimiento del fuego, por lo tanto, se forma un patrón, un patrón localizado, porque lo que lo inhibe, se activa en todos lados y se desplaza mucho más rápido que el activador. Entonces le saca ventaja, inhibe y por lo tanto, frena el desparramamiento, el desparramo este del fuego. Entonces lo que plantea, este señor, es que si nosotros queremos escribir ecuaciones que describan este fenómeno, vamos a tener que dar cuenta de la variación de la activación que vamos a escribir con una variable "a" en función del tiempo, a través de una cierta función que involucra la variable activador e inhibidor. Tener en cuenta los fenómenos de difusión de esa variable. Y para el inhibidor, hay una función, la difusión de esa variable. Y lo que él planteaba…

бA/бt = F (A, B) + Da D^2_A

a. (cte.) número

бB/бt = G (A, B) + Db D^2_B

b. número

6. A2: ¿Cómo sería la...?

7. P: Vos acá lo que tenes es que la derivada del activador de la función del tiempo, es una función del activador y del inhibidor. Seguramente en la función del inhibidor acá va a haber un signo menos que haga que esto deje de crecer y además tenes la posibilidad de que al principio si está solito, de que el activador se desparrame.

8. A2: Sí.

9. P: ¿No es cierto? Para el inhibidor te da lo mismo.

10. A2: Pero eso qué es, ¿un laplaciano…?

11. P: Ah! Perdón. Entonces lo que él plantea es que tiene que existir cierta relación entre A y B para que se forme la estructura. ¿Qué tipo de campos vectores podría dar cuenta de un fenómeno como el que estábamos describiendo recién?

Bueno había un señor que trabajó mucho en embriología, dicho sea de paso se llamaba Meinhart, escribió definiciones numerológicas con esta función, entonces para funciones de tipo A y B, para funciones tipo F, perdón, planteaba cosas de este estilo. Y vayamos a ver qué es lo que quiere decir esto. Tenemos algún valor que da cuenta del incremento del activador, que es esto que está acá. Algún efecto por degradación de ese activador, esto es una degradación lineal.

Meinhart

a. degradación autocatalítico

$$F(A, B) = k_1 - Ak_2 + k_3 A^2 \;/\; B$$

i. inhibidor

$$G\,(A, B) = k_4 A^4 - k_5 B$$

Degradador

Este término, es el término no lineal, interesante para la interacción que da cuenta del final no autocatalítico o sea la presencia de A induce +A o sea que lo importante sea el cuadrado es importante, es un término autocatalítico. Y éste es el efecto del inhibidor que yo lo puse en el denominador de esta expresión, para dar cuenta de que cuando se incremente mucho el inhibidor, entonces este término se hace más chiquitito. Para el actival, para el inhibidor tenemos un término de degradación, que es sencillo que es del método lineal, esto es una degradación y acá lo que tenemos es un término en donde la presencia del activador induce un crecimiento del inhibidor, o sea que el activador tiene la capacidad de ser autocatalítico a través de este término A^2, y tiene la capacidad a través de este A^2, de inducir el crecimiento de la inhibición. Y de hecho, se tomó el trabajo de hacer, lo primero que teníamos que hacer que era dimensionalizar las ecuaciones, este sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mu_t = \delta\,(a - b.\mu + \mu^2/v) + 1.\nabla^2.\,u$$
$$v_t = \delta\,(\mu^2 - v) + d.\,\nabla^2.v$$

Todos los términos funcionalmente están: μ^2, v, μ^2/v, etc., lo único que hay unas constantes en particular, para las partes espaciales probamos con un coeficiente uno a lo largo del laplaciano y un coeficiente que da cuenta si tiene que ser mayor o menor, de cuál es la velocidad relativa, espacial del desplazamiento del inhibidor respecto del activador. Esto no tiene ningún secreto, se hace como lo hacíamos en el curso, proponiendo para los reales a, una constante por u, b, la constante, por u, el tiempo igual a una constante por el tiempo, etc. Esto nos va a sacar de encima a todos los coeficientes posibles… de los signos. Entonces si uno tuviera que representar estas ecuaciones, desde el punto de vista conceptual, estas ecuaciones conceptualmente las podemos escribir de la siguiente manera.

Tener un activador, un inhibidor, tener que el activador está tratando de incrementar el inhibidor, el inhibidor está tratando de incrementar al activador, el activador está tratando de activarse a sí mismo. Acá ponemos una conexión a la tierra… degradación. Acá hay una degradación, que es el término menos d por b. Y después, voy a representar términos de difusión espacial, y les voy a poner un tamaño distinto, para dar cuenta de que vamos a suponer que el inhibidor puede tener un

Dibujo

alcance más duradero que el activador.
¿Por qué les hago esta caricatura? Porque yo no pienso pasar ni 5 minutos convenciéndolos de que éste es el mejor modelo fenomenológico para esto. ¿Por qué 1/b, por qué no ponemos – b, $-b^2$ $-b^3$? Bueno, de eso en parte va a ser el ejercicio, pero conceptualmente lo que quiero es que quede en claro es que ninguna de estas funciones es especial. Lo que estamos tratando de caricaturizar es esto, y esto lo caricaturizaría en la medida en que t sea mayor que 1. Entonces la difusión es más importante para el inhibidor que para el excitador.
Entonces lo que decía antes, lo que esto está tratando de representar, esto de hecho representa, es un activador que localmente pierde estabilidad, acá estoy dibujando el espacio x, y acá estoy representando al A, hoy no traje colores,…y el b. Cuando el A empieza a crecer, el b empieza a crecer. Pero como el b se desparrama más rápido, no le alcanza… este tipo, entonces salgo totalmente de donde ya no me quedo más nada de activador, ni inhibidor.

Dibujo

En esta zona lo que tenemos es que el inhibidor por efectos inducidos, aunque no haya crecido tanto como el activador cuando perdió estabilidad, logra vencer al inhibidor y por lo tanto, se forma para el activador, un patrón localizado. Entonces, la idea conceptual de este hombre, que para lograr la localización del A. La localización del A. Lo que es importante es activar a un b con una constante de difusión espacial muy grande.
Imagínense ahora que tratamos de esbozar alguna idea de cómo podemos entonces atacar, dentro de este paradigma de análisis, el problema de la división celular de un conjunto de hormonas, de un conjunto de células, perdón. Inicialmente, vamos a tener una bolita llena de estas células que están completamente indiferenciadas y lo que nos proponemos es tratar de encontrar los patrones, del A y del B, de este morfógeno que va a inducir la diferenciación celular.

Dibujo

En esta simetría, si nosotros partimos de una simetría esférica, lo que tenemos que hacer, es lo que hacíamos cuando estudiábamos la ecuación del morfógeno. Primero estudiar cuáles son los modos lineales y tratar de ver los modos lineales cuando empiezan a competir entre sí. Entonces de esta ecuación separamos la parte lineal de la no lineal.
Escribimos entonces algo así como la derivada de A respecto del tiempo, igual a la parte lineal de F más… Y la derivada de B respecto del tiempo, igual a la parte linealizada de G más una constante de difusión del B, el laplaciano de b.

$$dA / dt = LF + D_a . \Delta^2 .A$$

$$dB / dt = LG + D_b . \Delta^2 .B$$

Y tendríamos que resolver este problema. ¿Cuáles son los modos naturales para atacar este problema? Es una pregunta a ustedes.

12. A3: ¿Cuáles son los…?

13. P: Los modos naturales para atacar a este problema. Yo tengo un laplaciano y tengo simetría esférica.

14. A1: Pasar a esféricas.

15. P: Pasar a esféricas. ¿Cuáles son los autovectores del laplaciano? En esféricas.

16. A1: Los armónicos.

17. P: Los armónicos esféricos. Entonces agarramos los armónicos esféricos y proponemos entonces, bueno, que tomen nuestras variables normalizadas.
Hacemos una expansión en términos de q de l y l m. Multiplicado por cada una de estas cosas. E a la lambda e

$$\mu = \Sigma \, \mu_{em} \, Y_{em} \; (\theta, \phi) \, e^{\lambda et}$$

$$v = \Sigma \, v_{em} \, Y_{em} \; (\theta, \phi) \, e^{\lambda et}$$

por t. Me da que es igual a la sumatoria de coeficientes lm por Y lm por tita, pi, por e a la lambda e por t. ($\Sigma\ \mu_{lm}.\ Y_{lm}$ (θ, φ).$e^{\lambda et}$). ¿Por qué lambda l? ¿Por qué lambda l?

$\nabla^2 Y_{em} = l\ (l,\ h)\ Y_{em}$

Cómo eran los autovalores de los armónicos esféricos cuando sacábamos el laplaciano. De eso nos tenemos que acordar porque eso yo lo he dado…. En esféricas. Los autoestados del laplaciano ¿cómo eran? ¿Cómo eran los autovalores de los armónicos esféricos?

18. A3: l.

19. P: Eso, l por l más 1. Entonces depende del l, los autoestados van a depender del l. Si yo hago un reemplazo acá, los autovalores van a depender solamente del l. Entonces cada vez que pierden estabilidad, van a perder estabilidad todos los l compatibles con los lm. Supónganse el laplaciano en Y lm, era l por l + 1 por lm. Entonces, si uno toma entonces este problema y se pregunta por qué modo se activa, acá hay una cosa muy interesante que yo no resolví. Como verán esta clase no es solamente plantearles un ejercicio de final, sino plantearles varios ejercicios, ¿no?

Porque esta es una clase más de preguntas que de respuestas, pero si ustedes plantean, como hicimos en el caso ~~del~~… que sí hicimos con mucha paciencia, con lo que se van a encontrar es con que, cuando dibujemos las curvas de estabilidad, es decir cuánto vale la parte real de estos lambda l, en función de los distintos l. Para l =1, para l =2, l =3, etc.

Reλe

a. l=1 l=2 l=3 l

Uno se va a encontrar con curvas que eventualmente, alguna de estas curvas, cuando planteen las situaciones de los lambda en función de los parámetros, puede ser que activen solamente uno de estos modos, puede ser que activen varios, puede ser que active una franja, puede ser que… depende de los parámetros del problema. ¿Cuál es la curva específica? ¿Cuál es esta curva? ¿Cómo se tiene esta curva de los parámetros? Eso es simplemente haciendo la cuenta como lo hicimos con... No es difícil. ¿Se acuerdan como era la historia? Agarrábamos y reemplazábamos acá y obteníamos que lambda multiplicado por la función de los modos lineales, y quedaban una serie de ecuaciones lineales para lambda. Entonces nos queda lambda en función de los l y los parámetros del problema. Los parámetros del problema podrán determinar qué cosas se pierden acá, se pierden allí, etc. Un problema muy interesante. Sobre todo por las consecuencias. ¿Cómo estudiábamos este problema? Y nosotros vimos en el curso dos maneras distintas de estudiar este problema. Y déjenme hacerles el mapa de cuál es el mecanismo.

La primera es agarrar estas expansiones u igual a la sumatoria de los u_{lm} por… por e a la lambda l de t y v igual a la sumatoria de v_{lm} por Y_{lm} por e a la lambda l de t, y llevar a cabo un reemplazo aquí. Perdón, proponiendo ahora, como hacíamos con la ecuación de... No en la… que nos da el crecimiento lineal, recordemos estabilidad, sino planteando que estos son coeficientes que dependen del tiempo, que si linealizamos nos van a dar como solución los e a la lambda t, pero si no van a ser dependientes del tiempo. Reemplazamos acá y truncamos la ecuación tipo u, por ejemplo l = 0, m = 0, punto, igual a un conjunto de términos u, l =1, l =-1, punto, igual a un conjunto de términos.

$\mu = \Sigma\ \mu_{em}\ (t)\ Y_{e,m}$ $\quad \mu_e = 0$

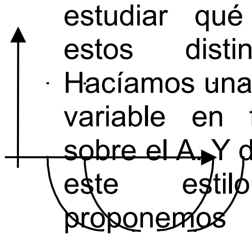
$m = 0$

$v = \Sigma\ v_{em}\ (t)\ Y_{e,m}$ $\quad \mu_e =$

Y así siguiendo, recuerdan, un conjunto, en principio, infinito de ecuaciones diferenciales tales que si estamos en una zona que se prenden unos pocos, hacemos exactamente lo que hicimos cuando estudiamos el problema de… Veíamos cuáles eran los modos marginalmente estables, derivábamos la variedad central, proyectamos en la variedad central, y truncábamos las ecuaciones. ¿Se acuerdan de eso? ¿Lo tienen presente? (Silencio). Yo se los recuerdo en dos minutos. Teníamos un problema unidimensional, desde 0 hasta l. Teníamos un término espacial,

que era un poquito más

complicado que éste, bastante más complicado. Y lo que hacíamos era estudiar qué pasaba con estos distintos modos. Hacíamos una curva que era variable en función del l sobre el A. Y daba curvas de este estilo, entonces proponemos como soluciones de omega, los A_k por estas dos funciones, los k sub kx, llegamos a un conjunto de ecuaciones diferenciales. Un conjunto igual a el r por l=1, menos. Y si te acordaras acá, tenemos términos que dependían del Ro 1, 2. Y acá tenías una ecuación que da dos puntos, que era una ecuación que linealmente era estable, ¿te acordas? Acá tenías una ecuación donde tenías un 9,2 igual a 2, igual a -0,1^2/2. Más etcétera. Y decías, si este modo era linealmente estable, rápidamente íbamos a converger, porque este término era grande, a 0,2 que era más o menos -1^2/2.



l l

0 l

1 $(\delta x^2+1)^2\ \omega\ldots = \omega_6$

$\omega = \Sigma A_k \sin (k_x x)$

2 .

3 $A_1 = rA_1 - A_1^3$

4 .

5 $A_1 = r A_1 - A_1 A_2$

6 .

7 $A_2+9A_2=-A_1^2/2+\ldots$

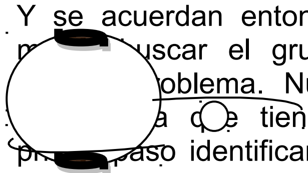
8 $A_2 \sim A_1^2$

Sobre esta… la práctica que hicieron hace poquito. Entonces ahora reemplazabas acá y truncabas a un conjunto finito divergente que en este caso era 1, que te daba así. ¿Te acordás? Yo estoy proponiendo acá que hagan exactamente lo mismo, como una de las estrategias posibles. Lo único que acá en vez de ser estos modos, va a ser los armónicos esféricos. Pero van a repetir exactamente una misma estructura. Esto da una función… estas son las estrategias. No es una estrategia digna de simplemente estar introduciendo un tema en las próximas clases, entonces la alternativa ésta, la alternativa de escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales para estos coeficientes. La primera alternativa construir ecuaciones para los µlm y los vlm.

[Escribe en el pizarrón: 1º alternativa construir ecuaciones para los µlm y los vlm.]

La segunda es intentar la aproximación del problema por simetrías. ¿Cómo funcionaría eso? También lo vamos a esbozar. En ese caso lo que vamos a hacer es lo siguiente, plantear que suponemos que la curva de estabilidad siente solamente algunos de esos puntos. En esta curva de estabilidad, de los lambda en función de los l. Algunos los sienten, y entonces imaginamos que en nuestro problema los campos van a ser descriptos en términos de los armónicos esféricos.

Y se acuerdan entonces cómo venía la m… buscar el grupo de simetría en …oblema. Nuestro problema es …a que tiene simetría… Es el p…paso identificar cuál es la simetría del problema. El segundo paso era estudiar el espacio de representaciones.



(1)

(3)

(2) Estudiar el espacio de representaciones. L=2

¿Y cómo habíamos hecho esto durante el curso? Se acuerdan que lo hicimos en el caso del láser. ¿Cómo hacemos en el caso de láser?

En el caso del láser decíamos que el campo eléctrico, era una magnitud por e a la I tita (θ), más z 2 menos e a la I tita (θ), suponíamos que había un x, nos fijábamos cual era la acción sobre las variables, y eso inducía una acción sobre los coeficientes del problema. Entonces acá es exactamente lo mismo, vamos a tener un espacio de representaciones si se enciende el I =2, un espacio cinco dimensional, que son el Y I igual a 2, m igual a 0, m igual a -1, m igual a 1, m igual a 2 y m igual a -2.

Espacio de dim 5

$Y_{l=2}$, m=0
m=-1
m=1
m=2
m=-2

Y estudiamos después, tercero, la estructura de los grupos. La estructura de los grupos es bastante interesante. Fíjense que si nosotros estamos trabajando con m=2, menos la identidad del operador o 3, actúa como la identidad porque se acuerdan que con el I, estos bichos iban como -1 a la 2 I.

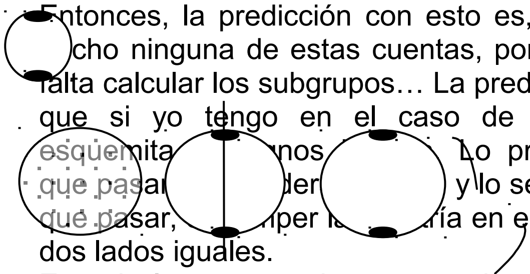
Entonces O (3) en este grupo en realidad es SO (3), y los subgrupos de éstos son, O (2) y D (2). ¿Qué quiere decir esto? Las simetrías originales del problema hay un subgrupo que solamente tiene la simetría O (2). Esto va a ocurrir cuando yo, por ejemplo, enciendo con m=0 en I=2. Tiene términos que existe una alternancia entre valores altos, chicos y altos en la función. Ésta tiene una subsimetría de O (3), que es 0 (2). Todas las simetrías que tenemos en O (2) las tenemos ahí.

(3)
SO (3)
↓

• (2)

↓
D_2

Tenemos la posibilidad de tener el SO (2) y la simetría de reflexión, entonces esto que está acá tiene una simetría que es O dos. Y la siguiente simetría del problema es de 2. Romper esto, a través de prender alguno de los m y cuando prendemos alguno de los m, esto ya no es más homogéneo. Sino que lo que hacemos es romper la simetría a través de poner algo que vale más acá que lo que vale en otros lados. En el caso de… vale mucho, acá vale poco y se rompe como un plano.



Entonces, la predicción con esto es, antes de haber hecho ninguna de estas cuentas, porque todavía nos falta calcular los subgrupos… La predicción de esto es que si yo tengo en el caso de hacer m=2, un esquemita [illegible]nos [illegible]. Lo primero que tiene que pasar [illegible]der y lo segundo que tiene que pasar, [illegible]mper la [illegible]ría en este caso dejando dos lados iguales.

Esto daría lugar a animales que tienen simetría especular. Entonces plenos embriones de un animalito que termina teniendo simetría especular, uno esperaría que los embriones siguieran el desarrollo de una ola homogénea de células, que se establecieran primero un eje y que después ese eje se corriera y diera lugar a dos mitades. A mí me han mostrado una película, el martes, un estudiante me mostró una película el martes, sobre embriones y me parece que vale la pena mirarla, así que después podemos ver cómo la hacemos accesible. Pero ésta sería la manera en la que se originarían patrones morfogénicos que dan lugar a simetrías especulares. ¿Cómo dependiendo de los parámetros uno puede encender estructuras más complicadas que en vez del I=2, una sería I=4, I=3, y entonces la estructura del grupo es distinta?

Supongamos que la estructura final es una estrella de mar. ¿Podemos hacer la predicción de cuál es el estado intermedio antes de llegar a cinco? Supuestamente sí, porque la estructura final debería

20.

ser de cinco, pero entre el de tres y el de cinco tiene que haber algún subgrupo. Tendríamos que poder hacer una predicción de cómo evoluciona un embrión de estrella de mar si hacemos esta cuenta. Y para un pulpito lo mismo, y para cualquier otro bicho que se imaginen.

21. I I

a. l=2 l=4 e

22. A2: ¿La estrategia sería usar una cascada de simetría…?

23. P: ¿Cómo?

24. A2: ¿La estrategia sería usar una cascada de simetría?

25. P: Exactamente

26. A2: A partir de… vemos cómo va.

27. P: Claro. Vos miras el estado final. Te imaginas con qué l lo logras, y después haces la predicción de cuáles son los subgrupos en el medio. Yo no sé si esto da, pero yo estoy casi seguro de que se debe poder hacer. De lo que estoy seguro es de que si sale, es algo interesante. Son una de las infinitas cosas que no llegue a hacer en mi vida seguramente. No sé. Yo estaba pensando en este justamente y en lo interesante que iba a ser poder hacerlo, y nada, se despertó mi hijo para que lo tranquilizara con el fútbol. Quedó ahí, inconcluso. Pero es un tema bastante interesante.

28. A4: Hay un modelo de… en biología.

29. P: ¿Cómo?

30. A4: Hay un modelo de… en biología.

31. P: Son exactamente estas cosas. Las particularidades que plantearon las catástrofes y la predicción de un estado a otro es eso. Teóricamente… temporada de suceso. Es otra cosa. Bifurcaciones… a sistema de gradientes en la teoría de catástrofe. Cada bifurcación que estamos hablando acá, son teoría de catástrofes.
Preguntas interesantes en este problema. ¿Cómo son sus ecuaciones de amplitud? Preguntas – ejercicio, en realidad ¿no? ¿Cómo son las ecuaciones de amplitud?… ¿Cuáles son las ecuaciones de amplitud? ¿Y qué dinámica tienen? Esta pregunta me encanta y es ¿qué parámetros determinan qué modo se activa? Si yo hago la curva ésta, si yo hago la curva de los lambda en función del l, yo puedo activar 1, 2, 3 modos, 4, algunos, uno solo, puedo activar los que determinan la simetría bilateral, puedo activar lo que determina la simetría que determine las cinco puntas, en el pulpito, de qué parámetro del problema dependen. Y suponiendo, porque después uno se imagina que tiene qué ver la evolución con esto, ¿Por qué los bichos que son más evolucionados tienen más puntas que los menos evolucionados? Si yo ya tengo por un lado, las simetrías, lo que tendría que tener cuidado es de mirar los subespacios invariantes y su dimensión.

¿Ecuaciones de amplitud? ¿Dinámica?

¿Qué parámetros determinan qué modo se activa?

¿Subespacios invariantes, dimensión?

Para poder garantizar la utilización de los teoremas que vimos en el curso, de que las estructuras estacionarias se dan en aquellos espacios que tienen dimensión uno. Entonces que en cada paso, estoy haciendo las demostraciones que corresponden. Pero como les decía antes, es un problema que yo probablemente no pueda estudiar, entonces lo que dice aquí es que para la clase de hoy y para darles un ejercicio que como respuesta yo supiera, iba a hacer una versión más fácil del problema. Que es el de la formación de estructuras aplicando los problemas… Y el problema, que es el que les voy a invitar a resolver para el final, es el de la formación de estructuras en caracoles. [Escribe en el pizarrón: Formación de estructuras en caracoles.]

Acá el problema es muy parecido, yo lo que tengo son células que tienen la posibilidad de secretar pigmentos y el modelo teórico con el que se trabaja habitualmente, es que estos pigmentos tienen activadores e inhibidores. Y los caracolitos crecen en esta dirección, en la dirección radial, es decir que van creciendo sumando células nuevas acá en el borde. Lo que yo quiero encontrar en un caracol es un registro del radio de los patrones.

x

células → pigmentos

↑

t

a. activadores
b. inhibidores

Es decir, en cada punto lo que yo veo es en x, en una coordenada unidimensional X, que es lo que se prendió y que es lo que no se prendió. Y en esa dirección sigo. Evolucionó en esta dirección y yo lo que tengo es para cada instante de tiempo un corte que me dice qué zona estaba activada con pigmentos y qué zonas no estaban activadas por pigmentos.

32. A5: Yo no entiendo cómo es el caracol.

33. P: [Muestra uno de los caracoles que trajo] Vos tenes una cosas unidimensional, que lo dibujo con curvitas porque en realidad estoy acostumbrado a mirarlos así desde arriba, entonces crece en esta dirección, y va creciendo así. Y si yo me quiero imaginar en un instante dado de tiempo cómo es el registro de lo activado y no activado, tengo que hacer un corte, radial. Entonces en esta zona no hay activación, y en esta zona se activaron todos. Esto sería un patrón posible. Entonces el problema más sencillo, es unidimensional, y acá se despeja el tiempo. Y como les dije antes, hay activación e inhibición. Hay términos difusivos. Todos entendemos que la difusión parte como la derivada segunda de a respecto de x^2.

$$\omega \quad \underline{\delta^2 a}$$
$$\omega \quad \delta x^2$$

sea que si yo tuviera una concentración constante de una difusión, si tuviera una derivada constante de… la difusión, porque lo que me está entrando de activación de un lado, me está saliendo en el otro. Yo necesito una derivada segunda para que no haya difusión. Entonces los modelos que se escriben son del tipo que veíamos al principio de la clase. El primero que propuso este hombre, Meinhart, es el que usamos para el problema de embriología. Pero déjenme, ya que van a hacer un ejercicio con esto, si es que tienen ganas, contarles otros. Vamos a repasar también el de Meinhart, que era algo así. El inhibidor.

$$\delta a / \delta t = S(a^2 / b + b_a) - r_a a + D_a \delta^2 a / \delta x^2$$

34. A6: ¿Más b por a?

$$\delta b / \delta t = S a^2 - r_b b + D_b \delta^2 b / \delta x^2 + b_b$$

35. P: Más b sub a.

Es el término que eventualmente te dice que encendés la activación. El término autocatalítico, el de inhibición, que se crece me lo mata, una degradación natural de la difusión. El efecto catalítico sobre el inhibidor del activador, la degradación y la difusión. Este es el que habíamos estudiado hace un ratito, pero hay otros modelos para la formación de patrones. Uno de ellos, explico uno, es inhibir a través de la eliminación del sustrato que necesite el activador. ¿Qué quiere decir eso? El fuego, por ejemplo. Yo prendo un fosforito y no explotamos todos. ¿Por qué? Porque con el fosforito, prendo fuego, consumo oxígeno y la activación lo que hace es despertar el sustrato que necesita el fuego para estar bien. Entonces yo lo corto a través de despertar al inhibidor. Entonces para que la inhibición sea otro mecanismo posible, es la inhibición por eliminación del sustrato.

Entonces la derivada de a respecto del tiempo, es igual a, vamos a ver un modelo posible. S por b, por a^2 de 1 más Sa, a^2, más ba, menos ra por a, más la derivada segunda de a respecto de x dos veces. La derivada de b respecto del tiempo igual a

Inhibición por eliminación del sustrato

$$\delta a / \delta t = Sb\,[a^2 / (1+S_a a^2) + b_a] - r_a a + D_a \delta^2 a / \delta x^2$$

$$\delta b / \delta t = cte\ldots Sb\,[a^2/(1+S_a\ a^2) + b_a] - t_b\ b + D_b$$

b menos s por b, a^2 sobre 1 más Sa a^2, más ba, menos rb por b, más Db, derivada segunda de b respecto de x dos veces.	$\delta^2 b/\delta x^2$

¿Cómo funciona este sistema? Por un lado, para que haya autocatálisis, o sea para que el activador se encienda, necesito sustrato, por eso es que hay un producto de lo que es la activación, multiplicado por el sustrato. Si b fuera igual a cero, no hay autocatálisis, eso es lo dice que hay sustrato. Este producto, esta variable acá, multiplicada por esto, indica que había actuado como sustrato. ¿Por qué en lugar de a al cuadrado? A al cuadrado sobre uno más S por a al cuadrado. Porque yo lo que necesito es que eventualmente haya aceleración. O sea el término autocatalítico funciona bien, pero eventualmente quiero saturar las variables. Es por eso entonces que meto este término que está acá. Una degradación y un término inducido para la fase. ¿Cómo funciona el *pilincho* éste? Bueno, éste que está acá, a este coeficiente no le creo nada, ponele. Esto debe ser una constante, es una constante, vamos a llamarlo…

36. A5: ¿No es una fuente?

37. P: Por eso, sí, una constante, una fuente del sustrato. Este término con signo menos, ¿qué quiere decir? Que cuando yo tuve un término que me incrementaba a a, hizo que me decremente el sustrato. Por eso aparece con signo menos en la ecuación del sustrato, lo que está haciendo crecer al activador. La degradación, y la difusión. Y en este tren de jugar con los modelos posibles, todos los cuales satisfacen este diagrama inicial que habíamos dicho antes: un activador, un inhibidor, una difusión y otra difusión. Otro modelo posible, para dar cuenta de los patrones que podría tener un excitador y algo que lo inhiba, es el tercer modelo que se utiliza en la literatura, es la eliminación del activador. Inhibición, por eliminación del activador.
[Escribe en el pizarrón: Inhibición, por eliminación del activador.] ¿Cómo sería un sistema de este estilo? Déjenme anotarlo y discutimos los términos:

i. $\delta a/ \delta t = S\,(a^2 + b_b) - r_b\, b_a + D_a\, \delta^2 a/ \delta x^2$
ii. $\delta b/ \delta t = Sa^2 - r_b\, b + D_b\, \delta^2 b/ \delta x^2 + b_b$

Si los apagan es más práctico (sonó un celular). Tenemos un activador que es autocatalítico, que tiene una fuente, que tiene difusión, pero lo que tiene es un término que cuando se excita lo que va a estar tocando las cosas, va a eliminar a la activación, algo que depende de la propia activación. ¿OK? Entonces esta es la activación activa a través de algo que lo elimina. Y que está siendo encendido con el activador. Ya que esto se enciende con el activador y esto me elimina activadores. Pero me lo elimina de una manera que sea proporcional a la cantidad de activador que exista, pero eso es que digo que es por eliminación del activador.

38. A6: Y ese a….

39. P: ¿Cuál?

40. A6: Ahí, ese a…

41. P: ¿Al cuadrado?

42. A6: No, no. El a que está atravesado arriba.

43. P: ¿Éste?

44. A6: ¿Va también abajo? ¿No?

45. P: Eh… no, porque vos no estás eliminando sustrato con eso. Simplemente su presencia tiene la acción de eliminar el activador sin que eso decremente el sustrato. Bueno ¿por qué les conté estos modelos distintos? Porque no todos estos modelos nos cuentan de las mismas familias de patrones. Por ejemplo. ¿Qué necesitamos para que un sistema, dé un patrón particular? ¿Qué necesitamos, por ejemplo, para tener un patrón como éste? O mejor, queda

más lindo así. No, éste es más lindo. Un sistema con “v” cortas invertidas. Ahora lo vamos a hacer pasar. ¿Produce más o menos…? Los pigmentos crecen, crecen, eventualmente cuando se chocan desaparecen. ¿Qué propiedad dinámica, de las que vimos hasta ahora es necesaria para poder lograr un patrón de este estilo?

46. A1: Excitabilidad.

47. P: Excitabilidad.

48. A1: Excitabilidad, que difunda y que existe. Digamos, que haya difusión y excitabilidad.

49. P: Sí. Sí. Pero con eso podría lograr, por ejemplo, simplemente si fuera excitar y difundir, un patrón homogéneo que crece. Pero hay algo acá.

50. A3: Cuando choca se frena.

51. P: Esa es una. Cuando choca se frena. En realidad acá.

52. A3: Comporta la refractibilidad. Si vos tenes por ejemplo, tiempo refractario, por ejemplo. Vos tenes tiempo refractario llega la señal y está inhibida por la anterior.

53. P: Perfecto. Bueno vamos a tomar eso, tiempo refractario. ¿Qué es el elemento clave del asunto? ¿Se acuerdan cuál era el tiempo refractario? ¿No? Acuérdense de esto. Una variable, otra variable, una monclina y una monclina. Nuestra definición de excitabilidad no era que chocaban los frentes y se eliminaba, sino que era una propiedad dinámica, que era la existencia del estado estacionario, dado que si yo lo perturbaba un poquitito, decaía linealmente, pero si lo perturbaba por encima del umbral, se mandaba. Me corría el monclina y volvía. Ahora supongamos que miramos la señal temporal de ésta. Miramos v, u, en función del tiempo. Le doy una patadita en estado estacionario, le doy una patadita por encima del umbral, entonces sube, baja y todo este período está dividido en dos partes, o sea yo tengo acá hundimiento, después tengo todo un tiempo hasta volver al estado estacionario. ¿Por qué tiempo refractario? Porque durante todo el tiempo que estoy volviendo acá, yo me la tuve que pasar pegando pataditas de este tamaño y el sistema no reacciona. Recién cuando estoy en esta zona, doy una patadita chiquita y el sistema se puede escapar. O sea que durante todo este tiempo, yo tengo un tiempo, que se llama tiempo refractario, para que el sistema no se excite. Cuando yo excito algo, aunque parezca que ya volvió, todavía no está listo para excitarse de nuevo. Entonces si yo estoy excitando esto acá, este estado queda no excitado y por lo tanto a la onda lo único que le queda es excitar al vecino que tiene las cosas listas para ser excitadas. Entonces yo estoy todo en estado estacionario. Le pego una patadita para este lado, pero no puedo propagarme para la izquierda, porque en la izquierda todavía estoy en estado refractario… que es excitarlo por la derecha. Entonces esto forma una estructura de v invertida, porque en esta zona están las cosas en su tiempo refractario y no pueden ser excitadas. Entonces es cierto, cuando las cosas se chocan, claramente cuando éste quiera activar a éste y éste en su estado fijo, ni por las tapas puedo hacerle nada, entonces ahí me quedo sin poder propagar. Entonces frentes que chocan y se mueren o frentes que se van para la izquierda o la derecha, son signaturas de sistemas refractarios. Entonces, se acuerdan por otro lado, que un sistema excitable, usemos este mismo dibujo, es vecino de un régimen distinto al excitable, ¿qué régimen era? La oscilación. Yo ahora tomo un sistema y le corro la autoclina un cachito y ahora el sistema oscila, puk… puk. ¿Cómo sería esto en este diagrama? Serían, si yo tuviera una difusión lo suficientemente grande, patrones que son banditas de excitación. Entonces ahora vemos un… de este estilo, y tienen los dos, tienen las zonas excitables y las zonas de las banditas horizontales. Bueno. Con esos elementos, éste es el ejercicio, éste es el ejercicio. De vuelta, este ejercicio tiene las características de que si ustedes lo resuelven, me muestran el resultado y no dan el final. Tengo tres caracoles acá, sacados del viaje a la playa bonaerense, Mar de las Pampas. Estaba lleno de caracoles, especialmente de tres tipos, solamente de tres tipos. Era…. Tengo una nena chiquita que no tuvo ningún problema en ponerlos en baldecitos chiquitos mientras ahí paleábamos, tres

baldecitos distintos, no se confundió con ninguno. Uno de los patrones es éste. Yo se los voy a pasar, pero el último por favor me los devuelve. En general tiene fondo blanco y esto es una franja marrón. El otro de los patrones que le voy a mostrar es del tipo v corta. El ejercicio es adivinar que quedó acá. Adivinar que quedó en éste.

54. A5: Se supone que todos vienen de la playa.

55. P: Todos vienen de la misma playa, sí. Incapaz de hacer una cosa así.

56. A6: ¿Vale ir a Mar de las Pampas?

57. P: Por supuesto, por supuesto. Lo que pasa es que en la época que yo fui a hacer esto, se podía, en este momento está carísimo ir a Mar de las Pampas, no sé si van a poder. Bueno, nada, ese es el ejercicio. La parte de la formación de estructuras acá. La pista es entender cuál de estos sistemas en la parte homogénea, por ejemplo, puedo tener la diversidad de fenómenos que son necesarios para tener las soluciones dinámicas que…. Cuando volvamos de la pausa que vamos a hacer, una pausa para tomarnos un café, lo que vamos a hacer es repasar la materia, e indicarles zonas de manera que vale la pena trabajar. Vamos a recuperar el cuadro, que le vamos a tomar prestado a Estrogas y vamos a señalar cuáles son los temas que yo creo que son importantes tener firmes para el final y cuál es el estatus de la materia. Y nos tomamos la pausa.

    [Intervalo]

58. P: Bueno, hubo varias preguntas vinculadas al tema del final… Voy a tomar la última media clase, para, muy informalmente, discutir el cuadro con el que empezamos la materia. Se acuerdan acá teníamos la dimensionalidad y acá teníamos la linealidad y la no linealidad. Y acá habíamos hablado de dimensión 1, 2, 3, n mayor que 3, *ma non tropo*, 4, 5. ¿Qué conocen ustedes? Muy bien. ¿Qué conocen muy bien? Electro, la cuántica, la dinámica estadística. Esto lo conocen bien. Trabajaron con teorías lineales, la cuántica es una teoría lineal. Entonces lo que tienen que agregar ustedes al parcial… lineales. El electro como interacción de la variación con la materia, eso lo estudian como sistema lineal. Son situaciones parecidas a las derivadas parciales pero lineales. La mecánica estadística es una… y trabajan con sistemas armónicos o trabajan con sistemas no lineales pero acotados en el espacio de fase. Todo esto también entra en el parcial, los sistemas lineales en algún momento, vimos en detalle lo que ocurría con un sistema lineal unidimensional, simplemente para señalar, recordar que un sistema lineal unidimensional tiene o un punto fijo aislado o infinitos generados, para sistemas bidimensionales clasificamos los sistemas en función de los autovalores, porque nos iba a ser muy práctico tenerlo presente, porque nos iba a ser muy práctico tenerlo presente, acá teníamos el oscilador armónico, tenemos el punto de ensilladura, etc. Acá hicimos una clasificación exhaustiva. Para el sistema de dimensión tres, no hay novedades. Escribimos las fórmulas generales en la práctica. La solución general del problema de la derivada de a respecto de t, igual a una matriz b multiplicada por a. Lo resolvimos explícitamente. Así que acá no hay sorpresas, todo esto lo conocemos. Yo les diría que cuando terminan la carrera, todo el cuadrado de arriba, ustedes son expertos en esto. Puede ser que tengan que repasar alguna cosa, pero esto lo conocen. Este curso lidió con lo que pasa acá abajo. Y algo a lo que le dimos mucha importancia, es a los sistemas unidimensionales porque integran algunas de las propiedades más interesantes de los sistemas no lineales en general. Por ejemplo, que cuando uno cambia un parámetro, cambia el número de soluciones estacionales que coexisten. Los cambios cualitativos de la estructura de los flujos se dan bifurcaciones. Y empezamos a estudiar bifurcaciones en el problema unidimensional. Y en el problema unidimensional se ponía en evidencia, ya cuando cambiaba el número de puntos fijos, que podía coexistir más de un punto fijo. Y estudiamos en una forma exhaustiva distintas maneras de hacer aparecer estos puntos fijos: la bifurcación de Moncillos, la transcrítica, la sadenol, la bifurcación transcrítica, la bifurcación de Pitfall. Éstas por ejemplo, ustedes tienen que conocer muy bien cuáles son las bifurcaciones, cuáles son sus formas normales. Eso lo tienen que conocer muy bien. Y vimos que influencia tenía la topología en

sistemas unidimensionales: si era r o si era s. En sistemas tridimensionales aparecieron las oscilaciones no lineales, y en particular vimos la bifurcación de Hopf. Y estudiamos según la bifurcación normal, la aparición de un ciclo límite, por la perturbación de una órbita homogénica. Esto lo terminamos de ver cuando estudiamos mapas. Es decir, las soluciones que nacen con amplitud cero y frecuencia finita, o las que nacen con amplitud finita y frecuencia infinita. Estas oscilaciones tienen que entenderlas profundamente bien. Espero que las entiendan bien y de la bifurcación de Hopf espero que sepan formas normales y demás. Con el sistema de dimensión tres, vimos aquellas cosas que podían entenderse con las herramientas anteriores, pero ya hicimos un primer esfuerzo para salir del plano y construir, escapando del problema de los flujos, construir mapas. Y acá lo que hicimos fue estudiar algunos mapas, específicamente, o sea, concretamente el mapa de la herradura y la gran sorpresa es la aparición de órbitas caóticas u órbitas irregulares, etcétera. Yo espero que sepan bien cómo funciona el mapa de herradura, qué estructura tiene el conjunto invariante, cómo se pueden ubicar las órbitas periódicas, cómo se puede trabajar en un caso concreto para pasar de un problema analítico a un problema algebraico. La herradura de Metz es un tema importante. De manera que yo les diría que, por más que sean sorprendentes, por más que sean sorprendentes, que sean interesantes, el caso de n igual a tres es un caso, yo diría, resuelto. El problema de n igual a tres, es un caso tan resuelto casi como el problema de n igual a 1 y n igual a dos. Es un problema resuelto. No quiere decir que en este tema no se trabaje. En este tema se trabaja, pero la metáfora con la que yo me lo pinto, es que hasta hace algunos años pasaban cosas muy entretenidas en este campo, muy entretenidas. Y ahora a mí me gusta decir que es tierra de notarios, dentistas, es decir, es un terreno totalmente pavimentado, ya hay luces de neón, la gente se sienta sofisticadamente en los bares a criticar a los vecinos, lo que hacen los demás, quién es más prolijo, quién es menos prolijo. Digamos, mucha gente, la gente es muy prolija en este tema. Tiene ventajas. Si a ustedes les duele una muela van al dentista, tienen conflicto van a un notario, ponen orden. Está todo bien acá. Si ese es el tipo de pintura donde se sienten cómodos, este es el lugar para estar. Esto ya es una ciudad. N mayor que tres es un territorio raro, este es un territorio como de los suburbios, o viene a ser turismo de aventura, ¿no? Esto ya se entiende, son cosas menos entretenidas, pero de última uno sabe que nunca le va a pasar absolutamente nada, porque hay herramientas. Por ejemplo, si uno utiliza los mapas, puede hacer mapas de R^3 en R^3 y utilizar álgebra, y las cosas se pueden hacer con cierto rigor. Ahora, a mí en particular, por ejemplo, físicos trabajando en esto tratando de encontrar observables que permitan refutar o validar modelos y sistemas mayores… que vimos hace un par de clases. Hay cosas que se pueden hacer, es entretenido. Pero yo me siento muy incómodo acá. Es una de esas relaciones en las que uno pasó mucho tiempo, piensa que va a estar cómodo, pero nunca termina de estar cómodo y finalmente las tiene que dejar. En este lugar yo no me puedo quedar. Si a ustedes les gustan los piratas y la aventura, aventura, el lugar para estar es acá. En este lugar no sabemos qué es lo que pasa. Tiene un montón de preguntas interesantes. Acá por ejemplo, como decíamos antes, está la neurociencia computacional. Acá por ejemplo uno pone muchas unidades excitables y trata de imaginarse qué es lo que pasa y no tienen ni idea. Las preguntas son fascinantes. Cualquier pregunta de psicología cognitiva como las que discutía Mariano en la charla a la que fuimos cuando hicimos la pausa, pasa por ahí. Problemas en el cerebro, sistemas nerviosos en general, y demás. Cómo se comportan sistemas no lineales, muchos de ellos acoplados, es una gran pregunta. Pero esa la elegí porque a mí me gusta, pero existen otras, por ejemplo, vivimos una revolución en el área de la genética. Y la genética hasta ahora lo único que tenemos es el genoma, tenemos un montón de genes y no sabemos cómo interactúan entre sí, no conocemos como emergen… No conocemos ningún caso. Hay ecuaciones no lineales, altamente acopladas y no sabemos qué es lo que emerge de todo eso. Y eso va a requerir de dinámica, son procesos dinámicos, y ahí hay que estudiar sistemas sencillos, hay que buscarse problemas accesibles, pero está todo abierto. Yo les puedo dar una pista, sobre esto hemos hablado un montón, pero yo les puedo dar una pista de nombres para leer, por ejemplo J. J. Codis, es un tipo que tiene varios *Nature* sobre interacciones en sistemas geonómicos y demás. Bueno a todo esto, J. J. Codis trabajó con Metz en algunos problemas, éste trabaja en todo. Pero así como está éste, pueden tener inquietudes de otro estilo y pueden tratar de contribuir en programas muy distintos al de la física, por ejemplo, vieron que hace muchos años los físicos dejaron de discutir las cosas metafóricamente y empezaron a medir cositas, y hay un esfuerzo desde hace varios años de hacer cuantitativa la biología, ahora se les ocurrió a los sociólogos y a los economistas que también se pueden cuantificar las cosas de otra manera y se estudian redes de interacciones sociales. Se estudian redes de interacciones sociales, complejas y demás, y son modelos multiagentes, que utilizan dinámica y formación espacial. ¿Se podrá ayudar a la sociología a hacer también una disciplina *cuantizable* desde el punto de vista dinámico? No sé. Pero esta gente está empezando a estudiar modelos, estos modelos de small world network, estos modelos de los que estamos hablando y demás. Acá pueden seguir los esfuerzos de un tipo que se llama Watts, que es un sociólogo de hecho, pero que trabajó con…. En el dibujito que ustedes ven es un tipo muy interesante. Watts y Strogatz trabajan en eso. ¿Qué otro ejemplo les podría mostrar? Bueno existen infinitos.

59. Ay: Inmuno.

60. P: ¿Qué?

61. Ay: Inmunología

62. P: Inmunología. Inmunología. Tanto desde el punto de vista interno de un individuo, el problema inmunológico, como el problema epidemiológico. O sea que existen muchísimos problemas de cómo interactúan los agentes patógenos con un sistema que se está tratando de esconder y demás. Problemas completamente abiertos. Y siguen los ejemplos. Por el cual existen modelos muy sencillos y otros modelos más complejos, multiagentes que ven qué es lo que pasa con las células que quedan infectadas, pero cómo interactúan con el sistema inmunológico. Por ejemplo si quieren estudiar algo base sobre inmunología, pueden ver cosas en el Murray. Pero si les interesan trabajos más modernos, de una colega mía, con la que a veces interactuamos: Rita Solsalon. Que viene del área de la dinámica y se dedicó a inmunología, a entender lo que pasa con un individuo. Bueno, en ciencia computacional, existen muchísimos nombres. Pero realmente éste que está acá, es tierra de piratas. Acá hay cosas por todos lados, no hay reglas, no se sabe qué es lo que va a pasar, hay cosas en el camino, en este proyecto queda gente en el camino a roletes. Hay que buscarse un buen problema, un buen compañero, tener suerte y apostar con la carrera de uno. Son temas súper interesantes y detrás de todo esto hay una pregunta teórica que es muy relevante en nuestra disciplina, que es el problema de extender la mecánica estadística a los sistemas fuera del equilibrio. Como les decía antes, lo único que podemos aspirar nosotros por ahora, es agarrar algún sistema en particular, estudiar una propiedad particular y tratar de estudiar ecuaciones promediadas y demás. ¿Cómo hacer esto sistemáticamente? ¿Cómo se trabaja en un sistema en donde cada una de las unidades puede dar bifurcaciones y demás? Es un problema completamente abierto. Y yo pienso que se puede motivar, más allá de la anécdota, de la pregunta particular, un trabajo teórico mucho más intenso. Así que bueno, si se animan, problemas interesantes, es ir por acá. Y con eso yo creo que ya se termina que es todo lo que tenía que contarles. No se olviden desde el final, elegir entre todos ustedes, para cuando termine, o sea para después del parcial, una fecha donde quiero que se presenten todos, o la gran mayoría, salvo que tengan problemas de fuerza mayor, pero así, terribles. De vuelta, esta es una materia que si siguieron las teóricas y vinieron y dieron los parciales, la estudian, la leen durante cinco días y ya está. Así que, nada. Nada de dejársela para diciembre, esas fechas imposibles donde nunca van a encontrar los quince días que sueñan para preparar el final. Y respecto del ejercicio éste, no se lo tomen demasiado en serio, ni este ejercicio ni el de embriología son problemas para tomárselos demasiado en serio. Si están muy inspirados y quieren tirar unos tiros antes del final, tírenselos, pero más bien son proyectos por si alguna vez se les ocurre algo. Pero no dejen de preparar un final para resolver estos ejercicios, porque yo se los planteo engañosamente sencillos. O sea son un poquito más complejos de lo que parecen. Pero bueno, ya está.

63. A4: ¿El final de doctorado es fecha aparte?

64. P: El final de doctorado es fecha aparte.

CASO 5. PROFESOR C

CAPACITORES

1. P: Las pilas y las baterías en general… digamos... lo que ustedes ven acá son como dos patitas, como dos alambres, uno que va a la chapa de arriba y otro que va a la chapa de abajo del capacitor y esos alambres sirven para conectar al capacitor con otros elementos del circuito que todavía no conocemos, que van a ser las resistencias… las baterías sí las conocen, ustedes saben que tienen un polo... un borne positivo y un borne negativo. Eso lo conocen y bueno, cuando veamos pilas y baterías. El dibujo va a ser así: donde la línea larga corresponde al borne positivo y la línea chica corresponde al borne negativo… así que lo podemos identificar así. Por ejemplo, cuando ustedes conectan una pila a una lamparita, que sería el circuito más tonto que podemos armar, es el circuito de una linterna, en una linterna hay una o varias pilas conectadas a una lamparita.	SÍMBOLO DE CAPACITOR SÍMBOLO DE LAS RESISTENCIAS SÍMBOLO DE LAS PILAS Y BATERIA

La lamparita, lo que hay adentro del bulbo, del bulbo de vidrio de la lamparita, es lo que llamamos una resistencia eléctrica, es un material conductor en realidad, con ciertas propiedades que lo caracterizan, que se llaman conductividad y receptividad si con estos símbolos quisiéramos dibujar este circuito de una pila conectada a una lamparita, haríamos esto…. Entonces los dos bornes de la pila por medio del cable se conectan a los dos bornes de la resistencia, los dos bornes de la resistencia son los extremos del filamento de la lamparita, entonces cuando veamos circuitos vamos a ver que en un circuito de este tipo se establece una corriente eléctrica y vamos a ver que por acción de esa corriente eléctrica la lamparita se enciende, en general en una resistencia lo que va a ocurrir es que va a aumentar la temperatura de la resistencia y si la temperatura aumenta mucho, ese material empieza a emitir luz, eso es lo que sucede. Bueno, quiero decir, esto es un catálogo de los primeros elementos del circuito que vamos a conocer, hay muchos más, pero estos son y algunos más los que vamos a estudiar en este curso. Estamos a este nivel, estamos en el primero de estos niveles: los capacitores. Entonces antes de interconectar el capacitor con otros elementos del circuito, queremos estudiar qué pasa cuando interconectamos capacitores entre sí... entonces hay varias formas de interconectar pero hay dos típicas que son: la conexión en serie y la conexión en paralelo.

Cuando hablamos de conexión en serie lo que estamos diciendo es que tomamos un primer capacitor, digamos C1 y lo conectamos con otro capacitor C2 que viene a continuación. Entonces la patita del C1 queda conectada con una patita del C2 y quedan dos patitas libres todavía, por ejemplo un condensador en la realidad puede, ya les dije, puede ser un cilindrito de papel de aluminio arrollado, en realidad dos papeles de aluminio separados por un aislante para que no se toquen, que serían estas dos placas y si yo arrollo un papel de aluminio y tengo estas dos placas todas envueltas, la forma exterior que va a tener este dispositivo va a ser de un cilindrito, pero no porque las placas sea un cilindro rodeando a otro cilindro, en realidad las placas son dos placas planas, dos planchas de aluminio que para que ocupen menos espacio las envolvimos.	2
Ahora hay otros capacitores que tienen forma de lenteja, si ustedes ven un capacitor con forma de lenteja van a ver una	3

cosa así: como una cosa, una pieza cerámica de donde salen dos patas, ¿qué es esto? Bueno en realidad lo que esto es, es que adentro hay una chapita unida a una de las patas y la otra chapita unida a la otra de las patas, esas chapitas están depositadas sobre este material cerámico, que a su vez aísla entre las dos, las separa. Entonces lo que hay dentro de este capacitor, estos que tienen forma de lenteja, es algo así, son dos chapitas enfrentadas y de cada una de ellas sale una patita, esas patitas son las que están acá dibujadas, y las chapitas son estas dos, así que el símbolo tiene mucho que ver con la naturaleza del dispositivo. Bueno así que esto es lo que no vemos, vemos solamente la lenteja. Se presentan como una cosa así y que tiene alguna inscripción que indica la capacidad que tiene el capacitor, y da tantos microfaradios tantos nanofaradios. Bien, bueno así que vamos a unir estas patitas, una de ellas con la de otro capacitor que viene a continuación.

Bueno, la idea de esta unión de dos capacitores, en particular de esta unión en serie, puede ser vista como un único capacitor equivalente y queremos descubrir por qué razón esta combinación de dispositivos funciona en realidad como un único capacitor equivalente.

Es decir, si yo pongo esto dentro de una caja negra y alguien me dice: vea dentro de la caja hay un único capacitor, me miente digamos, no me dice que hay dos, me dice hay un único capacitor, descubra usted qué capacidad tiene ese capacitor que está dentro de la caja.

4

¿Yo que haría? Para descubrir la capacidad del capacitor tengo que pensar que la carga del capacitor es igual a la capacidad por la diferencia de potencial, por lo tanto, pondría una cierta cantidad de carga, q de un lado y menos q del otro, es decir, haría entrar por las patas de la caja una carga q de un lado y una carga –q del otro, mediría la diferencia de potencial y bueno, y respondería que la capacidad equivalente… Es la carga que puse, q acá y -q acá, por la diferencia de potencial, cuando voy desde un borde hasta el otro de la caja, esa diferencia de potencial que nosotros calculamos con una integral del campo eléctrico, en realidad la podemos medir con un aparato que se llama voltímetro y que ustedes tal vez la estén usando en laboratorio. Así que estas dos cosas podemos pensar que las medimos, la q la ponemos de afuera y la diferencia de potencial la medimos desde afuera de la caja con un voltímetro. Entonces, bueno, la idea es ver qué relación hay entre esta capacidad equivalente y c1 y c2. Entonces, lo primero que tenemos que pensar es si realmente para cada uno de estos dispositivos va a variar la ley de capacitor que mostramos la clase pasada, porque cuando hicimos la ley del capacitor la clase pasada, en cada par de chapas enfrentadas teníamos q y -q y ahora tenemos q de este lado y –q del otro. Ahora ¿hay –q en esta chapa? ¿Esto va a estar configurado como el capacitor que estudiamos la clase pasada? Y en este otro, ¿hay q en esta chapa? ¿Realmente en cada uno de ellos va a ver un sistema de q y –q y de q y -q? Esa es la primera cosa porque si no, no podemos estudiar este dispositivo con los elementos que desarrollamos la clase pasada. Fíjense una cosa, cuando uno interconecta estas dos patas, la chapa de la derecha del capacitor 1 y la chapa de la izquierda del capacitor 2, pasan a ser un único conductor. Están unidos, pasan a ser una sola cosa. Ese único conductor, tiene carga total 0, porque la carga la hemos puesto en esta chapa, en la chapa izquierda del 1 y la chapa derecha del 2, pero ese único conductor que quedó constituido en el medio, no lo hemos tocado, es decir no tenemos acceso a ese conductor. Sin embargo, este único conductor está ahora en presencia de cargas que están externas a él, ¿y qué pasa cuando yo pongo un conductor en presencia de cargas externas a él? Eso sí lo vimos la clase pasada, fue lo primero que vimos, si yo pongo un conductor en presencia de cargas externas, es decir, en presencia de un campo eléctrico externo, ¿qué le sucede al conductor? Se inducen cargas, es decir, recuerden que lo esencial de un conductor es que dispone de cargas no ligadas, es decir de cargas que pueden moverse, que pueden recorrer distancias microscópicas dentro del material, por lo tanto, esas cargas que pueden, que están libres de moverse, van a ser esas cargas negativas van a ser solicitadas por esta carga q positiva, las va a… esta carga q positiva va a traer cargas q negativas a esta chapa y esta carga q negativa va a atraer cargas positivas a esta chapa. Como este conductor, es este… tiene carga total 0 porque no lo hemos…. Está como estaba y estaba con carga total 0. Si se va carga negativa hacia la izquierda, atraída por esta carga positiva la misma capacidad de carga positiva va a quedar a la derecha atraída por la otra carga negativa, así el conductor en total va a ser neutro. Bueno, la cuestión va a ser ésta, y ustedes se preguntarán por qué va a ser la carga negativa que viene acá igual a la carga positiva que viene acá. Esto en todo caso, lo voy a dejar para después, sería fácil de demostrarlo si una placa envolviera a la otra que es lo esencial de un conductor, pero de hecho esto no es cierto en la realidad, en la realidad son dos chapitas que están enfrentadas y... tampoco son infinitas así que esto en realidad va a ser aproximadamente cierto, pero déjenme dejarlo para cuando terminemos de hacer el resultado de la conexión en serie.

Bueno, entonces, si aceptamos que esto es así, en definitiva, para verlo rápidamente vamos a decirlo ahora, para verlo rápidamente lo vamos a hacer así: yo puse cargas positivas acá, lo puse desde afuera de la carga, ¿no? Vine por acá y puse una carga q. Sabemos que esta carga q va a atraer carga negativa a la otra placa, va a inducir cargas en este objeto que es un único conductor, y lo mismo va a pasar de este lado, la carga negativa que puse de este lado, va a inducir cargas positivas en la otra parte del objeto, de manera que tiene que haber tanta carga negativa acá como positiva acá para que este objeto siga siendo carga total... eh, ahora el punto es porque acá va a venir exactamente –q y no otra cosa.

Bueno la razón es ésta, en realidad tiene que venir –q para que cada línea de campo, para que cada línea de campo eléctrico que nace acá, muera enfrente, ustedes saben que las líneas de campo eléctrico nacen en las cargas positivas y mueren en las cargas negativas, ahora, lo que pasa que esto no está completamente garantizado si este conductor no envuelve al otro o viceversa, se podría escapar alguna línea de campo para otro lado si todo esto está abierto, ese es el problema. Esos son efectos de borde nuevamente como dijimos la clase pasada, entonces cuando decimos acá va a haber exactamente la carga –q estamos despreciando efectos de borde y estamos despreciando el posible efecto de que alguna línea de campo se vaya por acá y caiga, no en una carga negativa acá, sino en una carga negativa en el otro lado. Bueno, esto lo vamos a despreciar y tenemos derecho a despreciarlo siempre que los efectos de borde, como habíamos dicho la clase pasada, este… se pueden despreciar siempre que, las dimensiones de la placa sean mucho mayores que la distancia entre ellas, es decir hay mucho menos chance de que ocurra esto si esto está bien juntito. Bueno entonces dicho esto, entendemos porqué podemos decir que la carga que viene inducida acá es justamente –q, es para atrapar las líneas de campo. Muy bien, una vez que tenemos esto, vamos a calcular la diferencia de potencial entre a y b. Esto que en un laboratorio lo haríamos midiendo con un voltímetro, entonces ustedes recuerden que la diferencia de potencial entre a y b, es por definición de potencial, el trabajo del campo eléctrico entre a y b, tomo un camino cualquiera para ir desde a hasta b y no importa cual porque el campo eléctrico es conservativo y eso me da la diferencia de potencial. Ahora ustedes saben que una entidad se puede descomponer en tramos, yo podría decir bueno, para ir de a hasta b primero voy desde a hasta c y después voy desde c hasta b. Con lo cual estoy diciendo que la diferencia de potencial la puedo descomponer en tramos y después sumar, es decir, esto no es ningún misterio, lo que estoy diciendo, que la diferencia de potencial entre a y b es la diferencial de potencial entre a y c, más la diferencia de potencial entre c y b.

No es ningún misterio porque al fin y al cabo lo que estamos haciendo al descomponer esta integral en dos tramos, es decir que Va – Vb lo puedo escribir también sumando y restando Vc porque si yo sumo y resto Vc no cambia nada, sigue dando Va – Vb. Pero al sumar y restar Vc, entonces yo combino el –Vc con el Va y esa es la diferencia de potencial en el capacitor 1, Va – Vc y el Vc que suma lo combino con el –Vb y eso es la diferencia de potencial en el capacitor b2, entonces esto es $\Delta V1 + \Delta V2$.

6

$V_A - V_B = \int E.\ dr = \int E.\ dr + \int E.\ dr =$

$= (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = \Delta v_1 + \Delta v_2$

*

Bueno, qué queremos hacer, queremos reemplazar ΔV ahí arriba para obtener la capacidad equivalente y que esa capacidad equivalente me dé en función de c1 y c2, entonces tengo que aparecer, hacer aparecer a c1 y c2.

Ahora fíjense, en cada capacitor se cumple la ley del capacitor, de manera que ΔV_1 y ΔV_2, la puedo escribir en función de c1 y c2 como 1/c1 + q2/c2.

7 $Q_1 = C_1\ \Delta V_1$

$Q_2 = C_2\ \Delta V_2$

$* = Q_1 / C_1 + Q_2 / C_2$

Pero como los capacitores están en serie, después de todo este análisis que hemos hecho, vemos que la carga del capacitor 1 y la carga del capacitor 2 son la misma. Recuerden cuál fue el planteo y el planteo es que tenemos dos capacitores en serie dentro de una caja negra, y ahí viene lo que dice ahí, acá adentro hay un único capacitor, que es el que llamamos C equivalente, no nos cuenta que hay dos, encuentre la capacidad, y yo digo bueno, puedo sacar q de un lado y –q del otro y ver qué diferencia de potencial sale. Pero qué ocurrió dentro de la caja con esa carga q y –q, la carga q se reunió con otra carga –q inducida, para armar la configuración típica del capacitor C1, y del capacitor C2 pasó lo mismo con la misma carga, por estar en serie, por la forma de estar interconectados, yo tuve que armar q por acá y –q por acá y eso armó la configuración con igual carga en los dos capacitores, es eso que está ahí arriba.

Por lo tanto, q1 y q2 son la misma, son la q del capacitor equivalente, ¿está bien? Quiere decir entonces que dV, dV es igual a q (1/c1 + 1/c2), entonces ahora vamos a ir arriba.

8 EN SERIE $Q_1 = Q_2 = Q$ del CAPACITOR EQUIVALENTE
$Q\ (1/C_1 + 1/C_2)$

Este dV que está acá, en lugar de medirlo con un voltímetro en la caja negra que es lo que uno haría en laboratorio, lo hemos calculado, este... abriendo la caja negra y dándonos cuenta que había dos capacitores,

entonces usamos la ley del capacitor en cada uno y obtenemos esto, obtenemos q(1/c1 + 1/c2), así que si reemplazo este resultado, q con q se va y el capacitor equivalente, tiene esta capacidad, entonces dos capacitores conectados en serie, funcionan como un único capacitor cuya capacidad se calcula así.

9
$C_{eq} = Q/\ \Delta V \rightarrow Q\ (1/C_1 + 1/C_2)$
$C_{eq} = 1\ /\ (1/C_1 + 1/C_2)$

La forma más fácil de recordar de la ley de capacidades, para capacidades en serie invirtiendo esta relación, es más mnemotécnico, invertir esta relación y presentar esto de esta manera:
q1 sobre c equivalente para capacitores en serie, estoy invirtiendo y al invertir esto me queda q1 sobre c1 más 1 sobre c2.

10
$1/C_{eq.\ serie} = 1/C_1 + 1/C_2$

La inversa de la capacidad en serie, la inversa de la capacidad equivalente para capacitores en serie es la suma de las inversas, es la forma más fácil de recordar. Por supuesto si en vez de dos capacitores hubiera puesto tres, cuatro o n, el resultado hubiera sido el mismo, hubiera sido la suma de las n inversas. Bueno, una vez que uno obtiene este resultado, tiene que pensar qué indica este resultado, ¿qué se encierra en esto? Si yo junto capacitores en serie, ¿gano capacidad o pierdo capacidad? La capacidad del capacitor equivalente, ¿ha sido más grande por este procedimiento? ¿ha sido más chica? ¿Cómo resultó esto? Esta es la ley, pero ¿qué significa esa ley? Para ponernos en una situación práctica, supongamos que las dos capacidades que estoy uniendo en serie fuesen iguales, vamos a dar un valor, un valor fácil, que cada una sea de un faradio, así que 1/1 es 1, esto me daría entonces 2, 2 sería la inversa de la capacidad equivalente, la capacidad equivalente sería ½, así que hubiera obtenido una capacidad equivalente menor que cualquiera de las dos, menor que c1 y menor que c2. Bueno, estas propiedades de la capacidad equivalente, es menor que cualquiera de las que intervienen en general, piensen por ejemplo si tuvieran un capacitor con 10 faradios y otro con 1, esto sería 1/10 + 1, sería 1,1, pero esa es la inversa de la capacidad equivalente, eh…, la inversa de la capacidad equivalente es 1,1 que seria algo así como 0,9, así que 0,9 sería más chico que el 10 y que el 1, sería más chico que cualquiera de los dos, el resultado entonces de la capacidad equivalente en serie, es más chico que cualquiera de las dos capacidades que intervienen.

CONEXIÓN DE CAPACITORES EN PARALELO [Escribe este título en el pizarrón]

2. A1: Pierde la capacidad por estar así en serie pero… ¿gana algo? O sea… ¿sirve de algo?

3. P: Digamos eh, si algo ganas podría decirse así, pero no me resultan las cosas muy… muy significativas, para una dada carga que vos quisieras almacenar, recuerden la idea de que el capacitor es un almacén de carga o de energía electrostática. Para una dada carga que quisiera almacenar, este... la estás almacenando digamos hacien… y para un dado potencial a cada capacitor lo estás sometiendo a menos potencial, los capacitores tienen una diferencia de potencial máximo que pueden soportar, de manera que puede ser que necesiten entonces, este…

algún juego de ese tipo para que cada capacitor no soporte una tensión demasiado grande, pero no. No me parece una…
Hablando de que el capacitor es un almacén de energía electrostática, yo la clase pasada les di el ejemplo del borrador que uno puede almacenar energía potencial, y en el momento que lo precise lo deja caer y de esa manera lo convierte en energía cinética, pero ¿cuál es el equivalente en el caso electrostático del capacitor? Uno puede almacenar energía electrostática y eso lo habíamos entendido, pero ¿cómo la usa después? ¿De qué manera lo usa? ¿Qué es lo equivalente a dejar caer el borrador? Bueno, por ejemplo uno podría tener un capacitor cargado, haber almacenado esa energía electrostática y después tomar las patas del capacitor y conectarla con una lamparita, ya que hablábamos hace un rato de una lamparita, con lo cual habría un destello de luz en la lamparita, bueno, eso es lo que ocurre en un flash por ejemplo. En un flash uno, con pilas, carga un capacitor y cuando precisa el destello luminoso, el capacitor se descarga a través de una llavecita que se acciona digamos, eso se hace automáticamente cuando uno dispara la cámara, hay un circuito que se acciona dentro de la cámara fotográfica, y esa carga que tenía almacenada el capacitor pasa a través del filamento de la lamparita y la enciende por una fracción de segundo, así que de esa manera se utiliza la energía electrostática almacenada, éste sería el equivalente de dejar caer el borrador.

Bueno… eh vamos a ver la conexión en paralelo, que va a ser más evidente para que se usa, porque ahí aumenta la capacidad, entonces eh... uno está aumentando el almacén de carga, en eso consistiría. Este… una conexión en paralelo es esto, aquí están los dos capacitores c1 y c2, y el resto de las rayas son cables, son material conductor que une las chapas entre si, igual que pasaba acá, son las patitas de alambre de las chapas, pero que están unidas de otra manera. 11

Entonces mientras que lo que definía a la conexión en serie además de la presentación del dibujito, lo que define a la conexión en serie es que todos los capacitores están a igual carga, eso fue lo que nos permitió escribir ahí q1 igual a q2 y con eso entonces poder llegar a encontrar la capacidad equivalente. A diferencia de la conexión en serie, la conexión en paralelo está definida porque todos los capacitores en lugar de estar a igual carga están a igual diferencia de potencial, y ¿por que están a igual diferencia de potencial? Si este es el borne a de la caja negra y este es el borne b de la caja negra, y esto es lo que hay dentro de la caja negra. Si yo abro la tapa de la caja y veo esta conexión... este... de cables que une las chapas... lo que digo es lo siguiente: como el cable está hecho de material conductor y el conductor es x potencial según vimos la clase pasada, entonces este punto a está a igual potencial que éste, que éste, éste, éste, y en particular, está a igual potencial que esta chapa, lo mismo si voy para acá, todo está unido con material conductor que es x potencial. Por lo tanto este punto a está a igual potencial que esta chapa, por lo tanto estas dos chapas izquierdas que es c1 y c2 están al mismo potencial, porque están unidas por un conductor, del mismo modo las chapas derechas de c1 y c2 están al mismo potencial que es el potencial del punto b, por lo tanto, las diferencias de potencial entre las chapas de c1 y entre las chapas de c2 son iguales, así que en una conexión en paralelo, lo que la… lo que la distingue es que las diferencias de potencial son iguales y en particular es igual a Va – Vb, es decir a la diferencia de potencial de la caja negra. ¿Ahora qué pasa con la carga? Yo voy a usar el mismo procedimiento que antes, voy a poner carga q de un lado de la caja negra y –q del otro lado. Entonces si yo pongo acá una carga q, esa carga q se va a repartir entre esta placa y esta placa, es decir, por empezar piensen que yo voy a poner carga positiva de este lado y carga negativa de este otro. Cargas de signo opuesto se atraen, así que van a tratar de estar lo más junto posible, lo más junto posible es sobre las placas del condensador, más no se pueden juntar porque entre las placas hay un aislante, hay aire, hay vacío, hay algún otro material aislante que no permita el paso de las cargas. Entonces esa carga positiva que entra de un lado y la carga negativa que entra del otro van a buscar juntarse lo más posible, entonces va a formar... se va a disponer de esta manera.

Ahora, a menos que las dos capacidades sean iguales, la disposición no va a tener porqué ser simétrica, no va a 12 tener por qué ser q1 igual a q2, según sea la capacidad c1 y c2, la carga va a preferir estar en c1 o en c2, no sabemos en donde, pero no tenemos porqué suponer ahora que la carga va a estar en partes iguales en los dos capacitores, lo que si sabemos es que esta q1 y esta q2, es la suma de toda la carga que pusimos por el borne a, es decir lo que sí sabemos es que la carga de la caja negra es q1 más q2.

Esta es la carga del capacitor equivalente, y además sabemos que en el capacitor c1 y en el capacitor c2 ha quedado formada la configuración de carga típica de un capacitor, es decir nuevamente tiene que haber tanta carga positiva como negativa del otro lado, porque cada línea que nace en una carga positiva va a morir en una carga negativa así que va a atraer la carga negativa que necesita para morir ahí, a menos efectos de borde, a menos de que se escape alguna línea hacia fuera.

13

$Q = Q_1 + Q_2$

↑

Carga del capacitor equivalente

Justamente insisto, las configuraciones ideales para un capacitor son donde un conductor envuelve a otro porque así no se puede escapar ninguna línea, porque para escaparse tendría que atravesar el conductor y como ustedes saben dentro del conductor el campo es cero, así que no lo puede atravesar.

Entonces si esto que está acá es la carga del capacitor equivalente, es la carga de la caja negra y esto que está acá es la diferencia de potencial de la caja negra, entonces lo que está acá no tiene más remedio que ser la capacidad equivalente porque es la relación entre la carga de la caja sobre la diferencia de potencial de la caja, conclusión,

la capacidad equivalente en paralelo es así, 15 $C_{eq.\ paralelo} = C_1 + C_2$

es la suma, y por lo tanto la capacidad equivalente en paralelo siempre es mayor que cualquiera de las capacidades, porque siempre a c1 se le suma c2 y a c2 se le suma c1 así que el resultado es siempre mayor que cualquiera de las capacidades conectadas en paralelo. Así que volviendo a la pregunta anterior, acá podemos decir que si yo

Bueno… muy bien, como se ha formado la configuración del capacitor, yo ahora puedo decir tanto en 1 como en 2 vale la ley del capacitor, es decir, vale que c1 x dv1 es q1 y que c2 x dv2 es q2, pero por estar en paralelo dv1 y dv2 son iguales, entonces esto es (c1 + c2)(Va – Vb), porque tanto dv1 como dv2 son iguales a Va – Vb que es lo que está escrito acá arriba, ahora Va – Vb es justamente la diferencia de potencial de la caja negra, es la diferencia de potencial del capacitor equivalente.

14

$= C_1\,\Delta V_1 + C_2\,\Delta V_2$

$= (C_1 + C_2)\,(V_A - V_B)$

↑

diferencia de potencial del capacitor equivalente

dispongo de una fuente de tensión para cargar un capacitor y almacenar carga, si yo quiero almacenar más carga, necesito aumentar la capacidad, si yo no puedo cambiar la diferencia de potencial porque ésta es una fuente que tengo en el laboratorio que vale 3 volt, 12 volt, lo que fuere, pero quiero almacenar más carga, la única forma de hacerlo, si no puedo cambiar la fuente, es aumentar la capacidad, y la forma de aumentar la capacidad es conectar capacitores en paralelo o comprar un capacitor más grande, pero si no tengo, conecto en paralelo y aumento la capacidad.

Bueno... la clase pasada quedaron pendientes algunas cosas que, les dije, que quedaron pendientes solamente para avanzar un poco con los condensadores y que tengan material para trabajar en laboratorio. Así que voy a volver un poco para atrás.

Ustedes se acuerdan que habíamos calculado el campo eléctrico de una esfera uniformemente cargada y lo habíamos calculado en todo el espacio, recuerden que el campo eléctrico es una función en todo el espacio, es una función vectorial, entonces cuando se les pregunta: calcule el campo eléctrico, ustedes tienen que pensar que tienen que ocuparse de todos

los puntos del espacio, entonces, los puntos que están por fuera de la esfera,
obviamente tienen por asimetría del problema, digamos, están en pie de igualdad con tal de que yo mantenga la distancia de la esfera, este punto o este punto, o todo lo que tenga el mismo r, van a tener el mismo campo, al menos en módulo, la dirección va a cambiar, ¿está bien?, porque la dirección del campo va a ser radial, pero obviamente los puntos que están dentro de la esfera están en otra situación diferente y entonces hay que calcular, hay que dividir el cálculo en el campo afuera y el campo adentro que es lo que hicimos la clase pasada. Se acuerdan que habíamos obtenido que el módulo del campo eléctrico como función de r, crecía linealmente mientras estábamos dentro de la esfera, es decir hasta una distancia igual al radio de la esfera crecía linealmente, en particular era cero dentro de la esfera y luego fuera de la esfera se comportaba como el campo de una carga puntual, es decir caía como $1/r^2$. Esto se escribe así, había dado una cosa por el estilo… fuera de la esfera si r era mayor que R grande, era el campo de una carga puntual donde q era la carga total de la esfera, era $4/3\ \pi\ r^3$, que es el volumen de la esfera, por la densidad.

Dentro de la esfera el resultado era lineal, vamos a ver si lo tengo…. Bueno esto estaba calculado, en particular fíjense, esta función lineal corresponde a esta recta que está acá. Esta… Cuando r chica es igual al radio de la esfera, tiene que estar unido, el campo es continuo en ese lugar, tiene el mismo valor, lo que cambia es su derivada, pero el valor de E, el valor del módulo del campo eléctrico es el mismo.
¿Ustedes ven en estas dos expresiones que se obtenga el mismo valor cuando, cuando r chica es igual a R grande? Vamos a ver, q es igual a $4/3\ \pi\ r^3$ por ζ así que imagínense que reemplazamos acá los 4/3 π con este 4 π me queda 1/3, ya tengo el 1/3 que está acá arriba, después tengo un ζ, así que acá va a haber un ζ, que es el ζ que hay acá arriba, pero tengo $R^3/\ r^2$ ahora cuando R grande sea igual a r chica, es decir cuando esté parado en el borde de la esfera $R^3/\ r^2$ me da r arriba como hay acá, ¿está bien?

$$E\ ® = \begin{cases} Qr\ /\ 3\ E_0 & r < R \\ Q\ /\ 4\Pi\ E_0\, r^2 & r > R \end{cases}$$

Así que eso es la continuidad en este punto.

Bueno… lo que les quería pedir es que imaginen cuál es el potencial adentro y afuera de una esfera cargada uniformemente. Si afuera es el campo de una carga puntual, entonces afuera es el potencial de una carga puntual, ¿bien?

16

$Q = (4/3\ \Pi\ R^3)\ \sigma \rightarrow$ densidad de la carga
↑
volumen de la esfera

¿Estamos seguros de eso? El potencial y el campo eléctrico están íntimamente relacionados, si yo tengo el potencial, pongo menos el gradiente y me da el campo, si yo tengo el campo, que a todos los efectos es el campo de una carga puntual, el potencial asociado a ese campo también tiene que ser el de una carga puntual, aunque ese campo no provenga de una carga puntual sino de una esfera de tamaño finito, así que el potencial también hay que dividirlo adentro y afuera, pero afuera ya lo conozco, porque conozco el potencial de una carga puntual, así que si me preguntan por el potencial… también lo divido en dos regiones y para la región exterior uso el potencial de la carga puntual.

¿Cual es el potencial de la carga puntual? K * q sobre la distancia a la carga… k * q sobre la distancia a la carga, la distancia a la carga ahora es reemplazada por la distancia al centro de la esfera, así es k * q sobre R y el k recuerden que lo hemos llamado $1/\ 4\ \pi\ \varepsilon_0$, así que queda $(1/\ 4\ \pi\ \varepsilon_0)$ * q / R.

$V\ (r) = -\ q\ /\ 3E_0\ r^2/2 + cte.$ $r < R$

$1/\ 4\ \Pi\ E_0\ .\ Q/r$ $r > R$

$E = -\ \nabla\ r = dv\ /\ dr\ \hat{r}$

Verificación: E es igual a menos el gradiente de potencial, ¿qué significa tomar el gradiente? Derivar y multiplicar por un versor asociado a la coordenada respecto a la cual derivamos, esencialmente es eso. Acá sería… la derivada respecto a... en realidad esta cosa vale para coordenadas cartesianas y cuando salimos de coordenadas cartesianas hay que hacerlo sabiendo, yo estoy usando acá una coordenada radial, esteee y sigo diciendo que vale lo mismo, en realidad no tendría porqué ser así, pero piensen que una coordenada radial yo la puedo poner sobre un eje cartesiano, así que una coordenada radial no se diferencia de una coordenada cartesiana cuando yo tengo un problema de esta naturaleza, donde la única coordenada es r, yo esa r la puedo imaginar tendida sobre un eje cartesiano y la asimilo a la x, ahora si tuviera un ángulo sería otra cosa, no, no sería cierto, de hecho se calcularía de otra manera, son cosas que los físicos vemos en otras materias de matemática que ustedes no han hecho, así que ustedes no se preocupen porque nadie va a pretender que sepan esos detalles, pero la idea básica es ésta, si yo a la r la puedo asimilar a una coordenada cartesiana puedo seguir usando esto, y fíjense lo que pasaría, yo derivo acá respecto de r y me queda $-1/r^2$ y con este menos acá, me queda el $1/r^2$, que es el $1/r^2$ que es la expresión del campo eléctrico. Así que esto anda perfectamente bien, pero la idea básica es que si el campo es el de una carga puntual, el potencial también… Ahora en la otra región, en la región interna de la esfera, el campo no es el de una carga puntual, es otra cosa, y si alguien viene y les pregunta cuál es el potencial, bueno ustedes saben que si yo conozco el campo eléctrico puedo obtener el potencial integrando o bien puedo reflexionar un poco a partir de esta idea que es lo mismo finalmente. Si yo veo que el campo eléctrico me está dando r por una constante, pero la dependencia funcional es lineal, es r,

¿qué cosa derivada me va a dar r? r^2, más precisamente $r^2/2$, la derivada de $r^2/2$ da r, pero como después le voy a cambiar el signo, lo que voy a usar como b es $r^2/2$ para obtener, al derivar, el resultado que está ahí arriba, por lo tanto, lo que va acá es 3 ε_0 $r^2/2$…	18 $- q / 3E_0\ r^2/2 + \text{cte.} \quad r < R$

Perdón porque acá hay otro tema que queremos considerar, ustedes recuerdan que el potencial estaba siempre definido a menos de una constante, es decir, si yo le sumo la constante, la derivada de la constante se esfuma, la derivada de una constante es cero, así que si yo aumento a b por una constante, el campo eléctrico no se altera, da lo mismo, a los efectos de calcular el campo eléctrico da lo mismo poner o no poner la constante, sin embargo, a los efectos de tener un potencial continuo como lo es también el campo eléctrico, yo necesito la constante para empalmar con el potencial que está acá abajo. El campo eléctrico no se entera de la constante, y el objeto fundamental del campo eléctrico, y el campo eléctrico es el que hace la fuerza sobre otra carga, pero si yo quiero razonar en términos de potencial y quiero pensar al potencial también como una función continua, cuando tengo el potencial descompuesto en varias regiones, las constantes las tengo que usar, las tengo que usar para empalmar entre distintas regiones. Entonces ¿cómo se elige acá la constante? Imponiendo la continuidad entre las dos regiones, imponiendo que cuando r chica sea igual a R grande, lo que tengo acá me dé lo mismo que lo que tengo acá, entonces la constante se elige… Y ustedes me van a decir ¿por qué no puso la constante abajo también? Bueno, podría haber puesto la constante abajo, lo que pasa que yo tengo una sola condición de empalme, tengo que poner la continuidad de r chica igual a R grande y para eso me basta con una constante, puedo ponerla abajo o puedo ponerla arriba, lo que pasa que hay una convención, que es la convención de dónde se elige el cero del potencial, no sé si esto ya lo han hablado en la clase práctica... pero cuando ustedes tienen una configuración de carga como la que estamos considerando que es la esfera, que está confinada, está localizada en algún lugar del espacio que no llega al infinito, la convención, para el cero del potencial, es equivalente en el caso de potencial gravitatorio a dónde ponemos el nivel de altura cero, la convención para el cero de potencial es elegir el cero de potencial en el infinito, entonces, el infinito está en la región exterior por supuesto, fíjense lo que pasa en la región exterior cuando r tiende a infinito, esto va así, si yo pusiera la constante acá, estaría eligiendo otra convención, es convencional elegir el cero de potencial en el infinito. Si quieren trabajar con una constante acá lo pueden hacer, pero están usando otro cero de potencial. Entonces yo acá no puse la constante para ajustarme a esa convención que cuando estudiamos cargas que están localizadas. Se elige el cero de potencial, se elige porque el cero de los potenciales siempre es una convención, siempre están definidos a menos de una constante, bueno, se elige esa constante para que el potencial sea cero en el infinito. Entonces como esto ya es cero en el infinito, acá no pongo ninguna constante, y la constante la pongo acá para asegurarme continuidad, después calculo que esto sea igual a esto, r chica igual a R grande y de ahí sale el valor de la cosa, bueno muy bien…. Vamos a ver en qué podemos usar esto para una de las propiedades de los conductores que no tratamos la clase pasada. Yo mencioné, pero sin demostrar el efecto de puntas, habíamos dicho que, bueno, que en un conductor el campo eléctrico es cero dentro del conductor, que eso implicaba también que no había carga neta dentro del conductor, sino que la carga de un conductor siempre iba a la superficie, al menos cuando estábamos en condiciones electrostáticas que es lo único que sabemos por ahora… Entonces… yo luego había dicho que había una propiedad de los conductores que se llama efecto de puntas, que si el conductor tiene una punta, es decir tiene algún lugar de mayor curvatura, la carga prefiere ir ahí y que eso tenía que ver con el diseño de los pararrayos, entonces voy a hacer ahora una demostración del efecto de punta, yo no sé en qué orden, que numeración llevábamos, si estábamos en la cuarta o en la quinta propiedad, creo que me tocaría la quinta propiedad… Entonces, como es muy difícil considerar un conductor de forma arbitraria, que tenga alguna punta en algún lugar y qué sé yo, es un problema muy difícil de tratar, de saber realmente cuánto vale la carga en cada lugar de la superficie.

Para imaginar una demostración de este efecto de punta, vamos a considerar una forma muy sencilla de conductor, vamos a considerar un conductor que está formado por dos piezas esféricas, de distinto radio unidas por un conductor, todo esto es un único material conductor, por lo tanto es un x potencial, etc., etc.… pero lo que queremos demostrar es que donde la superficie es más curvada, se junta más carga.

19

Entonces, a esto lo vamos a llamar r1 y a esto lo vamos a llamar r2, como ustedes van a ver esta es una demostración de carácter bastante cualitativo, no vamos a hacer un cálculo exacto de la carga en este extremo y en este extremo, sino que vamos a hacer un cálculo medio aproximado para lograr esa idea de que hay un efecto de punta, de que la carga se acumula donde la superficie está más curvada. Entonces voy a tomar un punto a próximo a la superficie de un conductor del lado del que curvaría el papel de la punta y un punto b, próximo a la superficie de un conductor del lado del que es más… más plano digamos, que se parece más a un plano. Bueno, entonces voy a considerar el valor del campo en a, el valor del campo en b, el potencial en a y el potencial en b y después voy a decir que como todo esto es un único conductor el potencial en a y el potencial en b tienen que ser iguales, y de esa igualdad pasaría a una relación entre las cargas.

El campo en a y el campo en b está relacionado con la carga porque estamos pensando en el campo en un punto próximo a la superficie de un conductor y para eso teníamos la propiedad 4, creo que era, que decía que el campo próximo a la superficie de un conductor era la carga en ese lugar de la superficie sobre ε_0 mientras que en el punto b vamos a decir lo mismo pero con la carga en el punto b de la superficie esto es una relación entre campo y densidad de carga en la superficie del conductor el valor del campo está determinado por la densidad de carga en ese lugar.

1. $E_A = \delta A/E_0$ $V_A =$
2. $E_B = \delta B/E_0$ $V_B =$
3. Esta es una   hasta ahora,
   esto relación entre   no es
   aproximado,
4. campo y densidad   está bien
5. de carga

Se acuerdan que habíamos hecho la superficie de Gauss, habíamos envuelto un pedacito de conductor, esteee y de ahí salía el campo eléctrico y quedaba relacionado con la carga encerrada por esa superficie de Gauss, así que esa carga venía dada por la sigma en ese lugar, no en otro lugar. Bien, ahora, en cuanto al potencial, acá viene… hasta ahora esto no es aproximado, esto está bien, pero para el potencial vamos a decir dos cosas: por un lado, como es un conductor esos dos potenciales tienen que ser iguales, pero por otro lado, como estamos pensando en esta geometría tan peculiar, vamos a decir, que además, el potencial en a se tiene que parecer al de una esfera de radio 1 y el potencial en b se tiene que parecer al de una esfera de radio 2, r2… Y acá tenemos el potencial de una esfera, este potencial de una esfera para ponerlo en relación con la densidad de carga, tenemos que recordar que la carga es 4/3 π… lo que estaba escrito ahí arriba, 4/3 π r^3б… eh... perdón, dije mal… esto era una bola de carga, no era un conductor, era una bola de carga uniformemente cargada, esto en cambio es un conductor, y en un conductor la carga no está uniformemente por todo el volumen sino que está en la superficie… así que no pongamos nada ahí y pongámoslo en cambio ahí… ¿Me entienden lo que estoy diciendo?, son dos problemas diferentes, una cosa es una bola cargada uniformemente y otra cosa es un conductor esférico donde la carga no está desparramada por todo el volumen sino que está en la superficie, ¿está bien? Entonces, yo voy a hacer la suposición de que como esta esfera está muy alejada de la otra se influencian poco, entonces como tiene forma esférica este cuerpo, la carga está más o menos uniformemente distribuida como correspondería en una esfera aislada, no va a ser así, esa es una primera aproximación, no va a ser así porque no está aislada, hay otro cuerpo acá cargado. Entonces esa es una aproximación ya bastante gruesa, es decir, voy a aproximar el potencial en el punto a, como el potencial de una esfera conductora cargada, aislada, es decir, donde la carga se halla distribuida uniformemente por simetría porque sólo está la esfera en el espacio y nada más que haga que la carga prefiera un lugar y no otro. Entonces digo, bueno, como el punto "a" está fuera de la esfera, vale todo lo que sabemos para puntos fuera de esferas uniformemente cargadas, fuera de la esfera lo que veo es el potencial de una carga puntual, fuera de la esfera veo esto, nada más que ahora q está ahora sobre la superficie porque es un conductor y no sobre el volumen, así que fuera de la esfera yo veo 1 /4 π ε_0 q de la esfera a sobre r1, porque estoy parado sobre una distancia que es prácticamente igual a r1, acá vamos a poner un aproximado para que ustedes recuerden todo lo que hemos dicho sobre las aproximaciones que entran en juego. Y bueno, como la carga, como el cuerpo es conductor y entonces la carga está en superficie, la carga de la esfera será la superficie de la esfera que es 4 π $r1^2$ por la densidad de cargas y como estamos pensando que esta esfera está más o menos uniformemente, la carga está más o menos uniformemente distribuida, vamos a poner la misma бa en todos lados, sobre el r1 que está abajo. Entonces estoy tomando a la esfera como si estuviera aislada, por lo tanto su carga distribuida uniformemente, en ese caso el potencial fuera de la esfera es el potencial de una carga puntual, pero no estoy en cualquier lugar fuera de la esfera sino que estoy prácticamente sobre la esfera, entonces estoy a una distancia igual al radio de la esfera y la carga la reemplazo por la carga uniformemente distribuida en la superficie de una esfera 4 π r^2б. Bueno, entonces acá hago una simplificación... ah me falta, acá también puedo simplificar y el resultado aquí es б r1/ ε_0. Todo esto que dije para la esfera de radio 1, lo puedo decir para la esfera de radio r2 así que no hace falta que haga esta otra cuenta, ya la tengo hecha, el potencial en b se puede aproximar por б en b, r2/ ε_0…

Muy bien… ahora todo el cuerpo es conductor, por lo tanto es equipotencial. Esto es exacto, acá no hay ninguna aproximación, es la propiedad de un conductor en equilibrio electrostático, entonces reemplazando por estas cosas aproximadas que encontramos podemos decir que б r1/ ε_0 es aproximadamente igual a б en b r2/ ε_0, simplificando el ε_0 tengo que бa/ бb es aproximadamente r2/r1.

Todo el cuerpo es conductor. Por lo tanto (es equipotencial)

$V_A=V_B$

$\delta A R_1/\cancel{E_0} \approx \delta B R_2/\cancel{E_0}$

$\delta A / \delta B = R_2 / R_1 \oplus$

Bueno, el efecto de puntas de lo que se refiere a la distribución de cargas, sale solamente de este análisis de potencial, después con el campo eléctrico vamos a concluir algo sobre el campo eléctrico, lo que sale es que, como r1 es mucho menor que r2, este número es muy grande, si yo divido por un número muy chico, el resultado es muy grande, por lo tanto бa es mucho mayor que бb,

las cargas se acumulan mucho más en las puntas que en otros lugares. Entonces si r1 es mucho menor que r2, entonces бa es mucho mayor que бb.

21

$R_1 << R_2 \Rightarrow$

$\oplus \Rightarrow \delta A >> \delta B$ Efecto de puntas

Con respecto al campo eléctrico podemos decir lo mismo, si yo acá tomo el cociente de campos eléctricos, es igual a бa/бb, entonces así como la carga en a es mucho mayor que la carga en b, también el campo eléctrico en a es mucho mayor que el campo eléctrico en b, es obvio porque el campo eléctrico está directamente relacionado con la densidad de carga en cada lugar… Bueno, hacemos entonces el intervalo.

Intervalo.

4. Bueno… vamos a ver una aplicación o una consecuencia del efecto de punta.

Supongan que yo tomo un conductor que tiene entonces, una punta, y tiene toda esta área, lo cargo, pongo carga sobre el conductor, ésta no es la carga inducida, la carga que en el propio conductor se separa por efectos de un campo externo a él, acá por ejemplo podría no haber ningún campo externo, pero yo fui y cargué el conductor, puse carga sobre él.

Ya sabemos que esa carga va a estar sobre la superficie y ya sabemos que se va a juntar más donde haya una punta, entonces éste sería más o menos el gráfico de lo que podría ocurrir. Como consecuencia de esto en la proximidad de la punta hay un campo eléctrico muy grande, es otra de las consecuencias que vimos antes… Entonces, el campo eléctrico sobre un conductor, como ustedes saben, es proporcional a la densidad de carga y si la densidad de carga es mayor donde está la punta el campo eléctrico es grande. Entonces una manera de obtener un campo eléctrico muy grande, es cargar un conductor con una punta, en la zona de la punta va a haber un campo eléctrico muy grande.

Ahora, imagínense qué es lo que pasaría si, si primero yo coloco acá una placa metálica, por ejemplo. ¿Qué pasaría?

22

Si esta es una placa metálica, bueno, habiendo tantas cargas positivas, acá se va a inducir cargas negativas, ¿no es cierto? Y si la placa está descargada, del otro lado de la placa quedarán algunas cargas positivas, eso sería una inducción, una inducción de la placa de arriba debido al cuerpo de abajo. Ahora ¿qué pasaría si por acá, por el aire… este… consideremos una molécula cualquiera de aire que se aproxime a la punta? En la molécula, bueno, la molécula está formada por 1, 2, 3 átomos, depende la molécula de la que se trate y en esos átomos hay cargas positivas y cargas negativas. La carga negativa va a ser atraída hacia la punta que está cargada positivamente y si el campo eléctrico es muy intenso, ese efecto va a ser despreciable. Por otro lado la carga positiva va a ser repelida por la punta, pero tanto esa carga positiva como negativa forma parte de la molécula, lo que está haciendo el campo eléctrico, entonces es deformar la molécula, está tirando de un lado, del lado de la carga negativa y está repeliendo la carga positiva. Si esa acción es muy intensa puede llegar a romper la molécula, ionizarla, entonces una vez que la molécula se rompe, que se ioniza, que queda descompuesta en dos partes, una con carga negativa y otra con carga positiva, ¿que le va a pasar a cada parte? La carga negativa va a ser atraída por la positiva, se va a meter en el conductor, la carga positiva va a salir disparada para acá, ¿está bien? Ahora, va a salir disparada con gran aceleración porque está sintiendo una fuerza eléctrica muy grande y va a chocar a otras moléculas de aire ¿Qué les parece que puede llegar a suceder cuando un ion a gran velocidad choca contra otra molécula? Puede ser que la ionice también, que la rompa también por el efecto del choque, de manera que en este viaje que intenta hacer la carga hasta allá, la carga positiva, la que quedó suelta, estee, va a ir chocando otras moléculas y las va a ir ionizando también, con lo cual van a seguir viniendo cargas negativas para acá y yéndose cargas positivas para allá, finalmente lo que se va a formar acá es todo una zona de una chispa eléctrica, la chispa eléctrica, la luz proviene de que en esos choques, no sólo se rompen las moléculas, se ionizan, sino también que, ustedes saben que una molécula está formada por todo una estructura de orbitales, ustedes saben que la mecánica cuántica dice que los electrones no están en cualquier lugar sino que están en ciertas órbitas de cierta energía y que se puede hacer una transición de una órbita más baja a una órbita más alta si se recibe energía desde afuera, si se excita al átomo, pero que ese estado en una orbita más alta es inestable y luego de un tiempo decae a la orbita más baja emitiendo luz, esa es la luz que vemos en el rayo, en la chispa. Bueno, entonces esto mismo que está acá, puede ser una nube y un pararrayos sobre la tierra, entonces la idea de los pararrayos es que, en realidad pasa lo contrario, no es que nosotros cargamos la tierra, sino que las nubes se cargan con distinta carga, va a haber nubes que pasen por acá arriba cargadas positivamente y nubes que pasen negativamente, que sé yo. Puede haber descargas entre nubes, que son los relámpagos, este… pero la idea es que si una descarga se tiene que producir con la tierra, que haya un lugar preferido de la tierra que el rayo busque, para no hacer daño en otro lugar, esa es la idea del pararrayo.

5. A2: ¿Cómo se carga una nube?

6. P: Y se puede cargar por rozamiento, por ejemplo con otras nubes. Francamente, la cuestión precisa no la conozco, hay un capítulo en el libro de Feymann, es un libro que yo no les di en la bibliografía porque es un libro para físicos más bien, pero el curso de Feymann… porque es un tema que pocos tratan, esto de las tormentas eléctricas y cómo se cargan las nubes y todo eso, ¿no? Pero en el libro de Feymann, en el tomo 2 que es el tomo de electricidad y magnetismo, hay todo un capítulo dedicado a esto, así que pueden buscar ahí y si yo me acuerdo lo busco y lo comento la clase que viene... este... Pero bueno, este sería el mecanismo del pararrayo. Fíjense entonces que un elemento que uno considere como aislante, como podría ser el aire seco, por ejemplo o algún otro material, no importa, puede llegar a volverse conductor por esta ruptura, que se produce al aplicar un campo muy intenso, esto de romper moléculas y ionizarlas y que cada uno de los iones forme parte de la corriente, indica que cuando uno habla de un material aislante, no puede decir que sea 100% aislante, es aislante si no se le aplica un campo eléctrico muy intenso, hay materiales que son mejor aislantes que otros, porque soportan campos eléctricos más intensos sin llegar a esta ruptura…

Bueno, la otra propiedad que había quedado pendiente es la propiedad del blindaje. Yo les dije que, por un lado habíamos averiguado que, dentro de un conductor el campo eléctrico era cero, eso significaba dentro de la masa del conductor, dentro del material conductor y siempre que tuviésemos en equilibrio electrostático, va a dejar de ser cierto cuando pase una corriente dentro del conductor.

6) Blindaje

el campo electrostático es nulo en 1 hueco vacío practicado en un conductor

Pero nosotros por ahora estamos estudiando el equilibrio electrostático, y les dije la clase pasada que no sólo eso ocurría dentro del material conductor, sino que si hacíamos un hueco dentro del material, de manera que estuviese completamente rodeado por el conductor y si ese hueco está vacío, si ponemos carga acá dentro es otra historia, si ponemos carga acá van a nacer líneas de campo o van a morir líneas de campo, pero si ese hueco está vacío, entonces dentro del hueco también es cero el campo eléctrico. La propiedad sería entonces que el campo eléctrico se anula, electrostático, dentro de un hueco vacío, practicado en un conductor. Bueno, hoy queremos demostrar esta propiedad y yo les había dicho que esta propiedad era muy importante porque permitía blindar regiones de un laboratorio de campos eléctricos externos, si yo quiero practicar un experimento y quiero aislar el experimento de cualquier influencia eléctrica externa, entonces hago el experimento en lo que se llama caja de Faraday, es el nombre que se le da a esta forma de blindaje, hago el experimento dentro de un material conductor, lo rodeo de un material conductor y de esa manera blindo la región del experimento de influencia eléctrica externa. Bueno caja de Faraday, jaula de Faraday también se llama. Bueno, ¿cómo se demuestra esto? La manera más sencilla de demostrarlo es mediante un razonamiento por el absurdo. Este es un tipo de razonamiento que les gusta a los matemáticos, la idea del razonamiento es, si usted quiere demostrar que algo es cierto, primero supongo que no es cierto y veo a qué me conduce, si me conduce a un absurdo entonces era falso que no fuera cierto, es decir, la hipótesis era falsa. Entonces si yo quiero demostrar una cierta cosa, tomo como hipótesis la opuesta de esa cosa, entonces si veo que me lleva a una situación absurda, entonces la hipótesis que tomé era falsa y la que vale entonces es la que yo quería demostrar. Entonces si yo quiero demostrar que el campo eléctrico es cero, parto del absurdo, parto...

La hipótesis era falsa y la que vale es la que yo quería demostrar.
Si quiero demostrar que el campo es cero, parto de suponer que no.

SUPONGAMOS QUE HAY UN CAMPO ELECTRICO. COMO LAS LÍNEAS DE CAMPO NACEN EN CARGAS POSITIVAS Y MUEREN EN LAS NEGATIVAS, ENTONCES

dibujo

Si esto es cierto voy a calcular la diferencia de potencial entre A y B.
Sé que la diferencia de potencial se calcula así:

ENTONCES:

VA – VB = E. dr

Como el camino elegido coincide con la línea de campo:

$\Rightarrow$ E . dr = $|E|\ |dr| > 0$

$\Rightarrow$ VA – VB > 0 (absurdo!)

$\Rightarrow$ E = 0 dentro del hueco.

7. A: [no se oye]

8. ...Porque el producto escalar...

POTENCIAL DE UN DIPOLO ELÉCTRICO

Cálculo eléctrico no lo habíamos calculado, lo habíamos dibujado. El potencial cumple el principio de…

Dibujo

$V = V_1 + V_2 = kq_1 / d_1 + kq_2 / d_2$

$= k (1 / d_1 - 1 / d_2)$

Qué quiere decir estar muy lejos de la configuración
La única otra distancia… en el problema
Cuando la distancia entre las cargas tiende a 0.

SI d1 d2 >> l

De eso se trata. Si este segmento es chico.
d1 = hip
d2: cateto
d2 ≈ d1 + l cos σ
$V \approx kq / d_1$ [1 – 1 / 1+ l/d1 cos σ]

Sale por factor común

<< 1

$\Rightarrow$ $(1 + E)^{-1}$

9. A3: ¿Por qué le suma l cos δ?

10. P: … ¿se ve eso?

Hay una aproximación física que es muy frecuente

$f(E) = (1 + E)^{\alpha}$ $E << 1$

$f(E) = f_0 + f'(_0)\, E + \delta\, (E^2)$

$= 1 + \alpha E + ...$

En nuestro caso lo que tenemos es

$V \approx kq / d_1 [1 - (1 - l/d1 \cos \sigma)]$

$V \approx kq / d_1^2\, l \cos \sigma$

El producto q l recibe el nombre de momento bipolar eléctrico: p = ql En realidad es un vector p.
Una molécula puede ser un dipolo.
Campo, potencial de esa molécula es un dipolo.

Se escribe directamente así.

V dipolo $= kq \cos \sigma / d^2$

11. A1: Una pregunta ¿no queda la distancia, d1 al cuadrado?

12. P: Porque (le pone el cuadrado).
Esto era una cosa esencial. Gracias.

Dibujos

Hay más carga negativa cerca del cloro que del hidrógeno.

Otra molécula es la molécula de agua.
De manera que la carga positiva está del lado del hidrógeno.

MOLECULAS POLARES (TIENEN MOMENTO DIPOLAR PERMANENTE)

En cambio en el dióxido de carbono, no tiene momento dipolar.

NO POLARES (NO TIENEN)
PUEDO GENERARLE MOMENTO DIPOLAR
Momento dipolar inducido
Moléculas polares, las que tienen momento bipolar permanente

Va a pasar a depender de un material aislante.
Otra forma de aumentar la capacidad es...

Bueno, nada más.

CASO 6. PROFESOR C

Movimiento de cargas. Ciclotrón. Efecto Hall. Relatividad.

Dibujo

$$F_{mag} = q\, v \times B$$
$$R = m\, v_1 / qB$$
$$\omega = qB / m$$

$q > 0$

$q < 0$

1. P: La velocidad tangencial... Esta velocidad angular, en cambio, no depende de su radio. Entonces esta es la idea para hacer el CICLOTRON [Lo escribe en el pizarrón]. El ciclotrón es una suerte de carcasa metálica con forma, digamos, de torta o de horma de queso, donde se le hace un corte… Entonces es una carcasa metálica hueca con forma aproximadamente de torta. Entonces, la idea es poner todo esto en un campo magnético. Y tener alguna fuente en algún lugar de la torta, en el interior, alguna fuente de partículas cargadas. Esa fuente se coloca en la zona central. Si uno ve esto por arriba, esto es [dibuja en el pizarrón].
Y acá en esta zona hay una fuente repartiendo la carga. Entonces estamos en presencia de un campo magnético, así que tenemos la situación de que está… Según sea el signo de la carga. Digamos que la carga es positiva. Bueno ¿qué va a pasar? Si yo tengo una carga positiva, moviéndose por ejemplo acá, hacia la izquierda. Bueno, como estoy en presencia de un campo magnético, esta es una condición inicial para que… un movimiento circular, de manera qué, al cabo de un cierto período, están apareciendo, en la mitad de la circunferencia, estarán apareciendo nuevamente por la zona central de la torre. Ahora la idea para acelerar la partícula cargada, porque hasta acá no se aceleró, se aceleró en forma centrípeta porque cambió la dirección de su velocidad, pero su módulo no ha cambiado porque las fuerzas magnéticas no realizan trabajo. Ahora, la idea es poner todo esto a una diferencia de potencial. O sea, conseguir que acá haya un campo eléctrico entre estas dos carcasas. Estas dos carcasas se cargan, de manera que hay un campo eléctrico entre ellas. Entre estas dos carcasas el campo eléctrico va a ser muy débil… entre dos carcasas que son conductoras. Así que ese campo… preferentemente acá, entre las dos carcasas cargadas. Entonces la idea es que, cuando la partícula llegue acá, encuentre este campo y este campo sea el que haga el trabajo para acelerarla. Esto quiere decir que para acceder a esa zona, aumenta la velocidad de la partícula.
[Escribe en el pizarrón: AUMENTA LA VELOCIDAD DE LA CARGA DEBIDO AL TRABAJO DEL CAMPO ELECTRICO (1)]. Debido al trabajo del campo eléctrico. Yo acá dibujé una recta, pero no es una recta exactamente, acá hay una combinación del movimiento debido al campo magnético debido al campo eléctrico, pero, bueno. Lo importante es que, cuando ingresa en la carcasa de la derecha, la partícula ahora tiene más velocidad que la que tenía inicialmente. Entonces, ese

cambio de velocidad, significa un cambio de radio de giro. Entonces la siguiente parte del movimiento va a ser un tramo del movimiento circular pero para el otro lado.
Entonces, además cambia el radio de giro, pero ω no cambia. [Completa (1) ADEMÁS CAMBIA EL RADIO DE GIRO, PERO ω NO CAMBIA]. Pero no buscamos el radio de giro, buscamos acelerar a la partícula, por ejemplo, que tenga cada vez más velocidad para hacer luego un experimento con una partícula cargada de energía, entonces le pedimos que cambie el giro. Pero a consecuencia de ese aumento de velocidad, se cambia el radio de giro. Sin embargo, a pesar de que cambia el radio de giro, la velocidad angular no cambia. De manera que, el tiempo que tarda en hacer esta media vuelta, es también el tiempo que tarda en hacer esa otra media vuelta, porque la velocidad angular sigue siendo la misma. Ahora cuando vuelve acá, yo quiero volver a acerarla, pero para eso preciso que el campo ahora mire para el otro lado, con lo cual yo tengo que poner una diferencia de potencial entre las carcasas, tipo alterna, oscilante, periódica. Y con qué período. Con el mismo de la vuelta de la partícula, o sea, con la misma vuelta. Entonces acá tengo que usar para el campo eléctrico, la misma frecuencia ω que corresponde a la velocidad angular de la partícula, para que el período de oscilación del campo eléctrico sea igual, al período de la vuelta de la partícula. Entonces, cuando la partícula hizo media vuelta, el campo eléctrico hizo media oscilación y lo que antes estaba hacia la derecha ahora está hacia la izquierda. Entonces, en este rotante, como se ve acá, la idea es superponer dos dibujos que están ocurriendo en realidad a distintos tiempos, no es que esta zona es para allá y esta zona es para allá, en todos lados es para allá, pero va alternando. Y luego para acá y después vuelve a ser para allá. Así que, vamos a ver si ponemos… Entonces, este…
[Escribe en el pizarrón: USANDO UN CAMPO ELÉCTRICO QUE OSCILE CON LA MISMA FRECUENCIA DEL MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA, SE CONSIGUE QUE EL CAMPO ELÉCTRICO ACELERE (a la carga) A LA PARTÍCULA CADA VEZ QUE ESTA PASA (por la zona central) POR LA FRANJA QUE SEPARA LAS CARCASAS].
Entonces ¿qué es lo que esperamos demostrar? Acá están nuestras carcasas a una diferencia de potencial oscilante, de un campo eléctrico que va hacia la derecha y que luego va hacia la izquierda. Y ese campo eléctrico lo puedo poner en sincronización con el movimiento de la partícula, de manera que cada vez que la partícula pase por la zona central, se encuentre con el campo eléctrico, el campo eléctrico la ayude…
Y entonces cada vez que pase por ahí la acelera. Todo eso es posible gracias a que ω no depende del estado de movimiento, depende del campo magnético. Depende de propiedades de las partículas, que uno desconoce. Entonces, si yo, dada una partícula fundamental…

Dibujo

$\omega = qB/\mu$

Una fuente… a la partícula y… Va a ir aumentando el radio. A medida que va aumentando su velocidad va aumentando el radio, pero eso no altera en modo alguno la frecuencia angular por lo que vimos la clase pasada, por lo tanto… Un generador coincide con esa ω, va a seguir estando en sincronía a pesar del cambio de velocidad angular de la partícula. Finalmente, bueno, el espacio para hacer todo esto se me acaba, pero después de un par de vueltas obtuve un interesante incremento de velocidad, que puedo usar entonces, por ejemplo acá, para que la partícula salga, usarla como un proyectil de alta energía para otros experimentos. Bueno, esto es un ciclotrón. En realidad esta historia de que la ω no cambia, es una aproximación clásica, porque en relatividad cuando una partícula adquiere una velocidad importante, importante significa comparable con la velocidad de la luz, hay que usar la mecánica relativista y lo que nosotros hemos usado hasta acá es la mecánica no relativista. Así que realmente hay una carga de rotación relativista que los que diseñan ciclotrones para velocidades muy altas, comparables con la velocidad de la luz, la van a tener que tomar en cuenta y va a obligar a ir adaptando la frecuencia de esta fuente, a medida que ω se va corrigiendo con ese factor relativista. En ese caso, en vez de hablar de ciclotrón, se habla de sincrotrón. Hay distintos diseños para hacer esa adaptación y a cada diseño le corresponde un nombre. Bueno, otra cosa que uno puede sacar de acá, uno puede agregar un campo eléctrico. Qué pasaría, si a un campo magnético uniforme, estamos siempre en ese caso sencillo que está homogéneamente uniforme, le agregamos ahora un campo eléctrico. Esto es lo que se llama [Escribe en el pizarrón: MOVIMIENTO DE CAMPOS E Y B CRUZADOS]. ¿Cuál sería la ecuación de movimiento en estos casos y qué es lo que se obtiene?

Bueno, la ecuación del movimiento es F = m.a, como siempre. Masa por aceleración y la fuerza es q (E + v x B). Es la fuerza de Lorenz. La fuerza en presencia de un campo eléctrico uniforme. Si uno mira esta ecuación que está acá como una ecuación diferencial, dado que E y B son uniformes. Si no fueran uniformes sería una cuestión muy complicada, si se ampliara con la posición, si fuera distinto en cada lugar del espacio, a medida que la partícula se va moviendo, va sintiendo un E y un B diferentes y entonces, eso complicaría mucho la resolución de esa ecuación, porque ya se tendría que ver como una ecuación para la posición de la partícula en función de t. Y esa posición aparecería de derivar acá dos veces y aparecería acá derivada una vez y aparecería dentro de E y de B.

Dibujo

$$m\, dv/dt = \underbrace{q\,(E + v \times B)}_{\text{F Lorenz}}$$

Así que la ecuación diferencial sería muy complicada. Pero si E y B son uniformes, entonces, acá no hay ninguna de nuestras incógnitas, no está E de t acá, no está B de t acá. Y entonces uno puede ver a esta ecuación, como una ecuación no ya de 2º orden para la posición de la partícula, sino que la puede mirar como una sencilla ecuación de 1º orden para la velocidad de la partícula. La velocidad aparece acá y aparece acá derivada una vez y no aparece en ningún lugar más. Entonces ES UNA ECUACIÓN DE 1º ORDEN PARA LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA.
[Escribe en el pizarrón: UNA ECUACIÓN DE 1º ORDEN PARA LA v (t)]
Y como toda ecuación diferencial, lineal, con coeficientes constantes, uno puede escribir la solución general como una solución general de la homogénea, más una solución particular.

$$V(t) = v_B(t) + E \times B / B^2 \quad \rightarrow \text{solución particular}$$

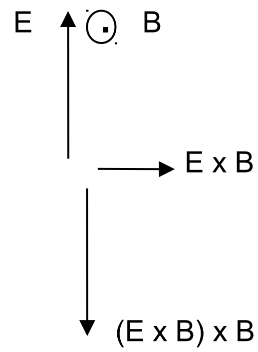
Solución homogénea

Ahora, la homogénea cuál es. Bueno, tengo que identificar, en esta ecuación cuál es el término inhomogéneo que no contiene la incógnita y que hay posibilidad de suprimirlo. Y lo que tiene es solución homogénea. En este caso, el término que no contiene la incógnita, cuál es. Entonces ésta sería la ecuación homogénea. Pero ésta es la ecuación que resolvimos la clase pasada, es la ecuación del movimiento de una partícula de masa m… por un cuerpo homogéneo. Si yo saco esto, la ecuación homogénea ya la sabemos resolver. Así que nos faltaría encontrar una solución particular. Entonces, eh… Vamos a ponerle que v_B, el movimiento del campo magnético, es la solución homogénea. Y yo voy a dar la solución particular directamente y lo que vamos a hacer es reemplazarla para verificar que era así. [Escribe en el pizarrón: REEMPLAZANDO].

Ecuación homogénea

$$dv_B / dt = q\, v_B + q\,\underbrace{(E + (E \times B) \times B / B^2)}_{= 0}$$

Fíjense que esto que está acá, tiene unidades de… si simplifico las unidades de B quedan las unidades del campo eléctrico, sobre unidades del campo magnético. Esto, si ustedes miran acá, eso nos da unidades de velocidad. Así que efectivamente, este término que agregamos acá, que pretende ser una solución particular, tiene unidades de velocidad, si no, estaríamos mal desde el principio. Entonces vamos a demostrar que esto da cero. Demostrar sería reemplazar esto en la ecuación de movimiento y verificar que dé cero. Entonces muy bien, si yo reemplazo por la ecuación de movimiento lineal, si yo reemplazo la suma de estos dos términos acá, me tiene que dar la suma de las derivadas. Pero la derivada de esto es cero, porque esto no depende del tiempo. Son campos uniformes… Si yo lo reemplazo acá, es un término que es v_B por el campo magnético por q, esa es la fuerza magnética asociada al primer término. Y ahora hay que reemplazar este otro término. ¿Está bien? Esta velocidad que tiene dos términos, me hizo generar dos términos acá. El otro queda igual, ya está… También hay dos términos acá, pero la derivada de uno de estos es cero, entonces queda cero. Ahora esto, da dos casos igual, justamente porque es la solución de la homogénea. Esa es la solución homogénea. Así que esto se cumple. Esto es igual, el miembro de la izquierda es igual al primer término de la derecha, por ser v_B la solución de la homogénea. Esa es la ecuación de la homogénea. Entonces la demostración consistiría, la demostración de que esto es solución de esto, consistiría en demostrar que esto es cero. ¿Está bien? Entonces vamos a ver si esto que está que es igual a cero. Quedaría entonces demostrado. [Q.E.D.] Bueno, muy bien. Como ven, es muy fácil. Estos eran nuestros campos… Los habíamos dibujado así.



Entonces, vamos a ver que este término que está acá, toda esta operación da igual a menos ésta. Esto es lo que tendríamos que demostrar. Entonces hagamos E x B, es para arriba, saliendo del pizarrón, E x B hacia la derecha. Qué modulo tiene E x B. El módulo de E por el módulo de B. Estoy multiplicando vectores perpendiculares. Son campos cruzados, así que los módulos… fácilmente, no hay ceros por ningún lado. Esto es E por B, ahora hagamos claramente el producto vectorial con B. Entonces, B por B hacia la derecha, B saliendo del pizarrón. E por B multiplicado nuevamente por B me da hacia abajo. ¿Y cuál es el módulo de esto? Y como son todos perpendiculares entre sí, el módulo es E por B cuadrado. Si divido por B cuadrado, el módulo que queda es C. El módulo que queda es C y como los vectores son opuestos, de manera que al sumar estas dos cosas, me da cero.

Bueno, así que la ecuación se cumple. Entonces qué significa esto que hemos encontrado. Esta ecuación en términos del movimiento. Significa que al movimiento circular que conocimos la clase pasada, ahora le tenemos que agregar, si existe un campo eléctrico, además de un campo magnético, uniforme, tenemos que agregarle este término que es una constante. Es lo que se llama la velocidad de deriva. Y de paso, esa constante, ya lo habíamos calculado, es algo que tenemos que dividir por B^2, la dirección y el sentido está puesto acá. Entonces cómo es este nuevo movimiento. La velocidad de deriva, entonces es [Dibuja en el pizarrón] Está en este plano del pizarrón. Es perpendicular al campo magnético B y que contiene al campo magnético E. Y es perpendicular a… por la forma en que está escrita esa velocidad de deriva. Es producto de… Si yo tuviera una carga positiva, recuerden que tengo que considerar la carcasa. En el caso de la carga positiva, la existencia del campo magnético hubiera generado un movimiento circular así. Si la carga fuera negativa sería simplemente… Pero ahora, ésta sería la solución de la homogénea. El movimiento circular uniforme, hay que tomarle la velocidad de deriva. Quiere decir que el círculo se va a ir desparramando por este lado del pizarrón, porque esta velocidad lo va… Entonces el movimiento en este caso, tiene que ser un movimiento circular, pero la velocidad de deriva interviene y desparrama el movimiento sobre el plano del pizarrón. No estoy dibujando ahí la helicoide y recuerden que la helicoide salía del pizarrón y tenía en cuenta la posible velocidad paralela al campo magnético, que en condiciones iniciales se mantendría. Si esa velocidad paralela al campo magnético tuviese… con condiciones iniciales, también se detendría. Porque ni el campo magnético realizaría fuerzas asociadas a esa componente, simplemente porque sería un componente cualquiera.., ni el campo eléctrico realizaría trabajo en la dirección perpendicular del pizarrón, porque el campo eléctrico está sobre el pizarrón. Por lo tanto, si acá agrego una componente de velocidad inicial paralela al campo magnético, se conservaría. Entonces todo esto saldría del pizarrón y se desarrollaría hacia afuera del pizarrón y lo que está acá… Ahora, si no existe esa condición inicial, de tener una velocidad saliendo del pizarrón. Si la velocidad inicial está como acá, dibujada alrededor del pizarrón, todo el movimiento se desarrolla en el plano del pizarrón y el círculo… Campo magnético se deforma, porque se va desplazando con la velocidad de deriva. Si la partícula fuera negativa, entonces el círculo… quedaría al revés, pero el desplazamiento con la velocidad de deriva, no depende del signo de la carga… Depende exclusivamente de cómo están entre sí dispuestos los campos eléctricos y magnéticos. Entonces si cambio el signo de la carga, el giro, el movimiento circular uniforme… sería al revés, pero la velocidad de deriva sería igual, por lo cual, tendríamos algo así. Esto sería para un carga que es > que cero. Esto sería para una carga positiva.

Bueno, hay una situación particular donde los campos eléctricos y magnéticos están cruzados. Pero, sin embargo, no tienen efecto sobre el movimiento de la carga. ¿Por qué razón no tienen efecto? Bueno, porque la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se pueden cancelar entre sí en algunas circunstancias. Y vamos a ver esta circunstancia particular.

Lo que se llama el selector de velocidades. El efecto se puede calcular fácilmente, para qué velocidad de la carga la fuerza de Lorenz se hace cero. Entonces, aquellas cargas que tengan esa velocidad en presencia ce campos cruzados, no están sometidas a fuerzas y continúan el movimiento rectilíneo uniforme.	SELECTOR DE VELOCIDADES

Por lo tanto, yo puedo seleccionar las partículas que se mueven con un diseño apropiado, seleccionar las partículas que se mueven con movimiento rectilíneo y decir: “Éstas tienen tal velocidad”. Esa es la idea del selector de velocidades.

Entonces insistimos con lo que estamos… la fuerza de Lorenz. A ver, si v es = a la velocidad de deriva, si la condición inicial de nuestro movimiento fuera que v es igual a la velocidad de deriva, bueno, entonces ya sabemos lo que pasa con esta combinación. Todo esto… es lo que calculamos hace un rato.	1

Entonces cómo se aprovecha esto para diseñar un dispositivo que permita identificar partículas a una cierta velocidad. Supongamos que yo quiero identificar partículas de una cierta velocidad, no sé, x, la que sea, me hago un dispositivo con E y B cruzado, tal que esa velocidad que quiero identificar, coincida con la velocidad de deriva, es decir coincida con la velocidad que habita la fuerza de Lorenz.

Entonces supongamos que yo tengo en una cajita, digamos, campos E y B cruzados. Y hago pasar por esa cajita un haz de partículas. Con velocidades diferentes, incluso partículas diferentes, porque este asunto de la velocidad de deriva, no contiene ninguna propiedad de partida.	Dibujo 2

Entonces, bueno, aquellas de todas las velocidades diferentes que pueden intervenir en el haz, aquellas cuya velocidad coincida con la velocidad de deriva, entonces tendrán fuerza cero, porque esto se anula para este valor de velocidad. Entonces, aquellas que tengan la velocidad de deriva, siguen de largo. No siempre… siguen con movimiento rectilíneo uniforme y salen por el agujero del otro lado. Aquellos que la velocidad sea menor que la velocidad de deriva, van a dar un término magnético, la fuerza magnética del término eléctrico. Por lo tanto va a prevalecer el término eléctrico, poniendo una carga positiva si prevalece el término eléctrico, la carga… Según la velocidad que adquiera. Y queda dentro de la caja, aquella que la velocidad sea mayor que la velocidad de deriva, va a tener un término magnético que domine sobre el término eléctrico de la fuerza. Entonces… del campo magnético. Y quedarán también dentro de la caja. Entonces, afuera de la caja, tenemos un haz de partículas de una velocidad conocida. Esto también nos puede servir para armar un dispositivo experimental cuando quiero saber la velocidad de las partículas… Yo puedo producir partículas pero no saber con qué velocidad las produzco. Pero de esa manera selecciono, dentro del haz que produje, aquellas que van a determinada velocidad y eso me va a servir para preparar un experimento, cualquier experimento donde quiera saber la velocidad de la partícula. Eh... Finalmente, como dijimos antes, en esta velocidad de deriva no aparece ninguna propiedad de la carga. No sabemos nada sobre… si acá pueden que haber salido distintas partículas, distintos tipos de partículas… aunque con una misma velocidad. Esto es lo que hace el selector de velocidades. Cómo podemos ahora identificar propiedades de la partícula. En particular cómo podemos identificar el cociente Q/e. Tengo que hablar del cociente de q/e porque recuerden que la fuerza de Lorenz es igual a la masa por la aceleración. De manera que la ecuación del movimiento, q y e desaparecen de manera que esto se convierta para formar el coeficiente sobre e, cuando divido la masa, paso la masa dividiendo y el miembro de masa por aceleración pasa dividiendo, entonces el movimiento depende exclusivamente del cociente de Q sobre e, así que si yo armo ahora… posiblemente lo pueda identificar mirando movimientos, el valor de q… voy a poder identificar algunos puntos sobre e.

Bueno, vamos hacer ahora, vamos a completar el selector de velocidades, que nos permite identificar el cociente q/e de cada partícula que salió del haz de velocidad conocida. Lo que vamos a hacer ahora se llama [ESPECTÓGRAFO DE MASAS]. El nombre de masa parece que nos permite identificar la masa,… pero solamente que si lo hacemos con partículas de carga conocidas, ya sabemos…
Entonces, pongamos que ya hicimos trabajar a nuestro selector de velocidades. Si hago esto mismo, con las partículas de velocidad desconocida. Pero supongamos que el campo magnético de nuestro selector de velocidades está, en realidad, en una región mucho más amplia que la de la caja. ¿Sí? Ocupa una región más amplia del espacio, el campo eléctrico en cambio, está así, confinado, dentro de la caja. Una vez que el haz de partículas salió de la caja con velocidad conocida, ya el campo eléctrico no actúa más. Pero sí, sigue actuando el campo magnético. ¿Qué va a hacer entonces este haz de partículas en presencia de ese campo magnético? Va a hacer un movimiento circular uniforme. Ya lo sabemos.

Entonces, esto que está acá es un movimiento circular uniforme, cuyo radio, habíamos puesto antes, es un… de la velocidad… Antes de dividir por la velocidad perpendicular… Es la única velocidad que tenemos en todos estos casos, el movimiento, la velocidad perpendicular al campo magnético. La velocidad que está en el pizarrón… Eeeeh, pero bueno, justamente la velocidad es lo que conocemos ahora. Es decir, el selector de velocidades nos ha dado la velocidad. El módulo de la velocidad de salida, del selector de velocidades es E sobre B. Entonces, si el radio, el radio va a dar m sobre q, E sobre B^2. Quiere decir que conociendo el radio de estas trayectorias y conociendo el B, porque el B lo ponemos nosotros para armar todo este experimento, teniendo el radio de esta trayectoria, podemos conocer el cociente q/e y la forma de medir una propiedad de la partícula es q/e y q/e me daría...	Dibujo 3 y 4

Bueno, pero cómo se mide este radio. Cómo se mide. Bueno, hay distintas maneras y el efecto… Poner una película fotográfica. Se hacía así. Ya no se hace así. Pero originalmente se ponía una película fotográfica, de manera que cuando la partícula pegaba en la película dejaba una marca, imprimía la película. Y entonces uno podría medir el radio sobre la película. Otra forma sería en una cámara de burbujas. Un método más moderno. Ya habíamos hablado de la cámara de burbujas, cuando una partícula cargada pasa por una cámara de burbujas, que es una cámara donde hay vapor de agua saturado. El paso de la partícula hace que, por ahí donde pasó se formen pequeñas gotitas de agua… y entonces queda una traza de gotitas que indica por dónde pasó, queda dibujada la trayectoria de las partículas. Uno podría ver el radio entonces, de esa manera. Bueno, hemos hablado de algunas cosas que ocurren cuando se ponen cargas en un campo eléctrico y magnético… Magnéticos muy simples como son estos campos… cruzados. La clase pasada vimos cómo se deformaba la helicoide por el campo magnético tenía ciertas divergencias. Y hablamos del espectro magnético y la demostración de ese campo magnético para proteger a la Tierra de...
Bueno, este tema termina el programa de la materia. Es decir, para el examen final, tienen que estudiar hasta acá. Yo, como les dije la clase pasada, tenía ganas hoy de dar una introducción a la relatividad especial, por el hecho de que la relatividad especial nace del electromagnetismo. Ahora dirán uds. de qué manera, el electromagnetismo conduce a la relatividad especial. Esto es, conduce a una nueva forma de ver el espacio y el tiempo. ¿Cuál es la necesidad de esa nueva forma de ver el espacio y el tiempo? ¿De dónde surge esta necesidad? Yo no sé si ustedes en el curso de Física 1 vieron algo de relatividad espacial, si vieron las transformaciones de Lorenz, porque muchas veces se da. ¿Cuál era la necesidad en ese caso, de introducir una forma nueva de ver el tiempo y el espacio? ¿Se habló de la necesidad?

2. A1: El hecho de que… ver desde cualquier sistema de referencia…

3. P: Sí, es decir, las transformaciones de Galileo que son las que se han usado hasta aquí, llevan al teorema de las… de Galileo. Una de las consecuencias de las transformaciones de Galileo es que las velocidades, al pasar de un sistema de referencia a otro, se transforman

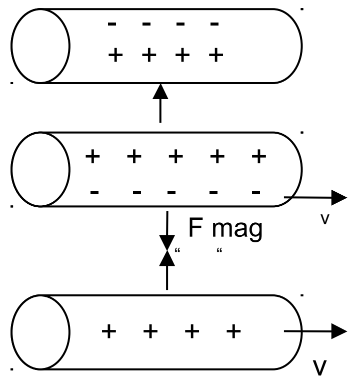
también de determinada manera, con una dirección vectorial. De manera que al hacer un cambio en el sistema de referencia, cualquier velocidad cambia, de acuerdo con ese teorema de dirección de velocidades. Entonces, lo que explicaron en Física 1 es que la velocidad de la luz no cambia. Si la velocidad de la luz no cambia, entonces… están mal las transformaciones de Galileo. Ahora, que no cambia, ¿es un hecho cómo?

4. A2: ¿Experimental?

5. P: Experimental, bueno, es cierto, es un hecho experimental que no cambia, después vamos a reflexionar sobre cómo se llegó a esa conclusión. Pero yo quisiera ahora, ir más atrás en la historia, y entonces no pensar en… Física 1, que es cuando demostraron que había que abandonar las transformaciones de Galileo por las de Lorenz, sino preguntarnos qué tenían de malo las de Galileo, porque acaso, cuando estudiaron estas transformaciones de Galileo al comienzo de la materia, ¿ustedes encontraron algún defecto en las transformaciones de Galileo? ¿Hay algo que está mal planteado? Eh… En realidad, las transformaciones de Galileo parecen ser tan limpias, que parece imposible encontrarle algún defecto. Parece ser una cuestión meramente matemática. Y si es meramente matemática ¿por qué las vamos a abandonar? Entonces, realmente si alguien nos dice que tenemos que cambiar las transformaciones de Galileo por las de Lorenz, nos tienen que explicar además por qué están mal las de Galileo. Si no nos explican eso, vamos a estar siempre navegando en dos mundos separados y nunca entendiendo cómo se conectan esos mundos. Bueno, entonces vamos a volver al principio. Yo dije que había una relación íntima entre electromagnetismo y la relatividad especial, esto es, esa necesidad determinada por ver diferente el espacio y el tiempo que finalmente, conduce a las transformaciones de Lorenz. Entonces, esteeee, olvidémonos de Galileo por ahora, y veamos qué tipo de situaciones podemos encontrar en el electromagnetismo que nos lleve a una cierta perplejidad que nos lleve a pensar un poco… Siguiendo con la historia de la Física 1, que es la historia de la mecánica, tenemos que pensar que en la mecánica siempre nos enseñaron que las leyes elementales de la física, obedecen al principio de relatividad. Este principio de relatividad… Después se le va dar el nombre de la teoría de Einstein, que es un concepto que es muy anterior a la teoría de Einstein. El principio de relatividad significa, que en todos los sistemas inerciales son igualmente buenos para explicar las leyes fundamentales de la física. Entonces, ustedes han tenido una buena ejercitación de ese uso de distintos sistemas con dos sistemas distintos. Al final de la clase pasada dijimos, noten que en esta materia nunca hicimos ninguna ejercitación de ese tipo, nunca hicimos un problema de sistemas inerciales y después desde otro sistema inercial. Uno podría decir que no lo hicimos simplemente porque con el ejercicio que hicimos en física 1 alcanza y sobra, para qué vamos a hacer más. Ahora lo que nos interesa explicar es la situación particular, que es la interacción electromagnética, que está gobernada por un conjunto, por unas ciertas leyes, que son las leyes de Maxwell y bueno. ¿Cumplen o no cumplen el principio de relatividad? Esto es, no hemos hablado del principio de relatividad, ¿porque no hace falta hablarlo?, ¿porque es evidente que lo cumple? ¿O no lo hemos hablado porque hay un problema con el principio de relatividad? Entonces tenemos que resolver esta cuestión. Y entonces volvamos a la fuente de Física 1… el uso de las leyes, en este caso de electromagnetismo en distintos sistemas de referencia, a ver si trae alguna contradicción o no aplicar las mismas leyes de electromagnetismo en sistemas de referencia distintos. Si no trae ninguna contradicción nos sentiremos confortados, diremos, bueno, acá está, es evidente que se podían aplicar las mismas leyes en sistemas de referencia distintos. Y responderemos a la pregunta. Entonces, para plantear este tipo de, para resolver este tipo de dudas, lo que hay que hacer siempre es pensar en el ejemplo más simple. Si lo entendemos a partir del ejemplo más simple, podemos ganar confianza para ir a ejemplos más complicados. Si ya el ejemplo más simple tiene un problema, tenemos que dar otro tipo de respuesta a esta situación. El ejemplo más simple que les voy a plantear es el ejemplo de dos hilos infinitos, por donde circulan corrientes eléctricas. Sabemos de la magnetostática, que si hay corrientes eléctricas hay interacción magnética. Luego voy a pasar a otro sistema de referencia y voy a tratar de ver qué pasa con las interacciones en otro sistema de referencia, aplicando las leyes de la electrostática y la magnetostática. Es decir, voy a hacer el ejercicio de aplicar las mismas leyes en dos sistemas de referencia distintos. Para una dada situación física. Entonces voy a pensar que en el cable inferior sólo hay cargas positivas. Yo

puedo inventar una distribución de cargas. Las leyes de Maxwell admiten cualquier distribución de cargas que cumplan con... de continuidad.

Voy a inventar que tengo una carga positiva moviéndose a la derecha… en el hilo de abajo, pero solamente hay cargas positivas. En el hilo de arriba, en cambio, voy a dibujar, vamos a poner cargas negativas, moviéndose con la misma velocidad v. Pero además voy a dibujar un conjunto de cargas positivas en reposo. Que las voy a disponer de igual… e igualmente distribuidas, de modo que el conductor de arriba esté… Vamos a hacerlo más simple porque si no parece que el cambio de signo tuviera alguna, algún secreto. Le agregamos… son negativas. Tenemos cargas exactamente iguales moviéndose arriba y abajo, con exactamente la misma velocidad y exactamente la misma distribución. La misma distribución quiere decir la misma densidad de carga. Es decir, que están a igual distancia que las de abajo.

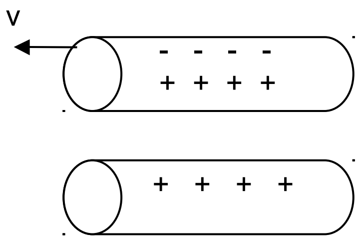


Bueno, entonces, ahora voy a usar las leyes del electromagnetismo. Como esta interacción, esta distribución de fuentes, sólo genera campos estáticos, eléctricos, electrostáticos, magnetostáticos, trabajan, no con el aparato completo de las leyes de Maxwell… con las leyes de… aquello que aprendimos al principio. Entonces, lo que vemos son corrientes de igual dirección y sentido, este cambio de signo lo hice porque si yo ponía una carga negativa, moviéndose la corriente era opuesta, agregándole un elemento más que… Entonces, acá tengo corrientes de igual sentido, corrientes de igual sentido. [CORRIENTES DE IGUAL SENTIDO Y DIRECCIÓN, SE ATRAEN MAGNÉTICAMENTE] Se atraen magnéticamente. Hay una interacción magnética. No me hace falta acá… Y todo eso, el razonamiento que voy a hacer es puramente cualitativo, pero sabemos que la ley de… y que la estoy aplicando… Entonces hay interacción magnética entre estas dos distribuciones de corriente. Bueno, ahora preguntémonos si hay interacción eléctrica. Bueno, este campo, este hilo de abajo, genera un campo eléctrico porque está cargado. Pero el hilo de arriba es neutro. La carga positiva está neutralizada por la negativa, así que no siente ninguna fuerza, debida a este campo eléctrico y viceversa: el hilo de arriba es neutro por lo tanto no genera corriente… dispuesta a sufrir la fuerza de un campo eléctrico, por lo tanto no genera campo eléctrico, por ser neutro no le hace ninguna fuerza. Por la electrostática sabemos que en este caso no va a haber interacción electrostática. [NO HAY INTERACCIÓN ELECTROSTÁTICA.]

Hemos aplicado las leyes de la física en un sistema de referencia y hemos encontrado que existe interacción atractiva entre estos dos… Ahora vamos a pasar a otro sistema de referencia y vamos a aplicar nuevamente las leyes de la física, en este caso de la electrostática y de la magnetostática, y esperamos que todo funcione razonablemente, razonablemente bien. ¿Qué esperaríamos encontrar? Si existe interacción en un sistema de referencia, en otro sistema de referencia hubiera interacción. Es decir, ciertos… en virtud de esta interacción van a aproximarse… Es un hecho físico, no puede depender de qué sistema de referencia yo utilice. Eso es,… en términos del principio de relatividad.

Entonces, en el sistema de referencia inercial. Vamos a elegir para esta otra etapa, es el que acompaña a las cargas positivas, es el otro sistema que acá, acá hay dos sistemas, el que está agarrado a las cargas positivas y el otro que está agarrado con las cargas negativas. Puedo usar otro también, pero hay cosas que facilitan en este sistema, bastaría… encontrar algún problema, para tener que replantear esta forma de ver el principio de relatividad que acompaña... Bueno, entonces dibujemos la situación física en este otro sistema de referencia. Los dos hilos, ahora, las cargas positivas están en reposo, para eso… del sistema, para ver las cargas en reposo. Y las cargas negativas, que para pasar del sistema de arriba al sistema de abajo me tengo que mover a la derecha, acompañando las cargas positivas, voy a ver las cargas negativas moviéndose hacia la izquierda. Cualquier velocidad es con –v, con la velocidad opuesta.

EN EL SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL QUE ACOMPAÑA A LAS CARGAS POSITIVAS



Bueno, ahora aplico las leyes de la física, siguiente paso.

Entonces digo: no hay interacción magnética, porque si bien hay una corriente eléctrica, en el hilo de arriba, no hay corriente eléctrica en el hilo de abajo. Para que haya interacción…. La ley de… me dice que dos corrientes se atraen o se repelen según sean de igual sentido o de sentido contrario. Pero acá no hay dos corrientes. Hay una sola. Acá no hay corriente porque la carga es negativa. Bueno, acá ya empezamos a ver que puede llegar a existir un problema. Arriba hay interacción magnética. Abajo no hay interacción magnética. Como dijimos, si hay una interacción eso tiene que verse como algo absoluto, independiente del sistema de referencia. De todos modos,… si hubiese interacción eléctrica, lo que le interesa es la interacción... Pero tampoco hay interacción eléctrica, porque si bien éste está cargado, el otro sigue siendo neutro.

- NO HAY INTERACCIÓN MAGNÉTICA, PORQUE NO HAY CORRIENTE EN EL HILO DE ABAJO.
- TAMPOCO HAY INTERACCIÓN ELÉCTRICA, PORQUE EL HILO DE ARRIBA ES NEUTRO.

Bueno, acá tenemos una situación absurda. Es decir, la idea, la primera posibilidad que era que aun haciendo un cambio del sistema referencia, porque es algo trivial, porque ya lo practicamos en Física 1…. No lo hicimos por otro motivo, no es trivial. Si yo cambio el sistema de referencia y uso las mismas leyes de la Física, en este caso, las leyes de la electrostática y de la magnetostática, en un sistema de referencia y en otro sistema de referencia, llego a cosas incompatibles. En un sistema de referencia veo interacción y en otro sistema de referencia, no veo interacción, esto es inaceptable. O hay interacción, o no hay, pero no puede ser que la haya según el sistema de referencia donde se te ocurra pararte. Entonces: ES INACEPTABLE QUE EN UN SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL HAYA INTERACCIÓN Y EN OTRO NO. Entonces, hay un problema. Una vía de escape a este problema, es decir, vea, la verdad, es que las leyes del electromagnetismo, no cumplen el principio de relatividad, no se pueden usar en cualquier sistema de referencia inercial. Bueno, en ese sentido, uno lo que estaría diciendo es que no son leyes fundamentales de la física, porque la idea fundamental de la mecánica, la mecánica era la ciencia que dominó la física anterior a Maxwell, que decía, dominó la física hasta el siglo XIX, finales del siglo XIX. Eh, las leyes fundamentales de la mecánica se pueden usar con confianza en cualquier sistema inercial. Están construidas de esa manera, parecería entonces que esto, una posible respuesta a esta situación, es que las leyes de Maxwell, de alguna manera, no son leyes fundamentales, no pueden usarse en cualquier sistema de referencia, sino que hay sistema de referencia único donde pueden usarse. Entonces, si el sistema de referencia donde lo puedo usar es éste, el de arriba, bueno el resultado sería que hay una interacción. Y si fuera éste, el único sistema donde puedo usarlo, el resultado sería que no hay interacción. Si yo tomo esa vía, tengo que decir cuál es el sistema de referencia en el que puedo usar las leyes de Maxwell. Y todavía no le hemos dicho. Bueno, para Maxwell, esa era la respuesta, sus propias leyes no se podían usar en cualquier sistema de referencia. ¿Cuál era la razón para sostener una cosa así? La razón es que las ecuaciones de Maxwell conducen a ecuaciones de ondas. Entonces, como la mecánica era la reina de la física y en la mecánica existen ondas… Todos estos problemas que están apareciendo acá, tendrían que ser también problemas de las ecuaciones de ondas mecánicas. Entonces, la posición de Maxwell era una posición muy sencilla. La respuesta a este problema ya tiene que existir en la mecánica. Veamos otro problema de mecánica y qué respuesta tiene esta cuestión dentro de este contexto. La respuesta que tiene esta cuestión en ese contexto, es que las ecuaciones de ondas de la mecánica, están hechas para ser usadas en un sistema fijo al medio donde la onda se propaga. Piensen ustedes que una característica fundamental de la ecuación de ondas, es que lleva implícita la velocidad de propagación de la onda. Es evidente que una ley física que lleva implícita una velocidad de propagación, es evidente que, es evidente tomarlo entre comillas. Pero las cosas que nos parecen evidentes pueden dejar de serlo en cuanto miremos desde otra perspectiva. Pero, desde la perspectiva clásica que involucra las transformaciones de Galileo que ya hemos mencionado, etc., uno podría decir: es evidente que una ley física que contiene una velocidad, no puede ser usada en cualquier sistema de referencia. ¿Por qué? Porque las transformaciones de Galileo cambian las velocidades. Entonces, si yo digo, esta es la ley para la propagación de ondas. Y esta ley contiene, contiene en su estructura a una cantidad de unidades de velocidades, que la ecuación de ondas mecánicas, surgen de propiedades del medio donde se propaga la onda, evidentemente esa ley no puede servir en cualquier sistema de referencia, porque… va a conducir a la velocidad de propagación, pero las velocidades, en general, cambian de un sistema de referencia a otro... Esta cuestión, una cuestión trivial dentro de la mecánica, porque nadie pretendía usar… En realidad uno puede tomar un gas y ver la dinámica del gas desde las leyes fundamentales de la mecánica, fuerza es igual a masa por aceleración, más leyes de la elasticidad del medio, etc. Y si las leyes del movimiento uno las trabaja en el sistema fijo al medio en que se propaga la onda, estoy hablando del aire para el sonido, el sonido se puede propagar en el aire, en gases, en líquidos o en sólidos, pero el medio… Si uno toma el sonido por caso, para el resto de las leyes fundamentales, fuerza es masa por aceleración,… realiza aproximaciones de pequeñas perturbaciones en el sistema fijo al medio, llega a la ecuación de ondas. Ese procedimiento para llegar a la ecuación de ondas, claramente pone de manifiesto que uno no va a usar luego el resultado en cualquier sistema de referencia, sino en el sistema de referencia donde hizo la aproximación, que era el sistema fijo al medio, así que a nadie le sorprende que, como resultado de esas adecuaciones… velocidad, aunque todo este trabajo... Esa velocidad entonces, es la velocidad relativa a ese sistema. Bueno, esa era la pregunta para Maxwell, que es algo totalmente lógico. Una vez que Maxwell encontró que sus leyes se escribían de forma de ecuaciones de onda, él interpreta, que las ondas electromagnéticas son una perturbación de un medio material y que sus leyes sólo valen en el sistema fijo al medio material, con lo cual no viola el principio de relatividad de la mecánica, porque está hablando de un fenómeno que tiene naturalmente asociado, físicamente asociado un sistema de referencia privilegiado. Es un fenómeno que se da en un medio material, es el fenómeno de propagación de ondas. Entonces hay un sistema de referencia más adecuado que cualquier otro que es el sistema de referencia fijo al medio de propagación. Y, como dije hace un rato, si revisamos de qué manera voy a tener las ecuaciones de propagación del sonido, por ejemplo, en el aire, a partir de leyes fundamentales, ver que la ecuación de onda parece… Bueno, entonces, esa era la respuesta mecanicista. La respuesta mecanicista digo, porque la respuesta consistía en concebir al fenómeno electromagnético como un fenómeno de ondas mecánicas. Como un fenómeno que ocurría en el medio material que entraba y esta oscilación en el campo magnético y eléctrico de la onda que entraba, no eran más que oscilaciones mecánicas, que en realidad estaba presente para que el fenómeno se produjese. Ese medio tenía un nombre, que en realidad venía desde antes del electromagnetismo, lo tenía desde el modelo… de la luz, de la óptica venía: el nombre de éter, la luz era una ondulación en el éter. Cuando Maxwell se dio cuenta, de que la luz era una onda electromagnética, el éter de la luz era el éter electromagnético. Hasta ahí estaban todos contentos. No había ningún problema extra, simplemente porque yo me tengo que parar en el sistema fijo al éter y sólo en ese sistema puedo usar las leyes. Las conclusiones… Era un sistema en el que se podían obtener conclusiones equivocadas. Todo esto está bien siempre y cuando el éter se pueda detectar. El problema es que el éter no se pudo detectar nunca. Yo puedo detectar el aire donde se propaga el sonido. Por ejemplo, hago vacío, saco el aire y el sonido ya no se propaga. Entonces el sonido es un fenómeno mecánico… el sonido ya no se propaga. Ahora, si embargo, cuando yo hago vacío con una campana de vidrio para extraer el aire. La idea era hacer lo mismo pero sin extraerlo. En la campana se sigue viendo, el fenómeno luminoso al contrario, seguía ocurriendo. La luz viaja desde… universo. Si la luz permanece en un medio material, ese medio estaría presente en todo el universo. Bueno, sin embargo, está presente en todos lados, por ejemplo en todo el sistema solar. Y a pesar de que los planetas se mueven alrededor del sol, parece que… Así que la interacción entre el planeta y el éter que llena todo, parecía ser despreciable. Esa es una nueva dificultad para hablar del éter. Allí donde el éter debería manifestarse, parece que no se manifiesta. Cuando hago vacío no lo consigo extraer. No tiene interacción con otros cuerpos. Cuando se avanzaba más y más en cómo detectar el éter, cada vez el éter era más elusivo, más difícil de detectar. Entonces, alguien dio otro tipo de respuesta. Podemos hacer una detección indirecta del éter. De qué manera. Bueno, las leyes de Maxwell contienen la velocidad de propagación de la luz…

Ustedes recuerdan que la velocidad de propagación de la luz es C = 1/ raíz cuadra de mu cero. E cero

$C = 1 / \sqrt{}\ \mu\ 0.\ E_0$

De manera que mu y E se veían como propiedades del éter. No eran constantes universales como la vemos hoy día. Sino que eran propiedades de un medio material, si por alguna razón las propiedades… tendrían que cambiarse. Este, bueno, eh, entonces sucede lo siguiente. Ya que materialmente es muy difícil de detectar directamente. Sí, se podría… Esto es, si estoy un sistema fijo al éter puedo usar las leyes de Maxwell y las leyes de Maxwell me dice la velocidad... Ahora si yo estuviese en un sistema fijo en éter… Lo que sí debería ocurrir es que la velocidad de la luz si yo la mido en mi laboratorio, yo no sé si se mueve respecto del éter, porque no sé dónde está el éter, en lugar de… Porque en mi laboratorio no valdrían las leyes de Maxwell estrictamente. Si yo me estoy moviendo con una cierta velocidad, me estaría apartando de las leyes de Maxwell, porque no estaría en el sistema indicado. Y por lo tanto también me estaría apartando de esta velocidad. Y cuánto me estaría apartando. Y ahí… Transformaciones de Galileo… Me dice cuánto me falta. Entonces hagamos el siguiente experimento. Hagamos una medición muy refinada de la velocidad de la luz en nuestro laboratorio y si me da diferente de esto, la diferencia es mi estado de movimiento respecto del éter. Entonces, aunque yo no pude palpar el éter, ahora al menos sé si me estoy moviendo o no respecto del éter. Bueno, resulta que en estos experimentos que son esterométricos, muy refinados… nunca dieron ningún resultado. Nunca se pudo detectar tampoco el estado de movimiento respecto del éter, todo sucedía en el laboratorio como si el laboratorio estuviese… Esto era algo difícil de tragar, es difícil de tragar depende de la perspectiva en que uno mira la historia de la ciencia. Si yo tuviera la perspectiva de que la Tierra estaba en el centro del universo, una perspectiva geocéntrica, que el éter estuviera en reposo respecto de la Tierra es totalmente lógico. Que las leyes de Maxwell valgan en el laboratorio y que yo verifique que la luz se propague en esta velocidad en mi laboratorio, era lo esperado. Pero una vez que, la visión geocentrista es muy anterior al problema, estoy hablando de, hacía cientos de años que la visión geocentrista había sido abandonada. La Tierra no tiene ningún lugar privilegiado en el universo, por lo tanto, yo no puedo esperar que la Tierra esté en reposo respecto del éter, más bien que el éter… del universo y como la Tierra tiene un movimiento peculiar en el universo, no está en reposo, entonces yo tendría que ver una especie de vientos de éter, se llamaba eso, que me cambien la velocidad de la luz. Y si yo no veo ninguna velocidad diferente a ésta... lo tengo que resolver de esa manera. Depende la perspectiva desde la que uno mire a la ciencia, me dice si yo estoy… problema. Bueno, entonces, resumiendo. El hecho cierto es que acá hay un resultado insatisfactorio. No puedo usar las leyes de Maxwell, en dos sistemas de referencia y obtener resultados consistentes. El resultado fue inconsistente. En un sistema hay interacción, en el otro sistema no hay interacción. La primera salida de la cuestión es que yo no tengo derecho a usar las leyes de Maxwell en cualquier sistema de referencia. Eso estaba en perfecto acuerdo con otras situaciones que se daban en la realidad. Y era la posición obvia a mantener, la de seguir tomando a la mecánica como la madre de la física y que el electromagnetismo era un fenómeno… el medio material del éter. Y, por lo tanto, con ciertas leyes en el medio material del éter. Sin que esto implique la violación del principio de relatividad porque lo que estaba privilegiando al sistema… es un medio físico, la existencia del éter. Bueno, esto también se fue volviendo insatisfactorio. A medida que fueron pasando los años en que este problema se empezó a sentir, digamos, podríamos hablar de medio siglo, poco a poco, a medida que los intentos de detectar el éter ya no en forma directa, o de ver consecuencias directas, siempre fracasaron, la situación se volvió de una gran incomodidad. Por ejemplo, los que hicieron experimentos más refinados, que son Michaelson y…, pensaron que tal vez lo que estaba ocurriendo, que sí, que la Tierra se mueve en este… Pero si hubiera viscosidad en el éter, la Tierra se movería... De manera que en nuestro laboratorio, estaría en reposo no respecto de este universal, sino respecto de esta capa adherida y esa capa bajo las leyes de Maxwell. Entonces Michaelson dijo, hagamos un experimento… esa capa seguramente se va desprendiendo de la Tierra, si yo me voy más lejos de la superficie, la capa va a empezar a desprenderse y algo voy a ver ahí. También se hicieron experimentos a cierta altura. Nunca pasó nada. Bueno, entonces la situación era de gran incomodidad y lo que tenemos que hacer es buscar otra respuesta a esta situación. Entonces, ahora vamos a hacer el intervalo, pero para cuando volvamos del intervalo, piensen esto que es un resultado muy aceptado ¿no tendrá otra perspectiva…? Es decir, lo que hemos hecho al pasar de acá a acá, parece completamente trivial, pero en realidad tiene metidos preconceptos acerca del espacio y el tiempo. No sólo acerca del espacio y el tiempo, pero hay un preconcepto que se pone en juego al pasar de acá a acá. Eso preconceptos también están en las transformaciones de Galileo. Ahí viene lo que hablábamos antes de si enseñan la de Lorenz, y no dicen qué tienen de malo las de Galileo… Porque las de Galileo surgen en realidad de nuestras nociones intuitivas de espacio y de tiempo. Las de Lorenz no. Entonces, cuáles son los preconceptos que tenemos nosotros acerca de la diferencia del espacio y el tiempo, que han penetrado, sin que lo hayamos notado siquiera, para pasar de este punto a este punto. Hay cosas que nos resultan tan naturales que ni siquiera sabemos porque las estamos usando. Y entonces, en eso fue que… Einstein para resolver este problema. Cuál es el…, qué otras cosas hemos usado, parece que no sólo hemos usado las leyes de electrostática y magnetostática. Eso lo usamos acá y lo usamos acá. Pero para pasar de… hemos usado otra cosa. Que la damos por cierta, que la damos por cierta. Y que no tiene porqué ser cierta. Así que hagamos 10 minutos y después vamos a cuestionarnos unas cuantas cosas que tenemos en nuestras cabezas y que…

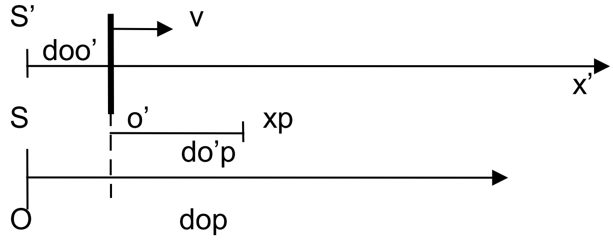
RECREO 15’

6. P: Bueno, pensaron entonces cuál, qué supuesto hemos usado para pasar de un sistema a otro. Hay algo que… ¿Hay cosas adicionales que se les ocurren para pasar de un sistema a otro?

7. A3: Las transformaciones de Galileo.

8. P: Bueno, las transformaciones de Galileo, pero en realidad hay algo más básico, hay algo que está contenido en las transformaciones de Galileo de manera invisible, por así decirlo, que lo creemos tan natural, tan libre de objeciones, que ni siquiera nos damos cuenta que las tenemos, así que en cuanto lo descubramos en estos dos dibujos, después lo vamos a descubrir en las transformaciones de Galileo. Entonces ahí sí va a tener sentido decir que las transformaciones de Galileo están reemplazadas por las de Lorenz. Va a tener sentido en algún contexto, pero va, digamos, a pasar a ser algo admitido. Hasta ahora, en realidad el problema es cuando nos enseñan las transformaciones de Lorenz sin decirnos qué pasa en las de Galileo, les resulta difícil admitir esta necesidad de cambiarlas. En todo caso, el uso de las dos, unas en un contexto clásico, las de Galileo y otra… Tenemos que ver un poco qué es lo que estamos haciendo. Cuando uno ve las transformaciones de Lorenz, sabe que para la velocidad de v, mucho menor que la de la luz, tiene las de Galileo. Sabe unas cuantas cosas, sabe… desde el punto de vista clásico. Pero en realidad nunca sabe qué tienen de malo las de Galileo. Así que tratemos de descubrir qué tienen de malo las de Galileo. Bueno, lo que hemos usado para pasar de este dibujo a éste, es algo que fue esencial en el razonamiento que nos condujo al resultado incompatible. Yo acá dibujé cargas negativas y positivas igualmente espaciadas. Además dije que eran del mismo valor absoluto, que eran q y –q. Y como estaban igualmente espaciadas, entonces las velocidades eran positivas y negativas, y por lo tanto se neutralizaban. En el otro dibujo las seguí dibujando como cargas q igualmente espaciadas. Y entonces eso jugó un rol fundamental, porque yo dije: bueno lo que yo necesito es que haya interacción en ambos casos, porque si no estoy en una situación absurda. No me preocuparía tanto si no hubiera interacción magnética si la magnética es reemplazada por la eléctrica. Total, la naturaleza de la interacción no sería lo más grave. Lo más grave sería que no haya interacción. Pero yo dije, tampoco hay eléctrica porque cada… sigue siendo neutro. Ahora, para que siga siendo neutro, yo tengo que pensar, que las distancias siguen siendo iguales, la distancia entre cargas y que las cargas siguen siendo q y –q. El concepto de que la distancia no cambia de un sistema de referencia a otro, es lo que se llama la invariancia de las distancias y el otro es la invariancia de la carga. La invariancia de la carga es algo que va a seguir en relatividad, pero la invariancia de las distancias no. Se va a revisar la forma de ver el espacio y el tiempo, entonces las distancias van a dejar de ser invariantes. Y entonces en ese instante,… No va a ser… Simplemente porque las distancias positivas y las distancias negativas van a variar en forma diferente. Y entonces, ese cable, en lugar de verse neutro, el de arriba, en ese sistema de referencia se va a ver como cargado negativamente. Porque la distancia entre las cargas positivas… que las cargas negativas… Para llegar a esas conclusiones todavía tenemos un camino para recorrer. Estoy anunciando el resultado. Entonces, como la distancia entre cargas negativas se va a achicar, va a haber una densidad de carga negativa mayor que la descarga positiva. Entonces va a haber un cable cargado negativamente y un cable cargado positivamente. Eso va a dar lugar a una interacción eléctrica, no magnética. Y eso es lo que va salvar las papas del fuego. Si yo cambio la manera de ver el espacio y el tiempo, puedo usar las leyes de Maxwell en cualquier sistema de referencia. Ahora, dado que el éter no fue posible detectarlo, ni de forma directa ni de forma indirecta, dado que nadie sabía decir en qué sistema de referencia había que usar las leyes de Maxwell, alguien encontró que lo más natural era decir que se podía usar en todo sistema de referencia. No hay nada que privilegie un sistema de referencia, no sólo respecto de las leyes fundamentales de la mecánica, sino tampoco respecto de las leyes fundamentales...

Las leyes de Maxwell son leyes fundamentales, porque lo que Maxwell está haciendo de esta manera es poner a la electromecánica por encima de la mecánica. No usar un razonamiento mecanicista para defender las leyes de Maxwell como válidas en un solo sistema de referencia, como el éter, sino al contrario al elevar las leyes de Maxwell al nivel, al rango de leyes fundamentales, válidas en cualquier sistema de referencia, sin ningún sistema de referencia… Entonces, uno dice, bueno, espere, espere, eso no lo podemos hacer porque hay un montón de cosas que nos impiden hacer eso. Eso… Velocidades. ¿No habíamos dicho que las leyes de Maxwell son ecuaciones de orden? Que tienen en cuenta la velocidad. Que si yo las usara en cualquier sistema de referencia, la conclusión sería que la velocidad de la luz es igual en cualquier sistema de referencia. ¿Y no habíamos dicho que no podía concluir eso porque el teorema de adiciones de velocidades de Galileo nos impide decir que una velocidad es igual en cualquier sistema de referencia? Bueno, pues revisemos el teorema de adiciones de velocidades de Galileo... Ah! Bueno! Pero el teorema de adiciones de las velocidades de Galileo viene de las transformaciones de Galileo y ahí no hay ningún supuesto en apariencia. Y entonces, dice ahí también hay supuestos. Hay supuestos sobre la naturaleza del espacio y el tiempo. Y esos supuestos están acá y los vamos ahora a reconstruir en las de Galileo. Para pasar de acá a acá… Una manera de presentar el problema. Para pasar de acá a acá, hemos dejado invariante las distancias. Y las cargas. De esa manera uno puede decir… entonces la interacción eléctrica no existe ni acá ni allá. Y como allá no existe magnética… Si nosotros reformulamos la forma de ver el espacio y el tiempo, entonces podríamos llegar a decir que hay tal interacción magnética… Pero en su lugar aparece una interacción eléctrica, porque va a aparecer una densidad de carga distinta que… Ese es un poco el juego de que se trata. ¿Se entendió hasta acá? Entonces vamos ahora, a ver dónde está la creencia de distancias invariantes en las transformaciones de Galileo. La creencia de distancia invariante es la que lleva al teorema de adición de velocidades. Si nosotros abandonamos la creencia de distancias invariantes, podremos llegar a concebir una velocidad invariante. Pero con distancias invariantes, vamos a ver que no hay velocidad invariante posible. Por eso en Física 1 les presentan las transformaciones de Lorenz diciendo, se sabe que la velocidad de la luz es invariante. Bueno, se sabe! En realidad hubo un largo camino para llegar a quedarnos en esa situación. Porque si el éter existiera, la velocidad de la luz sería… y el otro no. Como nunca se encontró el éter… La única conclusión era que las leyes de Maxwell eran válidas en cualquier sistema de referencia y por lo tanto, la velocidad de la luz era la misma en cualquier sistema de referencia. En tanto uno creyera que la mecánica estaba por encima del electromagnetismo y el electromagnetismo era un fenómeno mecánico de oscilaciones en el éter, no se sabía entonces… Todo lo contrario, se defendía la otra posición. Entonces uno tiene que animarse a dar un paso en contra de lo que ha pensado toda la vida para resolver una situación. Y eso es lo que hace Einstein, el paso que él da es abandonar las nociones clásicas de espacio y tiempo. Las nociones clásicas son nociones intuitivas que todos nosotros usamos en la vida cotidiana, que funcionan en la vida cotidiana. El problema es que si nosotros tenemos una noción que la verificamos todos los días en nuestra vida cotidiana, no vamos a ver ninguna razón para abandonarla. Es difícil el paso que hay que dar. Es difícil aceptar eso. Y ése es el paso que hay que dar. Para haber dado ese paso tenemos que ver lo que tenemos, entonces ver en ese resultado, porqué razón en la vida cotidiana todo parece funcionar bien, creyendo en distancias invariantes. Bueno, vamos con las transformaciones de Galileo. Las transformaciones de Galileo se basan en lo siguiente: yo tengo un sistema de referencia al cual sólo le voy a dibujar el eje x, porque todo lo que voy a decir depende de ese eje, vale para un sistema unidimensional. Así que voy a usar el eje x. Después agregaremos algo sobre el eje z y hago entrar en juego otro sistema de referencia, cuyo eje llamaremos x'… que se mueve con una velocidad v, respecto de este eje.
Quiero ubicar la posición de un punto, en coordenadas en el sistema que llamo S y en el sistema que llamo S'. Y para eso uso una adición de longitudes. El razonamiento es el siguiente. La distancia que va desde O hasta P, yo la puedo descomponer en una distancia que va de O hasta O', más una distancia que va desde O' a P. Entonces, tengo… O bien puedo decir que la distancia de OP, la distancia de O'P…



$$do'p = dop - \alpha_{oo'}$$

Esta es la esencia del teorema de las transformaciones de Galileo. Ahora, cuando ustedes ven el teorema ese de Galileo dicen, bueno, esto vale v por t, porque si tomo el origen del tiempo cuando O y O' estaban encontrados, al cabo de un tiempo t, una velocidad v, una distancia v por t. La distancia de O a P es lo que llamo una coordenada m (¿) y la distancia de O' a P, es lo que llamó una coordenada… Y ahí sale Galileo… Entonces, como yo digo, si nosotros nos damos cuenta de que estamos usando, estamos haciendo intervenir acá, supuestos sobre las nociones de espacio y de tiempo, cosas que nos parecen naturales y tan naturales nos parecen, que las usamos sin darnos cuenta, caemos de cajón en las transformaciones de Galileo. Y las transformaciones de Galileo parecen no contener ninguna hipótesis acerca del espacio y el tiempo. Por el contrario, las transformaciones de Lorenz sí parecen contenerlas, porque contienen la invariancia de la velocidad de la luz y entonces parecen defectuosas, entre comillas, en ese sentido, porque las de Galileo son perfectas, porque no contienen ninguna hipótesis. Tenemos que descubrir cuál es la hipótesis. Entonces tenemos que ser cuidadosos. Tan cuidadosos tenemos que ser, que para hablar de x, para poder reemplazar x, tenemos que decir que x es la distancia de O a P, medida en el sistema S. Porque si yo voy a examinar mis creencias sobre la invarianza de las distancias, yo creo que las distancias son invariantes y eso me funciona bien en la vida cotidiana, pero ahora digo, bueno, un momento, vamos a hacer todo con cuidado.

Cuando yo digo que x es la coordenada en el sistema S, de manera que yo digo… en el sistema S, porque si yo no estoy dispuesto a aceptar que s' es la distancia… cuando hable de las distancias, tengo que decir a qué sistema me estoy refiriendo. Entonces si yo llamo x a la distancia entre OP,… junto con las coordenadas que quiero establecer en el sistema S. En cambio, lo que está en X', es la distancia entre O'P en S'. Y lo que llamo v por t, como t es un tiempo medido en S, después voy a hablar de un v'… De que la distancia no sé qué pasa, tampoco sé que pasa con el tiempo. Entonces dejemos la posibilidad de que los tiempos sean invariantes, como siempre hemos pensado. V por t sería la distancia de O a O'. Si tengo un tiempo medido en S, pongamos distancia de O'P, medido en S. Entonces, si yo digo, acá lo que está en cuestión es finalmente nuestras creencias si las distancias son invariantes, yo usé para pasar de un sistema a otro… Esa fue mi hipótesis sobre el espacio. Entonces en esta cosa que tengo acá, si yo las distancias las mido en estos sistemas. Entonces yo no puedo reemplazar…

$$x = dop\Big|_{S}$$

$$x' = do'p\Big|_{S'}$$

$$vt = doo'\Big|_{S}$$

$$do'p\Big|_{S} = dop\Big|_{S} - doo'\Big|_{S}$$

Y como yo ya no sé si está bien o está mal, por las dudas, me voy a cuidar y voy a decir, bueno, esta ecuación que está escrita acá, yo la puedo usar en ese S o en S'. Si la uso en S, esto que está acá lo voy a escribir como x… Viceversa, si la uso en S', acá no… Entonces, da lo mismo si la uso en S o en S' porque S y S' son dos sistemas invariantes… Yo voy a elegir escribirla en S… En qué sistema mido las distancias. Por ejemplo, en S. Entonces, la conclusión, todo esto daría…

$$\boxed{dO'p\Big|_{S} = x - vt}$$

Para obtener las transformaciones de Galileo yo tendría que poner S'.
Pero no lo puedo hacer a menos que creamos que las distancias son invariantes. Recuerden qué significa invariante.

PARA OBTENER LAS TRANSFORMACIONES DE GALILEO, DEBERÍAMOS REEMPLAZAR $dO'P\Big|_{S}$ POR X'.

PERO ESTO IMPLICA CREER EN DISTANCIAS INVARIANTES (ES DECIR, $dO'P\Big|_{S} = dO'P\Big|_{S'}$)

Significa que una distancia, por ejemplo la distancia: dO'P I S = dO'P I S'. Invarianza, la palabra invarianza quiere decir que una cierta magnitud física vale lo mismo en otro sistema de referencia. Entonces, bueno, si yo creyera que hay invarianza, yo podría llegar a… Como me da una longitud, cuando me dicen por ejemplo, este borrador mide 15 cm, mide 15 cm no importa si se está moviendo o no. No importa si yo lo mido en el sistema cuando está en reposo, o lo mido… cuando se está moviendo. Cuando uno anuncia que la medida del borrador es, la anuncia de esa manera:

15 cm sin referirse al sistema de referencia, es porque en el fondo cree en la invarianza de la distancia. Que esa magnitud… Así que Galileo pasa por estas creencias. Igual que pasó por esta creencia nuestro dibujito de los hilos cargados. De esta creencia sale v por t. Y salen algunas cosas más, sale el teorema de velocidades, por ejemplo. Entonces, en ese caso, si creemos podemos decir, si no creemos, no podemos decir. Miren una cosa más que sale de acá. Además hay un principio de simetría que uno usa siempre, que es que nuestro sistema de referencia S, S', etc., etc., todos los sistemas de referencia, toda la familia de sistemas inerciales, uno acepta que están en pie de igualdad, que no hay uno mejor que el otro. En particular, para las transformaciones de Galileo que estén en pie de igualdad quiere decir que si en vez de S a S', se transformase de S' a S, la transformación tendría que ser la misma. Porque no hay nada distinto de S a S' que de S' a S.

EN ESE CASO $x' = x - vt$ GALILEO

S' no es mejor que S, ni S es mejor que S'. En eso no puede haber diferencia. Sólo hay algo que tienen diferente, cuando… S' se mueve hacia la derecha respecto de S. Pero si yo estoy parado en S', S se mueve hacia la izquierda respecto de S'. Esa es la única diferencia. Por lo demás, las transformaciones de Galileo tendrían que verse exactamente igual cuando voy de S' a S.

Entonces cómo se debería ver la transformación inversa, esa que está escrita ahí. Tendría que verse por simetría para entender esta idea de que no hay un sistema privilegiado. Tendría que verse que S es igual a S' más t por t'.

ADEMÁS, POR SIMETRÍA, CUANDO TRANSFORMAMOS DE S A S', LA TRANSFORMACION DEBE SER = (SALVO POR EL CAMBIO DE V POR –V)

Fíjense que me tomé la libertad de poner S', porque que sé yo. Ahora si veo con cuál de estas ecuaciones y reemplazo x. Vt = vt'. X' + vt', x se va a ir porque está de los dos lados. Resultado: t = a t'.

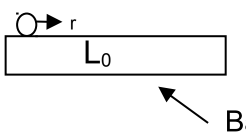
$X = X' + vt'$

$t = t'$

Quiere decir que la creencia en distancias invariantes, más la idea de simetría, nos lleva a que el tiempo también es invariante. Distancias invariantes implican tiempos invariantes. Nuevamente parece que estamos hablando de trivialidades, de cosas totalmente innecesarias de mencionar. Porque también es parte de nuestra vida cotidiana, esta idea de que los tiempos son invariantes, porque si yo tomo un avión y voy de acá a Salta, puedo medir el tiempo de viaje con el reloj, en el sistema de referencia del avión. Pero también puedo comprobar que los relojes del sistema aeropuerto, que es otro laboratorio, otro sistema de referencia, y que están sincronizados entre sí, yo puedo hacer una verificación. Del avión puedo llamar por teléfono a Salta y preguntar cuánto marca el reloj de Salta y verificar que coincide con el reloj del aeropuerto de Buenos Aires. Cuando llego a Salta, miro el reloj, pasaron dos horas, miro el reloj del aeropuerto y también pasaron 2 horas. Así que la idea de que el tiempo transcurre igual en distintos sistemas de referencia, también la tenemos incorporada como parte de la vida cotidiana. Así que hacer todos estos procedimientos para llegar a esta conclusión parece que es totalmente innecesario. Entonces, todas estas cuestiones forman parte de la transformación de Galileo, generalmente sin que sean mencionadas. La creencia en distancias invariantes y en tiempos invariantes. Ahora, si estamos dispuestos a ceder en esa creencia, en favor de resolver el problema del éter, el problema de que no le hemos encontrado el sistema de referencia privilegiado para el electromagnetismo, si estamos dispuestos a decir que el electromagnetismo no tiene un sistema de referencia privilegiado, que sus leyes valen en cualquier laboratorio y por lo tanto la velocidad de la luz es c en cualquier laboratorio, y por lo tanto, las conclusiones de Galileo, que llevaría a la adición de velocidades, es incorrecta. Y por lo tanto algo malo hay en Galileo. Y lo único que encontramos en Galileo es esta creencia de distancias invariantes y de tiempos invariantes. Y, por lo tanto, eso debe ser lo que está mal. Entonces tenemos que replantear la transformación, no reemplazar acá por x', quedarnos en este paso y hacer algunos razonamientos adicionales para encontrar la transformación correcta.

Ponemos una barra en reposo, en reposo significa, ponemos el sistema de referencia en la barra. Y ponemos una cierta bolita que se desplaza con una cierta velocidad v a lo largo de la barra.

VEAMOS EL SIGUIENTE "EXPERIMENTO" EN EL SISTEMA FIJO A LA BARRA



Barra en reposo

$t = L / V$

¿Cuánto tiempo va a tardar la bolita en recorrer la barra? Bueno, alcanza a la velocidad v, el tiempo empleado va a ser la longitud de la barra, medido en la velocidad v. Ahora, la longitud de la barra en qué sistema. Porque yo estoy justamente especulando con la idea de que las longitudes no sean invariantes. Bueno, en el sistema donde estoy observando esto. Si en este laboratorio, la bolita se mueve con velocidad v, y este tiempo t es el tiempo que transcurre en este laboratorio, acá tendré que usar la longitud de la barra en este laboratorio. Las medidas las tengo que tomar en este laboratorio. Entonces, eso lo tengo que explicar de alguna manera. Entonces, este laboratorio si quieren lo llamamos S. Lo importante es que ese laboratorio está fijo a la barra. Entonces, EN EL SISTEMA FIJO A LA BARRA. Entonces tengo que medir la longitud de la barra… en el sistema que vamos a llamar S. A la longitud de la barra medida en su sistema cuando está fija, la vamos a llamar longitud propia, esto ya es teoría de la relatividad. Pero como estamos dispuestos a especular con que la barra tenga una longitud diferente en nuestro sistema, es bueno ya dar un nombre la longitud en el sistema propio. [LA LONGITUD MEDIDA EN EL SISTEMA PROPIO DE LA BARRA] Que es el sistema fijo a la barra. Bueno, esta misma situación se puede mirar desde el sistema de la bolita. Esto de la barra y la bolita es el mismo juego que las cargas positivas y negativas, en un sistema donde las cargas negativas estaban en reposo o donde las cargas positivas estaban en reposo. [EN ESTE SISTEMA FIJO A LA BOLITA] En este sistema fijo a la bolita, entonces se ve una bolita fija y una barra moviéndose con velocidad –v. En este sistema la longitud de la barra no va a ser L cero, podría ser otra. Justamente eso es lo que queremos poner en juego. Así que tenemos el largo L. En el tiempo entre los eventos que estamos considerando, el tiempo Δt y el tiempo transcurrido, desde que la bolita pasa por un extremo de la barra y por el otro extremo. Ese es el tiempo que podemos medir, tiene que ver con cuestiones de cinemática elemental… Ese tiempo también podría ser diferente. Si estamos dispuestos también, sabemos que esa distancia viene acompañada por varianza de tiempo, así que pensamos que si rompemos la idea de la invariancia de distancia, también se romperá la idea de varianza de tiempo. Así que le vamos a dar otro nombre al intervalo de tiempo en este laboratorio. Ahora, en este laboratorio hay una cosa que cuidar entre los dos eventos que estamos considerando: el paso de la bolita por un extremo y el paso de la bolita por otro extremo. Como la bolita está quieta, los dos eventos ocurren en el mismo lugar. Se mueve la barra y acá ocurre el evento 1, la barra sigue de largo y acá ocurre el evento 2, que es el segundo. Entonces lo que tenía de peculiar el primer laboratorio es que la barra estaba fija, podríamos decir que lo que tiene de peculiar este laboratorio… Cuando nosotros medimos el tiempo entre dos segmentos que ocupan el mismo lugar, llamamos tiempo propio a ese, a la medida del tiempo en el laboratorio donde suceden las cosas, donde las cosas suceden en el mismo lugar. Entonces, en este laboratorio: [LLAMAMOS Δt (TIEMPO PROPIO) AL INTERVALO DE TIEMPO ENTRE EVENTOS QUE OCURREN EN EL MISMO LUGAR.]
Entonces, ahora voy a plantear la cinemática elemental acá, entonces voy a medir, no delta t sino delta tau. Podría ser Δt… En este sistema llamamos delta tau porque los eventos ocurren en el mismo lugar y la cinemática elemental indica que… la longitud recorrida podría ser diferente, por eso la llamamos L y no Lz. … Sin embargo, algo resulta, algo resulta.

$\Delta\tau = L / V$ $\qquad$ $L / \Delta\tau = L_0 / \Delta t$ $\qquad$ $\Delta t / \Delta\tau = L_0 / L$

Resulta esto. ¿Qué es esto? Si nosotros creemos, insistimos en nuestra creencia de la invariancia del tiempo… Esto no es nada. Porque si las condiciones son iguales esto da 1 y… esto da 2. Ahora, si nosotros estamos dispuestos a ceder en esa creencia,… Esto nos está diciendo que la forma en que cambian las longitudes, está relacionada con la forma en que cambian los tiempos. Ahora, olvidemos por un rato el modo en que cambian los tiempos. Pensemos por un momento de qué puede depender el cociente de L_0 / L. ¿De qué puede depender este cambio de L_0 a L? Acá la barra está en reposo, acá la barra está en movimiento. ¿Cuál es la única diferencia en la situación donde la barra está en reposo y la situación donde la barra está en movimiento? El movimiento. Así que uno sospecha que si, si esto nos puede llevar a… esto debería ser alguna función de la velocidad, de cuánto se mueve la barra. Es decir, éste tendría que ser un r de v. Entonces lo que esto está diciendo es que la función de la velocidad en este cociente, es la de una función… Entonces L_0 / L, SÓLO PUEDE SER FUNCIÓN DE LA VELOCIDAD.

$L_0 / L = \delta(v) \Rightarrow \Delta t / \Delta\tau = \delta(v)$

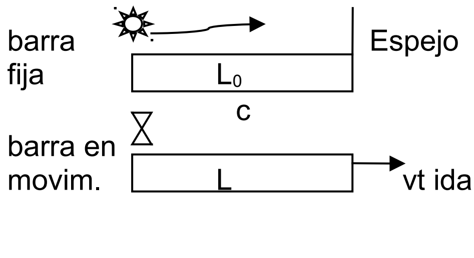
Entonces llamemos a esa función, gama. Lo que entonces he sostenido ahora es que, para Galileo… pero ahora nosotros, en lugar de defender nuestras creencias vamos a suponer la invarianza de la velocidad de la luz. Hemos reemplazado nuestras creencias por una nueva creencia. Por lo tanto, lo que sea gama tiene que ser aquello que necesitemos para que la velocidad de la luz… Es decir, la transformación de velocidad que viene de la nueva forma de ver la ecuación tiene que producir en particular que la velocidad de la luz resulte invariante. Y eso es lo que va a… Entonces Δt / $\Delta\tau$ también tendrá que ser… porque estas dos fuerzas son iguales por cinemática elemental y usando un poquito de simetría. Usar cinemática elemental, la simetría está en… Bueno, quién es gama.

EL VALOR DE δ (v) RESULTA DE SUBORDINAR LOS CONCEPTOS DE ESPACIO Y TIEMPO A LA INVARIANCIA DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Abandono los viejos invariantes que es lo que quería, los voy a abandonar en favor de las leyes de Maxwell, es decir, lo que estoy haciendo es, cualquier cosa que está en conflicto entre el principio de relatividad, las leyes de electromagnetismo y las transformaciones de Galileo. Cuál de ellas está mal. Son 3 cosas, hay una que tengo que negar. Lo que Einstein dice es el principio de relatividad lo tenemos que defender. La idea de que las velocidades son equivalentes… igual que otro, esto lo que tengo que defender. Luego, tengo que decidir entre las leyes de Maxwell y las transformaciones de Galileo. Las leyes de Maxwell tienen que verse como leyes fundamentales, en un sistema de referencia privilegiado, tiene que valer el principio de relatividad para x. Pero el teorema de… no permite que valgan… Pero el tema ahí es que parece que no tiene nada malo. Bueno veamos qué tiene de malo. Descubrimos que tiene metido adentro las creencias de tiempo y distancia invariantes. Y revisar eso significa… tiene que ser otra cosa, cuánto tiene que valer. Y lo que haga falta para que la tercera… también sea invariante. Bueno, yo les voy a hacer ahora… lo que habría que formular, para poner a prueba la invarianza de la velocidad de la luz, en todo caso les dejaré a ustedes, trataré de hacerlo rápidamente, para que calculen el valor de a.

OTRO EXPERIMENTO

Un sistema donde voy a tener una barra fija y otro sistema donde una barra se está moviendo. Vamos a poner una fuente de luz, una lamparita. Pega en el espejo. Y vuelve. ¿Con qué velocidad va la luz de ida y de vuelta?



$2L_0 = c\,\Delta\tau$ (1)

$d_{o'p}\big|_S = x - vt$

Lo que llega a recorrer, más lo que se desplaza la barra, hay que descontar lo que la barra se mueve.

C por el tiempo de ida es lo que recorre el rayo.

El espejo se desplaza con v, Ida: c Δt_{ida}

Y para volver el rayo recorrerá…

Y el tiempo de vuelta es igual a c + v.

Ida $= c\,\Delta t_{ida} = L + v\Delta t_{ida} \Rightarrow \Delta t_{ida} = (c-v) / L$

$\otimes$

Vuelta $= c\,\Delta t_{vuelta} = L - v\Delta t_{vuelta} \Rightarrow \Delta t_{vuelta} = L / (c+v)$

Por lo tanto, el tiempo que transcurrió en los tiempos que me interesa, pasa en un lugar y en un instante.

Bueno, muy bien entonces tenemos acá el Δt y arriba el $\Delta\tau$.

A esta ecuación la voy a llamar 1 y a esta ecuación la voy a llamar 2.

9. A3: Una pregunta: no quedó que el tiempo de ida es $\otimes$?

10. P: Sí, tenes razón

$\Delta t = \Delta t_{ida} + \Delta t_{vuelta}$

2 $\Delta t = L / (c-v) + L / (c+v) = 2\, \tau\, L / (c^2 - v^2)$

$$2 / 1 = \overset{\delta}{\Delta t/\Delta\tau} = (\cancel{2}\, \tau\, L / c^2 - v^2) / (\cancel{\tau}\, L_0 / c) = 1 / (1 - v^2/c^2) \quad \overset{\delta\text{-}1}{L / L_0}$$

Esto, lo que permite saber cuánto vale δ, si las v cambiasen, eso me permitiría saber si las longitudes cambian, los tiempos también por otro de los ejercicios que hicimos.

Nociones equivalentes que igual nos sirven.

$\delta = 1 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)} > 1$

Aún para velocidades próximas a la velocidad de la luz en el cociente L_0 / L - L_0 es más grande que L.

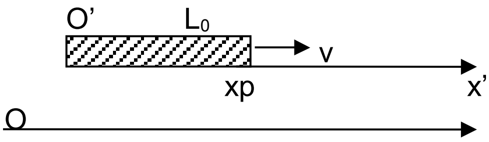
$L(v) = \delta^{-1}(v)\, L_0 < L_0$ contracción de longitudes

Eso se llama contracción de longitudes y la relación entre el tiempo entre dos eventos.

$\Delta t = \delta\, \Delta\tau >$ dilatación del tiempo

Por ejemplo, si yo soy el pasajero que voy en el avión… un reloj mide tiempo propio.
Cómo modifico las transformaciones de Galileo, me quedó pendiente eso.
Yo puedo poner ahora una hora que vaya de o' a P.

$d_{o'p}\Big|_S = x - vt$



La contracción es una contracción de la luz propia, longitud de la barra medida en x'.

$L_0 = d_{o'p}\Big|_{S'} = x'$

$L(v) = d_{o'p}\Big|_S = \delta^{-1} L_0 = \delta^{-1} x'$

Es decir, la longitud de la barra es…
$\delta^{-1} x' = x - vt \Rightarrow x' = (x - vt) / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$

Les voy a dejar dos tareas pendientes, sacar la transformación de tiempo. Tiene la misma pinta salvo xv y – v

$X = (x' + vt') / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$

Es más difícil que en Galileo.
Ejercicio:
$T' = t - (v/c^2)\, x / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$
Van a volver a Galileo
Quiénes son x, x', Δt… de un evento en S'.
Para cerrar esto yo les dije varias cosas…

Esto puede depender de t.
Puede ser que la barra esté en esta galaxia o en otra. Puede depender del tiempo.
Estoy suponiendo que el espacio es homogéneo, que es isótopo.
Estoy suponiendo que a todo tiempo las propiedades fueron iguales.
Las leyes de Newton son invariantes frente a las Transformaciones de Galileo.
Por lo tanto, la mecánica misma tiene que ser ahora reelaborada. De esta reelaboración va a salir algo muy apasionante. Leyes de conservación de cantidad de movimiento y energía al transformarse desde la mecánica relativista.
Es constante porque el sistema está aislado.
Se tiene que observar en cualquier sistema de referencia va a quedar que la suma de cantidades de movimiento.

$p = mv$
$\sum p' = 2p - MV$

En la mecánica clásica cuando ya no sirve Galileo…
El sistema está aislado.
Como esto de por sí no cambia en el tiempo, esto también es conservado.
Esto no vale lo mismo. Esto cambia al poner en juego las transformaciones de Lorenz.
No es algo que sea obviamente, evidentemente conservado.
Es lo que se llama la energía relativista pero Einstein dijo cómo lo que aparece es una combinación de masas y de energía cinética.
Podría tener energía relativista, conservado…

Se volvió complicado, eso que podía ser conservado.
Einstein pensó que la masa podía transformarse en una forma de energía. Dio lugar para resolver otras cosas.
De dónde sale la energía de las estrellas… se está quemando masa en las estrellas.
Eisntein arriesgó esta hipótesis.
Nadie podía resolver este dilema pesando las sales.
Masa se convierte en energía y viceversa, la masa destruida del haz de partículas.
También cuando se fusionan núcleos livianos… del mismo modo la fusión de núcleos pesados también libera energía.
Da lugar a una diferencia de masa favorable.
Y finalmente que la creencia del espacio isótopo dio lugar a este conocimiento.
Interacción gravitatoria no es una ley relativista.
Las fuerzas fundamentales van a tener que depender de la V.
Einstein no encontró la fórmula de… se dio cuenta de otra cosa.
No depende de la masa del cuerpo.
Entonces, él dijo, como no depende…
Digamos que no es una fuerza, la interacción gravitatoria.
El sol deforma el espacio.
El planeta orbita, no porque…

El espacio no tiene la geometría de Euclides
Teoría relativista… que es la relatividad general.

CASO 7. PROFESOR D

1. P: Bueno vamos a hacer un breve raconto de lo que estuvimos viendo la clase pasada. Estuvimos viendo que, hay un problema que aparece en la mecánica cuántica que uno no tiene en mecánica clásica. Que es…

(Problemas con la computadora y el cañón) 5'

2. Bueno les decía, vamos a hacer un pequeño raconto de lo que vimos la clase pasada. Dijimos que había un problema en mecánica cuántica que no aparece en mecánica clásica con las partículas idénticas. Dijimos que, así como en mecánica clásica uno define partículas idénticas como aquellas partículas que tienen todas las propiedades fundamentales iguales, su carga, su masa, su spin, etc., etc. En mecánica clásica, eso no me trae ningún tipo de problemas. ¿Por qué no me trae ningún tipo de problema? Por el hecho de que si yo tengo dos partículas idénticas interactuando o no y rotulo a una inicialmente como 1 y a la otra como 2, ¿sí?

Puedo seguir su evolución durante todo el movimiento, durante todo el proceso, de tal manera que en todo momento yo sé cuál es la partícula que rotulé como 1 y cuál es la partícula que rotulé como 2. Por qué, porque puedo fijar mi vista en cada una de ellas y seguir la trayectoria de cada una de ellas. ¿Está bien?	Dibujos

En mecánica cuántica vimos que eso no pasaba. ¿Por qué? Porque si yo tengo dos partículas que están afectando la una a la otra, mientras están espacialmente separadas, cada una de ellas va a tener su función de onda asociada, cada una de ellas, digamos, puede mantener más o menos su individualidad, mientras están suficientemente alejadas.

Pero a medida que se van acercando a la zona donde se cruzan, las funciones de onda, llega un punto en que uno tiene una situación como esta, donde comienza a mezclarse espacialmente estas dos funciones de onda y… donde cada una de ellas tiene su evolución. No sabemos, hay dos estados posibles finales y no podemos distinguir uno de otro. Podría ser que lo que artificialmente rotulé como 1 al principio, haya seguido su camino, y 2 también. O bien exactamente al revés, es decir, que 1 haya rebotado y 2 también. ¿Está bien? Entonces, la pregunta es ¿cuál de estos dos estados es el final? ¿Sí?	Dibujos

Y la respuesta es que uno no puede determinar cuál de los dos estados es el final. Y en realidad, existe probabilidad para los dos estados. Lo que se puede determinar es esa probabilidad. ¿Está bien?

Entonces, bueno, lo que vimos es que uno tiene un hamiltoniano, supongamos que uno tiene un hamiltoniano que tiene una cierta simetría, un hamiltoniano de estas dos partículas, idénticas y este hamiltoniano dijimos que es simétrico frente a las permutaciones de las dos partículas.	H (1, 2)

¿Esto qué significa? Que si yo tengo, supongamos, dos electrones, tengo al electrón que inicialmente rotulé como 1 y al electrón que inicialmente rotulé como 2, cada uno en su situación, ¿sí? Si yo tomo el electrón 1 y lo pongo en la situación del 2 y tomo al 2 y lo pongo en la situación del 1, el fenómeno no cambia y el resultado va a ser estrictamente el mismo. Y eso es lo que uno llama simetría de permutación de las dos partículas. Todo esto es lo que estuvimos viendo la clase pasada. Entonces, bueno, en mecánica cuántica vimos lo que se hace. Si yo quiero saber cómo son las funciones de onda de un sistema de dos partículas, la función de onda de un sistema de dos partículas, idénticas o no, recuerden, que es la función de onda asociada a la densidad de probabilidad de encontrar a una partícula en una cierta zona del espacio y a la otra partícula también en una cierta zona del espacio. ¿Está bien? Esta es la probabilidad conjunta. Que va a dar una densidad de probabilidad conjunta. ¿De acuerdo? Si yo tengo… hamiltoniano, que tiene esta simetría, recuerden que, en mecánica cuántica, cuando uno tiene una simetría y quiere ver, digamos, quiere explotar al máximo esa simetría, lo que hace es definirse un operador que realice esta operación de simetría. Y lo que dijimos la vez pasada también es que, si uno define este operador que, en este caso ¿qué sería? Un operador de permutación de las dos partículas, o sea, permuto la partícula 1 por la partícula 2. Cambio las coordenadas de la partícula 1 por las coordenadas de la partícula 2. ¿Sí? Entonces, lo que uno va a tener, es que el hamiltoniano y ese operador de permutación, van a conmutar y esto tiene un montón de consecuencias. Una de las consecuencias fundamentales es que, estos dos operadores van a compartir un conjunto de autofunciones. Entonces ¿qué significa encontrar una simetría en mecánica cuántica? Significa que si yo encuentro las autofunciones del operador Ψ, voy a saber mucho sobre las autofunciones del operador T. ¿Está bien? Porque comparten un conjunto de autofunciones comunes. Bien, entonces, la idea de lo que hicimos la vez pasada fue justamente encontrar las características que tenían las autofunciones del operador P. ¿Y qué es lo que vimos? Lo que vimos es que, estas autofunciones que son autofunciones de dos partículas ¿está bien? Tienen esta propiedad, si yo intercambio las dos partículas, la autofunción de esta función de onda ¿es simétrica o antisimétrica ante el intercambio de las dos partículas? ¿Está bien? Y esta es una propiedad fundamental, es una propiedad fundamental. Esta simetría o antisimetría cuando uno intercambia las dos partículas es una propiedad fundamental, tan fundamental, tan fundamental, que divide a todas partículas del universo en dos tipos. ¿Está bien?

Aquellas que tienen su función, aquellas que digamos, cuando uno calcula la función de onda de un sistema de dos partículas idénticas, esta función de onda es simétrica frente a la permutación de las dos partículas, ¿sí?	$\tau\,(1, 2) = \pm\,\tau\,(2, 1)$

Y aquellas partículas que se llaman bosones y las otras partículas, aquellas que tienen una función de onda antisimétrica ante la permutación de las dos partículas y esas partículas las llaman fermiones. Y vamos a ver, ahora, en lo que resta de la clase, que el hecho de que una partícula sea un bosón o un fermión, tiene digamos, hace que su comportamiento sea totalmente diferente. Que sus propiedades sean totalmente diferentes. Sí, decime.

3. A1: Entonces yo no puedo tener una partícula que a la vez sea bosón o fermión.

4. P: No, cualquier, ahora enseguida vamos a ver que estas propiedades de simetría o antisimetría es constante en el tiempo, es decir, un electrón es un fermión toda su vida. Un fotón es un bosón toda su vida. O sea su función de onda siempre va a ser simétrica o antisimétrica toda su vida. Puede suceder sí que la combinación de dos fermiones, por ejemplo, se comporte como un bosón. Y nosotros vimos un caso, no sé si se acuerdan, allá lejos y hace tiempo, en termo. ¿Se acuerdan que alguna vez vimos termo?

5. As: Ah! Sí! [Risas].

6. P: Cuando vimos superconductores, ¿se acuerdan de los pares de Cooper? Los electrones son fermiones. Cuando se combinan formando un par de Cooper, ese par, aunque cada electrón es un fermión, ese par se comporta como un bosón. Y ahora vamos a ver qué significa eso. Y justamente el hecho de que ese par se comporte como un bosón, hace que ese material tenga propiedades superconductoras. ¿Está bien? Que, con un par de electrones no podría tener esas propiedades. Bien, entonces, lo primero que analizamos la vez pasada, es cómo sería la función de onda de un par de partículas no interactuantes, un caso más sencillo. Y vimos, que si uno tiene un hamiltoniano, si uno tiene un hamiltoniano que es separable, por ser no interactuante, en un hamiltoniano para la partícula 1 y en un hamiltoniano para la partícula 2, recuerden que este rótulo que ponemos de 1 y 2 es totalmente artificial, son dos partículas idénticas. ¿De acuerdo? Y esto

ligado a una función de onda de estas dos partículas, nos va a dar la energía conjunta de las dos partículas, con una función de onda de las dos partículas.

Entonces vimos que, como es inseparable en las coordenadas de la partícula 1. Y esto depende solamente de las coordenadas de la partícula 1. Y esto solamente de las coordenadas de la partícula 2.
Como son funciones de onda, perdón como son operadores separables, entonces, lo que nos dice la matemática, es que esta función conjunta de las dos partículas, se podría escribir como una función para la partícula 1, con una función de la partícula 2. ¿Está bien? Donde recuerden que mu y fi representaban todo el conjunto de números cuánticos que eran solución de cada uno de los hamiltonianos, ¿sí? Ahora, esto es lo que nos dice la matemática, ¿sí? Y además, igualmente, si yo intercambio uno con dos, uno puede

$$(H_1 + H_2)\,\tau\,(1, 2) = E\,(1, 2)\,\tau\,(1, 2)$$

$\alpha.$ —

$$X1\ \ X2 \Rightarrow t\mu\,(1)\ \ t\mu\,(2)$$

Fi mu de 1 por fi mu de 2.

$$\tau\,(1, 2) = \tau\mu\,(1)\,\tau_0\,(2)$$

Sería otra solución matemática posible, con la misma jerarquía, ¿está bien? Y recordemos que si uno tiene… Si yo tengo una función, una ecuación de autovalores, donde dos soluciones tienen el mismo autovalor, cualquier combinación lineal entre ellas también va a ser una solución. Hasta ahí la matemática. La física qué nos dice, bien, tenemos todo este universo de soluciones, pero no todas son soluciones físicas. ¿Está bien? Las únicas soluciones físicas, las únicas soluciones físicas, son aquellas tales que, la función de onda, la función, es simétrica o antisimétrica frente a la permutación de las dos partículas. ¿Está bien? Entonces, de todo este universo de soluciones matemáticas posibles, tomamos solamente aquellas combinaciones lineales que son simétricas o antisimétricas frente a la permutación de las dos partículas. ¿Está bien? Y entonces, encontramos lo siguiente, una función de onda simétrica, siempre recuerden que esto es sin interacción. Una función de onda simétrica de las dos partículas que resultaba que las podíamos escribir de esta manera, como la suma, normalizada de estos dos productos:

fi mu de 1 por fi mu de 2 + mu de 2 por fi mu de 1.
Y una combinación antisimétrica:
1 sobre raíz de 2, de estas dos que resulta de la resta de las dos:
Fimu de 1 fimu de 2 – fimu de 2 por fimu de 1

$$\tau_S\,(1, 2) = 1/\urcorner\sqrt{2}\,[\,\tau_u(1)\,\tau_u(2) + \tau_u(2)\,\tau_u(1)]$$
$$\tau_A\,(1, 2) = 1/\urcorner\sqrt{2}\,[\,\tau_u(1)\,\tau_u(2) - \tau_u(2)\,\tau_u(1)]$$

¿Está bien? Y éstas son las únicas soluciones aceptables, ¿está bien? De todas las combinaciones lineales posibles, son las únicas dos soluciones aceptables desde el punto de vista de la física. Es decir, la solución de esta ecuación matemática es una función de onda de dos partículas idénticas. ¿Está bien? Vimos cómo escribíamos también la densidad de probabilidad y vimos que esta densidad de probabilidad correspondía, ya sea el intercambio simétrico o antisimétrico, a la suma de las densidades de probabilidad de las dos situaciones, de los dos estados finales posibles. Estos dos estados de los cuales hablamos al principio. Más un término de interferencia. ¿Está bien? Y ahí está la gran diferencia con la mecánica clásica. ¿Por qué? Porque teníamos que en mecánica clásica por ahí también podemos tener dos estados posibles, finales y entonces, la densidad de probabilidad va a ser la suma de las densidades de probabilidad de cada uno de esos dos estados. Pero no va a haber un término de interferencia, un término que me mezcle los dos estados. ¿Está bien? Esa es la gran diferencia que uno tiene con la mecánica clásica. Bien, bueno, más o menos hasta ahí habíamos llegado la vez pasada. Lo que vamos a demostrar ahora, lo que vamos a mostrar, es que, este carácter de función de onda simétrica o antisimétrica, permanece en el tiempo, no cambia. ¿Está bien? Y esto se puede demostrar bastante fácilmente. Se podría demostrar con un método experimental. Es decir, nunca se ha visto a un electrón comportarse como un bosón, individualmente. O nunca se ha visto a un bosón comportarse como un fermión. O nunca se ha visto a un protón comportarse como un bosón, etc., etc. ¿Está bien? Pero también se puede demostrar. ¿Y cómo lo demostraríamos?

Bueno, lo que vamos a hacer es ver cómo evolucionan las funciones de onda. Para ver cómo evoluciona la función de onda, lo que hacemos es ver cómo sería la ecuación de Schrödinger, pero dependiente del tiempo. O sea, resolver la ecuación de Schrödinger, pero dependiendo del tiempo. ¿Está bien? Entonces, bueno, planteamos esto: tenemos un hamiltoniano, aplicado a nuestra función de onda, simétrica o antisimétrica y esto va a ser igual a….

Hψ = i ћҫ4/ҫt

La función respecto del tiempo. ¿Sí? La ecuación de Schrödinger, dependiente del tiempo. Bien. Supongamos que yo quiero ver esta función, que calculo al tiempo t y quiero ver cómo evoluciona. Quiero ver un instante posterior, cómo es la función de onda. Por ejemplo diferencial t, matemáticamente, un diferencial t después. Si lo demuestro para un diferencial t después, lo estoy demostrando para todo tiempo, porque todos, digamos, tengo la función a T, cualquier función a otro t distinto, lo voy construyendo sumando diferenciales t. ¿Está bien? Entonces, ¿qué pasó? [En referencia al cañón que se apagó] Bue, veremos. Entonces, supongamos que quiero calcular

Fi (t + dt) para ver si sigue siendo simétrica o antisimétrica como fi de t. Bueno, esto cómo lo voy a escribir? Esto lo voy a escribir aproximadamente como:

ψ (t + dt) ≈ ψ (t) + ҫ4/ҫt dt
— ≈ ψ (t) + dt H/iћ ψ (t)
— = (1 + dy H/iћ) ψ (t)

Fi de t, como esto es un diferencial t
Y lo corto… ¿de acuerdo? Más la derivada de fi respecto de t por este diferencial. Bien. Y esta derivada la voy a sacar de acá. La voy a sacar de la ecuación de Schrödinger. Entonces voy a escribir esto como fi de t, ¿sí? Más, bueno, pongo el diferencial t acá. El hamiltoniano lo voy a escribir con un sombrerito para indicar como siempre que es un operador, sobre fih, aplicado a nuestra fi de t. Y entonces va a ser… Y tengo una más, diferencial t por h sobre i barra, por… escribo todo esto como un operador. Entonces, dónde está el, digamos, el punto crucial de esto. Fíjense, supónganse que fi de t es una función simétrica, ¿está bien? Esta es la función evolucionada. ¿Está bien? Quiero ver si está función sigue siendo simétrica. Para saber si es simétrica, ¿qué tengo que buscar?

7. A: [No se oye]

8. P: Claro, acá lo tengo escrito como un operador por una función, un algo multiplicado por otra cosa. ¿Está bien? Entonces esto va a tener la misma simetría que… Si este es un operador simétrico todo este producto vas a ser simétrico. Si este operador es antisimétrico, este producto va a ser antisimétrico. Porque antisimétrico por simétrico me da antisimétrico ¿Está bien? Lo que tengo que ver es la pinta que tiene este operador, si es simétrico o no. Bueno, uno qué es ¿simétrico o antisimétrico? Frente a la permutación de las dos partículas.

9. A2: Simétrico.

10. P: Simétrico. Un uno no cambia nada. Yo multiplico por uno a la función y no pasa nada. Diferencial t es una cantidad positiva y… es un número así que tampoco cambia nada. El tema es que este hamiltoniano ¿cómo es?

11. A3: Invariante.

12. P: Es simétrico frente a la permutación de las dos partículas. Justamente invariante frente a la permutación es ser simétrico frente a la permutación. Entonces todo esto es un operador simétrico. Este operador, que me va a dar la evolución de la función, es simétrico. Entonces, un operador así, no me va a cambiar el carácter de la función. Si la función es simétrica, la función evolucionada va a seguir siendo simétrica. Si la función es antisimétrica, la función evolucionada va a seguir siendo antisimétrica. ¿Está bien? ¿Lo ven todos? Así que el carácter simétrico o antisimétrico no se pierde. No se pierde por, por su evolución en el tiempo. Entonces lo que les comentaba es que, si yo tengo una partícula cuya función de onda, donde las funciones de onda de dos partículas o de dos o más partículas es simétrica, a esa partícula la voy a llamar bosón.

¿Está bien? Dado que este es un carácter permanente, puedo dividir a las partículas en dos categorías.

Y aquellas partículas que tienen una función de onda antisimétrica, las voy a llamar fermiones.

$\Psi S \rightarrow$ bosón
$\psi A \rightarrow$ fermión

¿Está bien? ¿De dónde viene bosón y fermión? Claro. Bosón viene de un físico indio, llamado Bose, que fue junto con Einstein quienes elaboraron lo que sería la estadística de estas partículas de funciones de onda simétrica. Y fermión viene de Fermi. Porque Fermi y Lindhart fueron los que elaboraron también la estadística, los que dedujeron cuál sería la estadística de las partículas como función de onda antisimétrica. Podemos considerar un hecho experimental.

13. A4: Toca una tecla, tal vez eso está en [En referencia al cañón] estaba en modo…

14. P: Ah! Capaz qué sí. Bueno. Vamos a considerar nosotros un hecho experimental que… Como les dije la vez pasada se puede probar, se puede probar en teoría de campo recién. O sea, más o menos, cuando ustedes ya estén egresados, cuando hagan alguna materia de posgrado, no de posgrado, alguna materia optativa que sea Teoría de campos, que los bosones… O sea, hay una correlación. Que tengan una función de onda simétrica y una función de onda antisimétrica, con el spin de la partícula. ¿Está bien? Entonces los bosones, se ve que los bosones son partículas que tienen spin, recuerden que cuando decimos que tienen spin, llamamos al número… Que tienen número cuántico de spin entero. ¿Está bien?

O sea, S es un número entero. S lo escribimos como, bueno, como un número k, donde k pertenece a los enteros. En cambio los fermiones tienen un número cuántico s, un spin semientero y esta pequeña diferencia marca una diferencia impresionante y única de cómo se comportan los bosones y los fermiones.

$S \text{ E } Z$
$s = k$
$k \text{ E } Z$

Entonces, en este caso S se escribe:

S = (2k +1)/ 2, donde k pertenece a los enteros. (k $\text{E } Z$)

Entonces, fermiones, partículas de spin semientero, bosones, partículas de spin entero. ¿Sí? Se puede demostrar que hay una relación de que la función de onda sea simétrica o antisimétrica con el spin, digamos con su número cuántico de... Ahora, por ejemplo, si uno tiene una partícula compuesta. Estas son partículas elementales. Pero si uno tiene una partícula compuesta, que puede estar compuesta por ejemplo por fermiones y bosones o por varios fermiones. Por ejemplo, una partícula alfa, está formada por dos protones y dos neutrones. ¿Sí? Eso es, cada protón y cada neutrón es en sí un fermión. [Tose] Perdón. Sin embargo, la partícula alfa se comporta como un bosón. ¿Por qué? Porque la suma de los spines, si uno suma los spines de todas estas partículas fundamentales, el spin de la partícula alfa es un spin entero. Lo mismo pasa, por ejemplo con el par de Cooper en el caso de la superconductividad. Cada electrón tiene spin ½, pero el par de Cooper, el conjunto de los dos fermiones, tiene spin 1. ¿Está bien?

15. A3: ¿Se suman?

16. P: Se suman como se suman los impulsos angulares, ¿verdad? Como vimos hace un par de clases que se suman los impulsos angulares. No es la suma directa de los spin. ¿Está bien? En realidad, dos spines de un medio, nos pueden conducir a spin cero o a spin 1. Entonces, claro, nosotros todavía no sabemos sumar más de dos Spines. ¿Está bien? Lo que uno tiene que fijarse si la función de onda de la partícula compuesta, va a tener, va a ser simétrica o va a ser antisimétrica frente al intercambio de las dos partículas. ¿Está bien? Es otra forma de ver si esta partícula compuesta va a ser un fermión o un bosón. Entonces, por ejemplo, por ejemplo, supónganse que tenemos una función de onda de 2 partículas que son dos partículas compuestas. ¿Está bien? Vamos a usar una notación terrible, pero simplemente para que nos

entendamos. O sea, escribamos así: esto es 1 compuesto, 2 compuesto.[$\psi\,(1^{\Sigma}, 2^{e})$] ¿Compuesto por qué? Puede estar compuesto por lo que a ustedes se les ocurra. Por ejemplo, supónganse, fíjense, ¿qué es lo que vamos a hacer? Vamos a intercambiar las dos partículas para ver si la función de onda con las partículas intercambiadas es simétrica o antisimétrica. ¿Está bien? Resulta simétrica o antisimétrica. Sale un signo más o sale un signo -. ¿Cómo hacemos esto? Intercambiando cada componente de estas partículas compuestas de a uno. ¿Sí? Entonces, supónganse que transformamos por el número que a ustedes se les ocurra de bosones. ¿Está bien? Bosones, función de onda simétrica. Y yo tengo que intercambiar estas dos partículas. Intercambiando cada… que forma parte de cada una de ellas, cada par de bosones. ¿Cómo será la función de onda de dos partículas compuestas, idénticas entre sí, formada por el número que a ustedes se les ocurra de bosones?

17. A2: Bosones, simétrica

18. P. Bosones. ¿Por qué van a ser bosones?

19. A2: Porque son simétricas.

20. P: Claro. Porque cada vez que intercambio dos, no pasa nada, sigue siendo simétrico, saca un signo +. Así que, si yo tengo dos partículas compuestas formadas por el número que a ustedes se les ocurra de bosones, siempre voy a tener, esas partículas van a ser bosones. Partículas compuestas…

Ahora ¿qué pasa si son fermiones? Entonces supongamos que está formada por, cada una de éstas por 2 fermiones, por ejemplo. ¿Está bien? Entonces, pongamos también esta notación horrible, la 1,1 y la 2 compuesta 1. Sería para la partícula 1.

$$\psi\,(\underset{\substack{\downarrow\\ F^1_1}}{1^{\Sigma}}, \underset{\substack{\downarrow\\ F^1_{2,}}}{2^{e}}) = \psi\,(F^1_1, F^1_{2,} F^2_{1,} F^2_2) = \psi\,(F^2_1, F^1_{2,} F^1_{1,} F^2_2) =$$
$$= \psi\,(F^2_1, F^2_{2,} F^1_{1,} F^1_2)$$

Entonces, ¿esto qué significa? Que el fermión 1, ¿sí? Que puede ser distinto del 2. ¿Está bien? De la partícula compuesta, o sea, el fermión 1 de la partícula compuesta 1.

21. A5: Disculpame, no te entendí. La partícula 1, ¿cuántos fermiones tiene y cuántos bosones tiene?

22. P: No, son todos fermiones. Vamos a escribirlo así, a ver si lo entendemos así. Fermión 1, fermión 2. ¿Está bien? Fermión 1, fermión 2. De la partícula 1. Estos serían los de la partícula 1. Fermión 1 de la partícula 1, fermión 2 de la partícula 1. Lo mismo con la partícula 2. ¿Está bien? Entonces, esto es una función de onda que la puedo escribir así. Es la función de onda del fermión 1 de la partícula 1, fermión 2 de la partícula 1. Le ponemos punto y coma para que se entienda mejor, el fermión 1 de la partícula 2, ¿sí? Y el fermión 2 de la partícula 2. ¿Se entiende? Éste y éste son idénticos. Éste y éste son idénticos entre sí. [Señalando en el pizarrón] ¿Se entiende más o menos esta notación horrible? Bueno, entonces qué hacemos. Para intercambiar las dos partículas, intercambiamos los idénticos entre sí. Entonces, intercambiamos primero éste con éste y después éste con éste. ¿Está bien? Entonces ¿qué tenemos? Cuando intercambiamos éste con éste ¿qué pasa? ¿Con la función de onda?

23. A4: Cambia el signo.

24. P: Cambia el signo. Tengo un signo menos. … Fermión 1 de la partícula 2, fermión 2 de la partícula 1 y acá tendría el fermión 1 de la partícula 1, fermión 2 de la partícula 2. Pero todavía no terminé porque tengo que intercambiar éste con éste. ¿Qué pasa cuando intercambio éste con éste?

25. A: [No se oye]

26. P. Me sale con menos y el resultado final ¿cuál es? El resultado final es que el signo menos con el signo – se cancela y me queda una función. [Escribe en el pizarrón] Sí, está bien. Dos, fermión 1 de la partícula 1, fermión 2 de la partícula 2, perdón, de la partícula 1. Y el resultado total es simétrico. ¿Está bien? ¿Sí?

27. A4: Una cosita. Acá tenemos que nuestro sistema son 4 partículas.

28. P: Son 4 partículas. En realidad, 4 partículas fundamentales, digamos, de las cuales uno sabe su carrera…

29. A4: Perfecto.

30. P: Pero, estas partículas se comportan de a pares. ¿Está bien? Cada par se comporta como una única partícula. ¿Está bien? Una partícula alfa, conserva su particularidad de partícula alfa, a menos que uno la desintegre.

31. A4: Pero si hubiéramos tenido sólo dos fermiones, hubiera…

32. P: Si yo hubiera tenido esto, nada más. Y lo hubiera intercambiado…

33. A4: Hubiera sido un fermión

34. P: No, justamente, tendría… Ahí yo no tengo dudas, porque si yo tengo esta función de dos partículas que seguro son dos fermiones, cuando la intercambio entre sí, me va a dar un signo -. Eso seguro. ¿Qué pasa si la partícula compuesta está formada por tres fermiones?

35. A4: Antisimétrica.

36. P: Y, va a ser antisimétrica. Exactamente. ¿Por qué? Porque tendría un intercambio más y me sacaría un signo – más. Así que la función de onda total resultaría antisimétrica. Entonces más o menos, regla: si yo tengo, si mi partícula compuesta está formada por, digamos, por un número par de fermiones ¿qué va a pasar?

37. A5: Va a ser antisimétrica.

38. P: Va ser un bosón. Si está formado por un número impar de fermiones, va a ser un fermión.

39. A4: ¿Te puedo hacer una pregunta?

40. P: Sí.

41. A4: … ¿Vos podes saber cuántas tenés?

42. P: Sí, seguro. ¿En qué sentido?

43. A4: Saber cuántas.

44. P: ¿Saber cómo está formada la partícula compuesta? Sí, seguro, seguro. Eso se puede determinar. Hasta digamos, cómo se hace eso, desintegrando las partículas. Es decir, por ejemplo, las partículas que estamos llamando fundamentales, como el electrón, el protón, el neutrón, no son tan fundamentales, están formadas también por otras partículas. ¿Está bien? ¿Y cómo se conoce la composición? Son los quartz. ¿Cómo se conoce esta composición? Esta composición se consigue desintegrándolas. Y esto se consigue en los aceleradores de partículas. Los aceleradores de partículas lo único que hacen es entregarle energía… a estas partículas, de tal manera que cuando chocan, liberan una cantidad de energía terrible y se desintegran en otras

partículas, otras partículas más fundamentales, más elementales. ¿Está bien? Y a medida que uno va aumentando la energía, vas conociendo más partículas más internas digamos, más fundamentales. Bien. Vamos a ver, vamos a seguir un poquito más con las partículas independientes y después vamos a ver qué pasa cuando uno tiene una interacción. Ustedes dirán "qué nos interesan las partículas independientes". Sin embargo, se pueden sacar muchas conclusiones generales de los sistemas de partículas independientes. Fíjense, hasta ahora tenemos cómo escribimos la función de onda, la función de onda de un par de partículas, pero qué pasa cuando uno tiene, por ejemplo, un átomo, una molécula, cuando uno tiene muchas más partículas que dos. ¿Está bien? Uno sabe que la función de onda cumple con esta condición, con esta condición, cualquiera sea el número de partícula… una función de onda de un sistema de n partículas. ¿Está bien? Una función de onda que será, ya no será de 1 y 2, sino de 1, 2, 3, así hasta las que quieran.

¿De qué me habla esta función de onda? ψ (1, 2, 3,... N)

Me habla de la densidad de probabilidad conjunta de ese sistema de n partículas… Por ejemplo, la densidad de probabilidad de encontrar cada una de las partículas en una zona del espacio. ¿Está bien? O, no solamente eso sino sacar cualquier, digamos, cualquier característica del estado de la partícula, o sea, viene con qué energía, con qué impulso angular, etc., etc. O sea,… permite calcular cualquier cosa sobre este sistema de n partículas. ¿De acuerdo? Entonces, fíjense, para una partícula, para un sistema de dos partículas, la función de onda antisimétrica, la escribiríamos de esta manera:

1 sobre raíz de 2, de fi subnu de 1, fisubnu de 2 menos fi subnu de 2 por fi subnu de 1
$\psi_A (1, 2) = 1 / \sqrt{2}\, [\psi_\mu (1)\, \psi_\mu (2) - \psi_\mu (2)\, \psi_\mu (1)]$

Vamos a ver si podemos generalizar esto para un sistema de n partículas. Fíjense, la función de onda de un sistema de n partículas, de n partículas ¿sí? Tiene que ser antisimétrica frente al intercambio de dos de ellas. Esta es la propiedad fundamental que tiene que tener. Si yo intercambio dos partículas, me tiene que salir un signo menos. ¿Sí? En el intercambio, en la función de onda simétrica, en el intercambio de dos partículas, la función de onda tiene que permanecer inalterable. ¿Sí? ¿Les hace acordar a algo esta expresión?

45. A1: Al operador

46. P: No, porque no son operadores. Pero yo podría escribir esto de una forma más compacta de esta manera.

47. A: [No se oye]

48. P: No tampoco, más sencillo que eso. Fíjense, yo podría disponer estas funciones. Fíjense, estas son dos funciones, fi mu y fi nu, dos funciones distintas. En un caso evaluada para la partícula 1 y acá para la partícula 2. Y acá al revés. Entonces, fíjense, que esto yo lo puedo calcular de la siguiente manera, yo puedo fabricarme un cuadro, una matriz, donde escribo:

$$= \begin{vmatrix} \psi_\mu (1) & \psi_\mu (2) \\ \psi_\mu (1) & \psi_\mu (2) \end{vmatrix}$$

Fimu de 1 y acá escribo finu de 2, es decir, en esta fila, pongo la función finu evaluada para uno y para 2, o sea, para las dos partículas. Y acá pongo Finu, las funciones de onda, finu evaluada también para uno y para 2. ¿De acuerdo con fabricar esta matriz para…? Y fíjense, fíjense, ¿cómo está relacionada esta función que tengo escrita acá arriba con esta matriz?

49. A2: Es el determinante.

50. P: Es el determinante, exactamente. Es el determinante.

Es decir, esto lo puedo escribir en forma más compacta como el determinante de esta parte sobre raíz de 2. Sobre el factor de

$$- \det / \sqrt{2} \begin{vmatrix} \psi_\mu (1) & \psi_\mu (2) \\ \psi_\mu (1) & \psi_\mu (2) \end{vmatrix} {}^{-}_{+}$$

Si fuera una función de onda simétrica, también la puedo escribir de esta manera. Pero en vez de usar el determinante ¿qué tengo que usar? A esta no la conocen…

51. A: [No se oye]

52. P: No. Se acuerdan del…permanente?

53. A3: No.

54. P: El permanente es el determinante pero sin cambiar los signos, donde los productos no cambian de signo. O sea, esto por esto, a esto por esto. ¿Está bien?

55. A5: ¿Tiene las mismas propiedades?

56. P: No exactamente las mismas propiedades. Pero lo único que tiene es que todos los productos, todos los productos, es más fácil de escribir porque todos los productos van… con un signo más. No hay necesidad de pensar si uno tiene que poner un signo menos o un signo más. ¿Está bien? Así que para una función de onda antisimétrica, tendríamos que el determinante, lo voy a señalar con un signo menos y para una función de onda simétrica, escribiríamos esto con el permanente. Y esto se puede generalizar. ¿Está bien? Si yo tengo un sistema de n partículas, de n partículas, la forma de escribir, la forma de escribir esta función de onda, fíjense que, para un sistema de n partículas voy a tener que combinar cosas como éstas. Pongamos, voy a poner un número porque se me van a acabar las letras griegas:

Fi uno de uno por fi2 de 2, más sigma hasta fn de n.
$\psi_1 (1)\ \psi_2 (2) \ldots \psi_N (N)$

¿Está bien? Tengo productos por ejemplo, de este tipo. ¿Por qué? Porque tenía un hamiltoniano, partículas independientes estoy hablando. Tenía un hamiltoniano, que sería una suma de hamiltonianos cada uno para cada partícula. Así que sería,… y yo tendría productos de este tipo. ¿Sí? Pero, también tengo todos los productos donde tengo intercambiadas dos partículas. ¿Sí? ¿Está bien? Porque también, estos hamiltonianos puedo intercambiar las coordenadas en 1 con las coordenadas de 2, y esto también es una solución, y así todos los intercambios posibles. ¿Cuántos intercambios tengo?

57. A6: n. n -1.

58. P: n factorial. Exactamente. N. n-1.n-2. Y tendría que pensar, fíjense, si yo intercambio entre ésta y ésta. ¿Sí? Esto me da con signo menos, pero si yo quiero intercambiar por ejemplo, a fi 5, los voy a intercambiar de a dos y tendría que ver si me saca un signo más o un signo menos. ¿Está bien? La forma de escribir la función de onda antisimétrica por excelencia. Totalmente antisimétrica, del intercambio de dos de las partículas, es escribir un determinante como éste pero ahora para el caso de las n partículas. Recuerden que el determinante, no sé si los comentaron alguna vez en Álgebra o en alguna Matemática, es la forma antisimétrica por excelencia, es la combinación de estos productos totalmente antisimétrica. ¿Está bien? Entonces cómo escribimos el determinante. Ese determinante lo escribimos de esta manera. [Borra el pizarrón]

Lo escribo así: función de onda antisimétrica de… perdón, antisimétrica de estas partículas. (Fórmula) Lo voy a escribir como el determinante normalizado, ahora vamos a ver el factor de normalización, de lo mismo, de una… en la primera fila, como todo de la función 1, evaluado para cada una de las n partículas. ¿Sí? Entonces función 1 para la partícula 1, función 1 para la partícula 2. Así hasta función 1 para la partícula n. También puedo poner en columna esto, por qué. Porque en el determinante, el intercambio entre filas y columnas no cambia. Elijo una de las dos maneras posibles. Qué pongo en la otra fila: pongo función 2 para la partícula 1, función 2 para la partícula 2, así hasta la función n. Y así hasta la función n. Función n para la partícula 1, función n para la partícula 2, hasta función n para la partícula

$$\psi_A (1, 2, 3... N) = \det \begin{vmatrix} \psi_1 (1)\ \psi_1 (2).....\psi_1 (N) \\ \psi_2 (1)\ \psi_2 (2).....\psi_2 (N) \\ ... \\ \psi_N (1)\ \psi_N (2).....\psi_N (N) \end{vmatrix} / \sqrt{N!}$$

O sea, en cada fila pongo la misma función que cuando… para todas las partículas, o sea, fila es una misma función, columna, es una misma partícula. ¿Ven? O, puedo intercambiar filas por columnas. Y el factor de normalización, si yo tengo n factorial de estos productos, entonces, así como está yo tenía dos factoriales, el factor de normalización para n2 acá es n factorial. Bien. Para la función de onda simétrica, tengo lo mismo pero… O sea, lo único que tengo que hacer, o sea todos los productos se suman con un signo más. Una suma algebraica pero todo con signo… Bien, esto [se refiere a la fórmula planteada previamente] es la función de onda más general para un sistema de n partículas independientes y se llama determinante de Slater. Y cada uno de estos productos se llama producto de Hartree. Y fíjense lo siguiente, uno podría decir “a quién le importa un sistema de n partículas independientes”, ¿no? Sin embargo, si yo tengo por ejemplo, un átomo, una molécula, donde tengo la integración de todos los electrones con todos los electrones, la interacción de todos los electrones con los núcleos, y eso sí, considerando sólo las interacciones de tipo clásico, después puedo tratar las interacciones de tipo, sin órbitas de todos lo electrones, sin órbita entre los electrones y los núcleos y todo lo que a ustedes se les pueda ocurrir. Resolver un problema así, donde tengo un sistema de más de dos partículas, ya tres partículas es un problema, puede ser descriptivamente un problema. Entonces qué es lo que uno hace, qué es lo que ustedes van a ver por ejemplo, en las Estructuras, ya sea en Estructura nuclear o en Estructura 3, que es atómica y molecular. Uno parte de una función de onda de una partícula independiente, donde se calcula esta función de onda de qué manera. Supongamos que yo tengo una molécula. Lo que hago es considerar un solo electrón. ¿Sí? Un solo electrón en un campo promediado de todos los otros electrones. O sea, como si yo tuviera un solo electrón sometido a un campo, que es el campo promediado de todos los electrones. ¿Está bien? Y entonces, el resultado de eso es un determinante como éste, donde cada una de estas funciones es la función de onda, fíjense, de una sola partícula, es la función de onda de un solo electrón, en este campo promedio. ¿Sí? Claro, eso es muy satisfactorio, entonces qué es lo que uno hace a posteriori, ¿sí? a posteriori, uno sabe que, si un electrón se mueve, eso va a afectar el movimiento de todos los otros. Si un electrón, digamos, se mueve plásticamente. Yo tengo una partícula que se mueve y está interactuando con otra, eso afecta la interacción de las partículas, afecta el movimiento de las otras. Es decir, uno dice que el movimiento de estas partículas está correlacionado. Entonces, una vez que uno tiene esa función de onda, para este sistema de partículas independientes, pero sometidas a este campo, tal que uno lo considera un campo externo. ¿Sí? Y agrega la correlación entre las partículas, no solamente la correlación debido a esta integración de Coulon, sino debido a una correlación de spin, se la agrega con otros métodos, con métodos perturbativos. ¿Por qué con métodos perturbativos? Porque esa correlación siempre es una interacción de mucha menor magnitud que es la interacción con ese campo promedio, con ese campo promedio de todos los… ¿Está bien? Y uno puede hacerlo tan exacto como quiera, tan exacto como quiera. Así que, esta sería la función de onda de partida, la función de onda a orden cero y después uno le va agregando todos los efectos que quiera, a posteriori con métodos perturbativos. O sea, como habíamos hablado hace un par de clases, hace un par de clases, que uno, que esos, esos, esas interacciones que son más chiquitas que las fundamentales, pueden tratarlas como desarrollos en serie. ¿Está bien? Y eso es lo que uno hace, eso es lo que ustedes van a ver, por ejemplo, en las Estructuras. Bien, y acá llegamos a un punto fundamental. ¿Está bien? A un punto fundamental y yo quería leerles. Se acuerdan que la vez, que la clase pasada les dije, les dije que les iba a leer alguna frase de los físicos de ese momento para que vieran que ellos tenían la misma confusión que ustedes. Y les voy a leer por ejemplo, lo que dijo, esperen que lo encuentre. … Cuando recibió el Premio Nobel en 1946 y contaba una anécdota, entonces decía: "Una nueva parte de mi vida científica comenzó cuando conocí a Niels Bohr personalmente. Fue en 1922, cuando estuvo dando una serie de conferencias… en las cuales exponía sus investigaciones teóricas sobre el sistema periódico de los elementos, la tabla periódica. El problema de por qué todos los electrones de un átomo en su estado fundamental, no estaban ligados a la capa más interna, había sido planteado por Bohr como un problema fundamental. Claro, ¿por qué todos los electrones no están concentrados en la capa más interna del átomo, si es la capa de menor energía?" ¿Está bien? Es lo que llamaríamos el estado 1… ¿Por qué no tenemos a todos los electrones metidos ahí? "En aquella ocasión y en posteriores discusiones, Bohr me dio la impresión de que estaba buscando una explicación general para el problema de las capas electrónicas completas. Quién encontró ese problema. ¿Quién resolvió ese problema? Fue justamente NN. Y entonces ¿dónde está la razón de que todos los electrones no estén en la capa interna? A ver, ¿quién se da cuenta? Supónganse, nada más, nada más, que yo quiero meter dos electrones en el mismo estado. ¿Sí? El mismo estado es la misma función de onda. ¿Está bien? ¿Cómo escribiríamos esto? ¿Este determinante, esta función de la onda antisimétrica?

59. A2: Como fi 1.

60. P: Claro, por ejemplo, fi 1 y fi2 fuesen ser la misma función.

61. A: [No se oye]

62. P: ¿Está bien? ¿Qué le pasa al determinante?

63. A2: Cero

64. P: Cero. La densidad de probabilidad se va a cero. ¿Está bien? Y esto es lo que ustedes alguna vez encontraron o digamos, alguna vez escucharon o si cursaron alguna química o en el secundario incluso, donde deben haber mencionado sobre aquel principio de exclusión de… ¿Se acuerdan? ¿Lo escucharon mencionar alguna vez? Eso que nos decía que dos electrones en un átomo no pueden estar en el mismo estado. ¿Sí? Bueno, es justamente esto. Dos fermiones no pueden, dos fermiones no pueden ocupar el mismo estado, su densidad de probabilidad se va a cero. ¿Está bien? Los fermiones ocupan en el sistema digamos, tienen que ocupar todos diferentes estados, todos tienen que estar en diferentes estados. ¿Está bien? En cambio, fíjense, supónganse que esto es un sistema de n bosones. ¿Está bien? Entonces esto no es un determinante, sino que es un permanente. Fíjense que yo podría poner la misma función en todas las filas ¿sí? En todas las filas, y el permanente sería totalmente distinto de cero. Entonces esto supone una diferencia fundamental entre fermiones y bosones. Los fermiones son tipos antipáticos, va cada uno por su lado. ¿Está bien? Cada uno con su propio estado y no comparten su estado con nadie. ¿Está bien? En cambio los bosones, uno podría decir que son, así, promiscuos, [risas] porque les gusta andar así en barra, todos amuchados, y pueden compartir todos, todos, el mismo estado.

65. A3: Igual ahí lo que dice es que no todos pueden tener el mismo estado.

66. P: No, vos invertís nada más que dos filas y eso se te hace cero. O sea, no puede haber dos en un mismo estado. ¿Entendes?

67. A3: ¿Ya con dos filas?

68. P: Y sí. Un determinante con dos filas idénticas se hace cero. ¿Está? Y esa es la diferencia fundamental en cuanto al comportamiento de estas partículas. ¿Está bien? Insisto, los fermiones, cada uno en su propio estado, los bosones, los bosones se tienden a amuchar. Se tienden a amuchar incluso más que las partículas clásicas. Fíjense que las partículas clásicas no tienen ningún inconveniente en estar todas en un mismo estado. Sin embargo, los bosones tienen más tendencia a estar juntos que las mismas partículas clásicas. ¿Está bien? Y eso explica, eso explica por ejemplo, la superconductividad. ¿Por qué? ¿Se acuerdan de los pares de Cooper? Los pares de Cooper eran, conjunto de dos fermiones, de dos fermiones que andaban juntos. Este par de Cooper, este par de fermiones se comporta como un bosón. Entonces uno puede considerar este haz de electrones que va al cristalino, como un gas de bosones y un gas de bosones, pueden estar todos en el mismo estado. Entonces ¿qué pasa? Los bosones que están en el mismo estado, tienen la misma energía, el mismo impulso, el mismo todo, ¿sí? suelen chocar, suelen interactuar, sin intercambiar energía o impulso. Entonces, si interactúan entre sí, aunque interactúen entre sí, no se molestan, continúan con la misma energía e impulso como si no hubieran interactuado. ¿Está bien? Entonces, eso explica justamente, eso explica justamente, que este material carezca de resistencia. ¿Por qué? Porque supónganse, yo tengo dos bosones que pueden chocar entre sí. ¿Está bien? Todos tienen el mismo impulso, tengo una corriente entre estos bosones que siguen todos con el mismo impulso. O sea, todos tienen la misma dirección y sentido, el mismo tipo de movimiento. ¿Está bien? Y aunque interactúen eso no cambia. Entonces es una corriente que fluye sin perturbaciones, sin cambiar. ¿Está bien? No hay nada que la detenga. Entonces, eso es lo que explica la superconductividad. Y explica también, por ejemplo, que en este cuadro. En estos cuadros. Qué significa esto, que es un isótopo de helio, que en el núcleo, el helio tiene número de isótopo dos y tiene 3 isótopos. Los diferentes isótopos en lo que varían, es en el número de neutrones que hay en el núcleo. ¿Está bien? … que no agregan carga. ¿Está bien? Entonces existen dos isótopos de helio. El helio 3 y el helio 4. El helio 3 está formado por dos protones y un neutrón. ¿Sí? El helio 4 está formado por dos protones y dos neutrones. O sea, que el núcleo del helio 4 es una partícula… ¿Está bien? El helio 4 presenta la característica de que, a bajas temperaturas, de material… ¿Qué significa esto? Que fluye sin viscosidad, sin que haya nada parecido al rozamiento, o sea sin pérdida de energía. El helio 3, no. ¿Esto por qué es? Porque el helio 4 es un bosón. Entonces, a bajas temperaturas, todos los núcleos de helio están en el mismo estado. ¿Está bien? Están en el mismo estado y tienen características similares a las que mencionamos recién. El helio 3 es un fermión, son dos protones y un neutrón y se comporta como un fermión. Entonces no, estos núcleos no están todos en el mismo estado, no pueden haber dos en el mismo estado. Entonces interactúan entre sí, intercambian energía… Y por lo tanto, va a haber, digamos, perturbaciones en ese movimiento y el movimiento… Eso es lo que se llama viscosidad

69. A5: Por qué a partir del permanente te podes dar cuenta de que el…

70. P: Y, porque el permanente, un permanente, podes tener todos los, o sea, estas son las mismas funciones en todos los…

71. A5: Pero ¿por qué tiende…?

72. P: No, eso no lo demostré.

73. A5: Ah.

74. P: Eso se puede demostrar bien si vos estudias estadística de los bosones. ¿Está bien? Cosa que ustedes van a hacer en Estadística 3. Si uno estudia la estadística de los bosones. O sea, digamos, lo que sería la teoría cinética pero aplicada a los bosones. ¿Está bien? Esta estadística muestra que todos tienden a, digamos, tienen mayor probabilidad de estar en el mismo estado, más probabilidad aún que las partículas…

75. A5: Está bien, pero no sale a partir de ahí.

76. P: No, no sale a partir de ahí. Ahí en parte vos podes tener los fermiones en el mismo estado…

77. A5: Eso sí.

78. P: No hace mucho, en 1990 y algo, digamos, cuando tenemos todos los bosones en un mismo estado, es lo que se llamó, un condensado de Bose. ¿Está bien? Ustedes habrán escuchado hablar alguna vez de eso. Y eso se puede conseguir a bajísimas temperaturas. Pero cuando digo bajas son realmente bajas y hasta ahora no se había conseguido nunca, digamos, un condensado de Bose con todas las letras. Por eso, en 1990 y algo, 95, 96, no me acuerdo bien, se consiguió un condensado de Bose. Después les voy a mostrar, si esto funciona bien [se refiere al cañón], yo les voy a mostrar las características de ese condensado de Bose. El condensado de Bose se considera un raro estado de la materia. Donde todos los bosones se encuentran en un mismo estado. ¿Está bien? Después les voy a pasar también cómo se consiguió, si tenemos tiempo. Porque es bastante, bastante interesante, digamos, cómo se consiguió este condensado. A ver, una última cosa, una última cosa y después pasamos a ilustrar todo esto si la máquina nos lo permite. Supónganse, supónganse, que tenemos un sistema de dos partículas, de dos fermiones. ¿Está bien? Un sistema de dos fermiones.
Y sabemos que estos dos fermiones están interactuando, para hacerlo de la forma más general posible. Entonces, si estos dos fermiones están interactuando, uno va a tener un hamiltoniano de estas dos partículas, que va a ser una parte, que correspondería a la energía cinética de la partícula 1, otra parte la energía cinética de la partícula 2 y abajo voy a tener un potencial de interacción entre los dos, que son las coordenadas de 1 por 2.

$$H(1,2) = -h^2 / 2m\, \nabla^2_1 - h^2 / 2m\, \nabla^2_2 + v_{12}$$

Ya la función de onda no es separada. ¿Está bien? Entonces, lo que uno puede pensar, supongamos que yo quiero escribir toda la función de onda de este sistema. Toda la función de onda de este sistema. O sea, teniendo en cuenta también el spin, que hasta ahora no mencionamos para nada o casi para nada. ¿Está bien? Entonces ¿qué va a pasar con la función de onda del spin? ¿Se va a separar o no se va a separar?

79. A6: Sí.

80. P: Sí, este hamiltoniano es totalmente espacial. Las coordenadas de spin son coordenadas separadas, así que la función de onda completa, de este sistema, la voy a poder escribir así.

Así ¿a ver quién me dice cómo la voy a poder escribir? Como una parte espacial, ¿sí? La escribo así, que ya no van a ser separables. ¿Está bien?

$$\psi(1,2) = \varnothing(1,2)\,\sigma(1,2)$$

$\rightarrow \alpha$

$\rightarrow \beta$

3 1 2

Es una función de las dos partículas en conjunto. Por la parte del spin, llamémosla sigma, también de las dos partículas, pero en esta parte el spin se separó de la parte espacial. ¿Por qué?

81. A5: Un pregunta ¿se puede separar el… spin?

82. P: Sí… porque acá no hay ningún término que me acople los spines, ni nada por el estilo, no hay ningún término de spin. ¿De acuerdo?

83. A5: ¿Son dos fermiones, no?

84. P: Dos fermiones, sí, sí. Dos fermiones idénticos además. Entonces, supongamos que son electrones, nuestro caballito de batalla de siempre. O sea que este spin es un medio, ¿sí?

Entonces, las funciones de onda de cada uno de estos electrones, de spin, pueden ser o alfa o beta, dependiendo del estado del spin, para cada uno de los dos electrones. Entonces, fíjense una cosa, la función de onda de este sistema de dos partículas, de dos fermiones, de dos electrones, tiene que ser antisimétrica. ¿Está bien? Ahora, que es lo que tendrá que ser simétrica. Si yo escribo la función de onda como esta parte espacial por esta parte de spin, ¿qué de todo esto tendrá que ser antisimétrico?

85. A4: La parte del spin.

86. P: ¿Por qué?

87. A4: Porque….

88. P: ¿Qué es lo que me da el estado del sistema? ¿Qué es lo que es solución de este hamiltoniano? ¿Qué es lo que es la solución más general de este hamiltoniano?

89. A3: Todo eso.

90. P: Todo, exacto, todo. Esta es la función de onda del sistema. Esta es una parte de la función de onda que habla de la parte… de una probabilidad en el espacio. Y esta es lo que me habla de la probabilidad en cuanto al spin. ¿Está bien? Entonces esto es lo que tiene que ser antisimétrico. ¿Está bien? Esto es lo que tiene que ser antisimétrico. Entonces, fíjense, que si el único requerimiento es que la función de onda completa sea simétrica, yo puedo tener esto de diferentes maneras, puedo tener esto simétrico y esto antisimétrico. O al revés, podría tener esto antisimétrico y entonces esto simétrico, cualquiera de estas dos combinaciones me va a conducir a una función de onda total, antisimétrica. ¿Por qué? Porque el estado completo del sistema está representado por esto, ni por esto y ni por esto. Entonces esto lo que tiene que ser antisimétrico. Entonces, fíjense lo siguiente, supónganse que yo resuelvo el sistema y encuentro ahí una función de onda espacial, la parte espacial resulta simétrica. ¿Sí?

Resulta simétrica y entonces la función de onda de spin tiene que ser antisimétrica.

$$\varnothing_S (1, 2) \rightarrow \delta_A (1, 2) = *$$

¿Está bien? Entonces, si ésta es simétrica, sigma tiene que ser antisimétrica. ¿Cómo escribiré la función de onda antisimétrica? ¿Qué les parece? Otra vez, esto es separable, pero además coordenadas de spin de la partícula 1 y las coordenadas de spin de la partícula 2, también son separables. ¿Está bien? ¿Sí? Porque acá no aparecen para nada. Entonces, cada una de las coordenadas de spin de cada partícula, también es separable. ¿Cómo escribo esta combinación antisimétrica? Fíjense, yo puedo tener a la partícula 1 en el estado alfa o en el estado beta, y a la partícula 2 en el estado alfa o en el estado beta. ¿Sí? La función de onda de spin de las dos partículas en conjunto, va a ser un producto de la función de onda de spin de la partícula 1 con la función de onda de spin de la partícula 2 o cualquier combinación lineal. ¿Está bien? Bueno. ¿Qué les parece? ¿Cómo escribiré una función de onda antisimétrica para las partículas 1 y 2?

91. A2: alfa de 1

$\alpha (1) \beta (2)$ $\quad * = 1/\sqrt{2} [\alpha (1) \beta (2) - \alpha (2) \beta (1)] \rightarrow$ singlete

$\alpha.$ S = 0 $\uparrow\downarrow$

$\psi \quad \alpha (1) \alpha (2)$

$\psi \quad \alpha (1) \beta (2)$

$\psi \quad \beta (1) \beta (2)$

92. P: Exacto.

$\alpha (1) \beta (2) \quad * = 1/\sqrt{2} [\alpha (1) \beta (2) - \alpha (2) \beta (1)]$

93. A2: Y alfa de dos.

94. P: Menos, menos alfa de 2 por beta de 1. ¿Está bien? Y esto por supuesto… Fíjense que yo puedo tener diferentes productos de dos funciones, puedo tener alfa de 1 por alfa de 2, ¿sí? O alfa de 1 por beta de 2, e ir intercambiando…., beta de 1 por beta de 2. Son todos productos posibles, no combinaciones, digamos, combinaciones antisimétricas, ni nada por el estilo, son productos con los cuales puedo formar estas combinaciones antisimétricas. ¿Está bien? Intercambiando también 1 con 2. No hay ningún otro que sea, que sea una combinación antisimétrica. Fíjense que si yo combino, alfa de 1 con alfa de 2, ¿sí? Con beta de 1 por beta de 2, no hay forma de que eso me resulte una combinación antisimétrica. ¿Lo ven? Porque si yo pongo, no cierto, alfa de 1 por alfa de dos menos beta de 1 por beta de 2. ¿Está bien? Intercambio uno por dos y no cambia nada. ¿Está bien? No cambia nada. Entonces, esto no es una real combinación. Cualquier otra combinación que busquen no es otra combinación antisimétrica.
En cambio, si yo tengo una función de onda espacial, antisimétrica, la función de onda del spin tiene que ser simétrica, para que la función de onda total resulte antisimétrica. Y entonces, a ver ¿qué combinaciones o qué funciones de onda simétrica se les ocurre a

$$\psi$$

$$\varnothing_A(1,2) \rightarrow \delta_S(1,2) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(1)\,\alpha(2)\ \uparrow\uparrow\ ms = 1 \\ \alpha(1)\,\beta(2)\ \downarrow\downarrow\ ms = -1 \\ 1/\sqrt{2}\,[\alpha(1)\,\beta(2) + \alpha(2)\,\beta(1)]\ \uparrow\downarrow\ ms = 0 \end{array} \right\} \text{triplete}$$

$$S = 1$$

95. A2: Alfa 1 por alfa 2.

96. P: Claro, alfa 1 por alfa 2 ya es simétrico. Si yo intercambio uno de los dos. O sea, las dos partículas…

97. P: por alfa de 1 beta de dos, más alfa de 2 por beta de dos. Bien. A este estado, a este estado. Fíjense, que todas estas combinaciones, todas estas combinaciones tienen la misma energía. O sea son todas funciones de onda con la misma energía. ¿Y cómo se ve eso? Fíjense. Podamos tener una parte espacial, ¿sí? Una parte espacial, simétrica y una parte espacial antisimétrica, que es esa interacción de intercambio que teníamos al principio. ¿Se acuerdan? Que podíamos tener una función de onda, eh... La función de un hamiltoniano como éste podía ser una función de onda simétrica o antisimétrica. Así que, en cuanto a la parte espacial, que va a ser función de esto. ¿Sí? Estas dos van a tener la misma energía. Y la parte del spin no me va a modificar la energía. Así que estas 4 combinaciones tienen exactamente la misma energía. ¿Está bien? Quiere decir que tengo una degeneración, en este caso, ya de orden 4. A un estado como éste. A un estado como éste, que corresponde a una función de onda simétrica, con una parte de spin antisimétrica, es lo que se conoce como un estado singlete. Mientras que un estado como éste con una parte espacial antisimétrica y una parte espacial simétrica, como tiene 3 posibles funciones de onda de spin, se la llamará triplete. Entonces, fíjense una cosa. Eh… Tenemos 4 estados que sólo difieren, ¿sí? que van a diferir solamente, donde… la energía, pero difieren en el estado del spin. ¿Está bien? Entonces, fíjense, acá nosotros tenemos la partícula 1 con spin alfa y la partícula 2 con el spin beta. ¿Está bien? Y acá tenemos la partícula 2 con spin alfa y la partícula 1 con spin beta. O sea, que las dos partículas tienen el spin diferente. Uno lo va a tener… como que una de ellas tiene el spin para arriba y la otra tiene el spin para abajo. ¿Está bien? En este caso, en este caso, ¿tenemos a las dos partículas cómo?

98. A1: Para arriba.

99. P: Con el spin para arriba. Y en este campo las dos partículas con el spin para abajo. Y acá también, una para arriba y una para abajo. ¿Está bien? Fíjense que como acá la función de onda espacial ya es antisimétrica. ¿Sí? Las partículas no tienen problema de tener el mismo estado de spin. ¿Está bien? De compartir ambas el mismo estado de spin. Bueno, lo que se puede mostrar,

fíjense, si yo tengo dos partículas con spin un medio, como en este caso. El spin total del sistema ¿qué valores puede tomar? ¿Se acuerdan?

100. A7: 1 o 0.

101. P: 1 o 0. Es decir, que esté éste va a estar: S1-S2 y éste: S1 + S2. O sea, que éste va a estar, va a tener valores o 0 o 1. El estado singlete corresponde a que las partículas, el conjunto de las dos partículas, tenga un S total igual a 0. Mientras que el estado triplete corresponde a que las dos partículas acoplen sus spines a spin = 1.

$$|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$$

$$0 \leq S \leq 1$$

102. A7: No lo veo.

103. P: Esto se los cuento, no lo puedo determinar. Ahora, lo que vamos a ver bien es otra cosa. Fíjense, el… fíjense ¿a qué corresponderán estas tres, estas tres funciones de spin? Si el spin total del sistema es 1, ¿cuáles pueden ser las proyecciones?

104. A6: 1.

105. P: 1, -1 y cero. ¿Está bien? Y entonces estas tres funciones ¿a qué corresponderán?

106. A5: A las tres proyecciones.

107. P: A las tres proyecciones. ¿Qué proyección es ésta?
108. A5: 1.

109. P: Está corresponde a que S sea = a I. Esta corresponde a que S = a -1 Y ésta finalmente S = 0. Y esto sí lo podemos probar. Vamos a probarlo para una de éstas. [Borra el pizarrón] Fíjense, vamos a calcular en este sistema total, el sistema de las dos partículas va a ser la suma de sz 1 + sz 2.
¿Está bien? Entonces, por ejemplo, vamos a ver a qué proyección corresponde esta primera, esta primera función de onda. Z2 aplicado a alfa de 1 por alfa de 2.

$$S_z = S_{z1} + S_{z2}$$

$$(S_{z1} + S_{z2})\, \alpha(1)\, \alpha(2) = 1/2\, h\, \alpha(1)\, \alpha(2)$$

A ver, ¿quién me dice cómo hacemos esta cuenta? ¿A quién afecta este Su z1?

110. A2: 3

111. P: Solamente a alfa 1. Este operador actúa solamente sobre la partícula 1, mientras que este operador opera sobre la partícula 2. ¿Está bien? Entonces, este z1 aplicado al alfa 1, ¿qué me da? ¿Qué me da?

$$(S_{z1} + S_{z2})\, \alpha(1)\, \alpha(2) = 1/2\, h\, \alpha(1)\, \alpha(2) + 1/2\, \eta\, \alpha(1)\, \alpha(2)$$

$$\iota. \quad = h\, \alpha(1)\, \alpha(2) \rightarrow ms = 1$$

112. A: [No se oye]

113. P: Hache barra sobre 2. ¿Está bien? O sea el… es un medio de hache barra. ¿Está bien? Entonces tenemos ½ de h barra por alfa de 1, por la misma alfa de 1 y sobre esta actúa. O sea, acá me queda alfa de 1 por alfa de 2. Es decir que esta 2 actúa sobre alfa 2, pero no actúa sobre alfa 1. ¿Está bien? ¿Sí? Entonces, ¿qué me va a dar este z2 aplicado sobre todo esto?

114. A: [No se oye]

115. P: Exacto,… actúa como si fuera un número. ¿Sí? Y z2 actúa sobre éste, más ½ de h barra más alfa de 1 por alfa de 2. Entonces si sumo esto, me da, h barra por alfa de 1 por alfa de 2. ¿Cuánto vale el n éste? ¿Total?

116. A3: 1

117. P: 1. Y así uno lo puede calcular para cada uno de todo… No podemos saber qué, cuánto vale este total. Solamente podemos determinar que éste va a valer entre 0 y 1. Que éste corresponda a 0 y que éste corresponda a 1, bueno, escapa a nuestra materia. Pero, de todas maneras, más o menos uno puede ver que estos tres que vienen juntos van a ser 3 proyecciones y estas 3 proyecciones…. ¿Está bien? Bien. Entonces vamos a ver por último, lo último de todo. Confiemos que esto funcione [se refiere al cañón]. Si una partícula o un par de partículas, se encuentran en estado singlete o en estado triplete, se comportan de una forma totalmente diferente. Fíjense, supónganse que tenemos a dos electrones, a los dos electrones en un estado singlete. Empecemos por el estado singlete. Entonces vamos a ver espacialmente qué es lo que ocurre. Fíjense. Si están en un estado singlete, su función de onda es antisimétrica, su función de onda espacial, la parte espacial de la función de onda es antisimétrica. ¿Está bien? [Borra el pizarrón] Entonces, bueno, comencemos a pensar, para hacerlo más sencillo, supongamos que no interactúa para poder escribir la función de onda antisimétrica, la función de onda antisimétrica de la forma bien sencilla y conocida. Entonces esto va a ser 1 sobre la raíz de dos, pensándolas como partículas no interactuantes:

$\varnothing_A (1, 2) = 1/\sqrt{2}\,[\varnothing_1 (1)\, \varnothing_2 (2) - \varnothing_1 (2)\, \varnothing_2 (1)] \rightarrow$ triplete

¿Está bien? Esto corresponde entonces, a que las partículas estén en un estado triplete. ¿Está bien? Es decir, pueden tener el mismo spin, pueden tener las dos el mismo spin, pero entonces su parte espacial tiene que ser antisimétrica… Entonces, supónganse que yo tengo esas dos partículas en un estado triplete y quiero acercarlas en el espacio. Trato de acercarlas en el espacio, eso significa tratar de que ambas ocupen, digamos, estén en una zona del espacio muy próxima una de otra, las trato de acercar. ¿Está bien? Matemáticamente ¿esto cómo lo consigo? Diciendo, bueno, las coordenadas de la partícula 1, las voy a… las coordenadas de la partícula 2. Las voy a acercar, o sea, hago que r1 sea muy parecido al r2. ¿Está bien? ¿Qué pasa con esta función de onda si yo trato de acercar a las dos partículas?

118. A: [No se oye]

119. P: ¿Qué les pasa?

120. A5: Tiende a cero.

121. P: Tiende a cero. ¿Por qué tiende a cero? Fíjense, si las coordenadas de 1 y las coordenadas de 2 son muy parecidas, $\varnothing_A (1, 2) \rightarrow 0$
el producto es muy parecido a esto, ¿sí? Y entonces, toda la función de onda espacial, tiende a cero. ¿Está bien? ¿Y eso qué significa físicamente?

122. A5: Que la densidad.

123. P: Que la densidad de probabilidad de que las partículas se encuentren en una zona muy cercana del espacio, tiende a cero. O sea, es como si, como si las partículas se repelieran. ¿Está bien? Veamos que pasa si ambas están en un estado singlete. En este caso la función de onda espacial es simétrica.
Vuelvo a escribirlo como si fuera una partícula independiente. ¿Está bien? Para poder escribir… Fi 1 fi2 por
Yo hago lo mismo. Trato de acercarlas.

$\varnothing_S (1, 2) = [\varnothing_1 (1)\, \varnothing_2 (2) + \varnothing_1 (2)\, \varnothing_2 (1)] \cong$

$/\, r_1 \rightarrow r_2 \quad 2/\sqrt{2} \quad \varnothing_1 (1)\, \varnothing_2 (2)$

¿Esto qué me da?

124. A6: Queda dos veces.

125. P: Claro, me da 2 veces, 2 sobre raíz de 2 por fi de 1 por fi 2 de dos, a la r1 tendiendo a r2. ¿Está bien? O sea que me da una densidad de probabilidad ¿qué cómo es?

126. A6: 2 veces.

127. P: ¡Es grande! Es un valor considerable. Es como si, como si las partículas se atrajeran. ¿Está bien? Ahora ¿por qué se atraen o se repelen?

128. A6: Por la carga.

129. P: ¿Por qué?

130. A6: Por la carga.

131. P: No, por la carga no. En ningún momento, fíjense, incluso escribí una función de onda con el spin independiente, así que no hay interacción de tipo Coulon ni nada por el estilo. ¿Está bien? Entonces, ¿qué es lo que hace que tiendan a atraerse o tiendan a repelerse?

132. A7: El estado del spin.

133. P: El estado del spin, exactamente. Fíjense, en un estado triplete, las dos partículas pueden tener el mismo spin. ¿Está bien? Pueden tener el mismo spin, entonces qué sucede. Cuando yo trato de acercarlas en el espacio, no sólo van a tener el mismo spin ¿sí? Sino que también van a compartir la función de onda espacial. Y por ser fermiones, no pueden estar en el mismo estado, entonces tienden a repelerse. En cambio, si están en el estado singlete el spin es distinto, seguro es distinto, uno es para arriba y otro es para abajo. ¿Está bien? Y entonces, cuando yo tiendo a acercarlas, no tengo ningún impedimento en poder ocupar la misma zona espacial. ¿Está bien? O compartir la función de onda espacial. ¿Sí? Entonces, justamente es su estado de spin lo que hace que las partículas, en este caso, tiendan a repelerse o tiendan a atraerse. ¿Está bien?

134. A4: …fermiones…

135. P: ¿Cómo?

136. A4: ¿Eso no es un fermión?

137. P: Sí.

138. A4: ¿Entonces tienden a…?

139. P: … Tienden a atraerse, pero no es más por Coulon.

140. A4: No, no.

141. P: Pero ¿por qué tienden a atraerse? Porque no tienen ningún impedimento, porque sus estados de spin ya son distintos.

142. A4: Pero siguen siendo fermiones. ¿No era que los fermiones eran los que no podían estar en el mismo estado?

143. P: Sí.

144. A4: Y los bosones…

145. P: Pero depende del estado del spin.

146. A4: ¿Cómo?

147. P: A diferir el estado del spin, ya no están en el mismo estado, aunque compartan la función de onda espacial…

148. A4: Sí.

149. P: …el estado de spin ya es distinto. ¿Qué es lo que pasa en un átomo? Vos podes tener, por ejemplo, en la capa 1 de éste, podes tener dos electrones, ¿por qué? Porque tenés un electrón con el spin para arriba y tenés un electrón con el spin para abajo. Y eso ya hace que ya difieran en el estado. ¿Está bien? Y tiene el mismo estado espacial. ¿Está bien? Pero distinto estado de spin. Su estado total es distinto.

150. A4: … tenemos que ver qué pasa en el espacio de spin.

151. P: En el espacio de spin ya sabes lo que pasa. Si está en un estado singlete. Si está en un estado…

152. A4: ¿El estado singlete no era sólo para los fermiones? Me parece que no entendí nada.

153. P: Me parece que no.

154. A4: Digamos, el estado singlete no es para fermiones?

155. P: Sí, son fermiones.

156. A4: Y los fermiones son los que no pueden estar en el mismo estado.

157. P: Sí

158. A: [No se oye]

159. P: Sí, pero el mismo el estado total. El estado está definido no sólo por la parte espacial sino por la parte de spin.

$$\Psi = \phi\, 0$$

160. A4: Y por eso…

161. P: El estado total tiene que ser antisimétrico. Es lo que estuvimos viendo recién.

162. A4: Pueden estar en el mismo espacio.

163. P: Pueden estar en la misma parte, digamos, compartir la función de onda espacial y siguen en su estado de spin.

164. A: Claro, pero…

165. P: … tiene que ser antisimétrico. La función de onda total que es el producto de la espacial por la de spin. Entonces lo que veíamos recién es que esta parte puede ser simétrica. Entonces, ésta necesariamente tiene que ser antisimétrica o viceversa. Pero es ésta la que tiene que ser antisimétrica. Su estado total.

166. A4: Igual esto no está diciendo que se atraen.

167. P: Está diciendo que pueden compartir, que pueden compartir una misma zona del espacio. ¿Está bien? Y, digamos, y además la probabilidad es grande. Así que es como si, en cierta manera, tendiera a… ¿Está bien?

168. A4: ¿Y por qué?

169. P: Porque pueden compartir el mismo estado del espacio, el mismo estado, el mismo lugar espacial, dado que depende de su spin. No hay ningún impedimento.

170. A4: Por eso, pueden ocupar el mismo estado del espacio, pero de ahí a que se atraigan… otra cosa.

171. P: La probabilidad está, la probabilidad está… Fíjense, un segundito antes de, antes de [no se escucha, hablan varios al mismo tiempo] Fíjense, que ésta es una interacción de las partículas, una interacción que yo la escribo como un potencial de interacción espacial… Es simplemente una interacción debida al spin. ¿Está bien? Que es lo que se llama interacción de intercambio. Es decir, las nubes electrónicas, mientras difieren en su estado de spin, pueden llegar a superponerse entre sí. Por ejemplo, si yo tengo dos átomos y sus nubes electrónicas tienen distinto estado de spin, pueden llegar a superponerse espacialmente. Mientras que si tienen el mismo estado de spin van a tender a repelerse. No pueden ocupar la misma zona del espacio. ¿Está bien? Y eso es, por eso dije, como si se atrajesen, como si se repeliesen. ¿Por qué? Porque yo no puedo escribir un potencial de interacción que demuestre que se atraen o se repelen. Lo único que puedo hacer es, en un plano por la densidad de probabilidades que estén juntas, en un caso es cero, en otro caso es grande. ¿De acuerdo? ¿Sí?

172. A4: Es decir, no hay fuerzas, no hay ninguna fuerza.

173. P: No, es un efecto del estado de spin.

174. A4: Claro.

175. P: Es un efecto cuántico solamente producto del estado de spin.

176. A4: (no se escucha)

177. P: Lo que pasa, lo que pasa es que Uds. están acostumbrados a ver interacciones que uno representa espacialmente con un potencial o con una fuerza… Esto es una interacción ¿sí? entre las partículas, es un efecto de las partículas, debido a su estado de spin.

178. A4: ¿No se puede hablar de aceleración no?

179. P: No, no.

180. A4: Claro, porque…

181. P: No pienses tan clásicamente. ¿Está bien? No pienses tan clásicamente. Pueden ocupar la misma parte del espacio o no la pueden ocupar. ¿Está bien?

182. A4:… tienden a acercarse, hay algo que cambia,…

183. P: No es una interacción en el sentido de que puedas describir una fuerza. No lo pienses clásicamente.

184. A4: Claro, clásicamente parece muy loco que…

185. P: Lo único que podes

186. A: ….

187. A4: No pienses en… de la partícula. Es una probabilidad!

188. P: Claro, es una probabilidad de tener las partículas juntas o probabilidad cero de tenerlas juntas y eso es consecuencia solamente de su estado de spin. ¿Está bien? Es un efecto absoluta y totalmente no clásico. Totalmente cuántico. ¿Está bien? Si vos tenes partículas clásicas, las partículas pueden ocupar, pueden pasar una cerca de la otra y no hay ningún problema. Cuánticamente eso depende del estado de spin de las partículas.

189. A4: Ahora, si yo tengo dos partículas, digamos, acercándose, ¿puede ser que me quede una cerca de otra?

190. P: Sí.

191. A4: Entonces, cambió para dónde iba. Si yo tiró una para allá y otra para acá y pueden quedar… Spin?

192. P: Sí. Pero depende de su estado.

193. A4: Pero, claro

194. P: Otra vez, en el caso de Cooper, el caso de los superconductores, para dar otro ejemplo, son dos partículas que tienen la misma función de onda espacial, pero que tienen en su spin, entonces agrupan de esta manera, una para arriba y uno para abajo. …estado de spin, que pueden estar junto. Son dos fermiones.

195. A4: Entiendo, pero lo veo muy loco. Imaginate que tengo dos…

196. P: Sí.

197. A4: Por el solo hecho de estar…

198. P: Pero no vienen a velocidad constante. Estamos en cuántica. ¿De acuerdo? No pienses clásicamente. En cuántica lo único que podes definir son probabilidades. ¿Está bien? Densidad de probabilidad de encontrar dos partículas en el espacio. Si me hablas de una velocidad, me tenes que hablar de una velocidad promedio, pero no me hables de velocidad constante o de partículas…

199. A4: … ya no existen velocidades, no?

200. P: Pero no sé a dónde queres ir.

201. A4: Digamos, como que yo…

202. P: A ver, ¿cuál es tu problema?

203. [Risas]

204. A4: Claro, velocidad promedio…

205. P: Por qué necesitamos una velocidad? … No es una interacción… aceleración… acá no cuenta. ¿De acuerdo? ¿Está bien? Lo único que podes decir es que las partículas tienen determinadas probabilidades de poder estar juntas o no. O cero. Esto es lo único que podes decir. ¿De acuerdo? Para que veas que tu…

206. A4: ¿Podría suceder que el spin se oponga a una interacción de Coulon?

207. P: Exactamente. Podría suceder. Fíjense una cosa, si yo tengo dos electrones, fíjense, en el caso de la nube de electrones. Si yo tengo, si son dos electrones. ¿Está bien? Esos dos electrones por Coulon van tender a repelerse. Sin embargo, si tienen diferente spin, pueden ocupar el mismo espacio. Por supuesto va a haber una competencia entre las dos cosas. Va a haber una competencia entre la interacción de Coulon, que tiende a repelerlas y esta interacción de spin. Interacción en el sentido de tener una densidad de probabilidad conjunta de poder estar juntas. Y eso… Va a haber una competencia entre dos efectos ¿sí?, y bueno, digamos, siempre el equilibrio va a resultar de la competencia entre esos dos efectos, entre la interacción de Coulon que tiende a repelerlas y esta interacción de spins, de spins opuestos que tiende a acercarlas. ¿Está bien? Va a haber una competencia. O sea, cuando vos quieras ver qué es lo que va suceder, tenes que considerar por un lado, que hay una interacción espacial de Coulon y por el otro lado, que hay una interacción de intercambio, interacción de spin que va a, digamos, va a jugar.

208. A4: Y las fuerzas. Una fuerza, ya no podes hablar de fuerzas…

209. P: Lo que pasa que vos no podes definir la fuerza del spin.

210. A4: No hablaba de spin, hablaba de una interacción de Coulon… como una densidad de probabilidad…

211. P: No, vos podes definir una fuerza espacial. ¿Está bien? Esa fuerza va a dar origen a un potencial, ese potencial… un campo. ¿Está bien? En cuántica.

212. A4: Por ejemplo [se superpone a la respuesta de la profesora]

213. P: Vos no trabajas con fuerzas, exactamente. Tenes que trabajar con potenciales. Siempre trabajas con… ¿Está bien? Hay fuerzas, sí, ¿cómo no? Vos las representas con potenciales. Pero las fuerzas son conceptos espaciales, es la representación matemática de una interacción espacial. ¿Está bien? Lo que estoy hablando ahora es un efecto cuántico debido al estado de spin.

214. A: [No se oye]

215. P: Que lo llamas también interacción. Porque va a variar la densidad de probabilidad de… ¿De acuerdo? Para que vean, insisto, que estas cosas a todo el mundo les costó, incluso a los físicos que desarrollaron todas estas ideas, fíjense lo que dijo acá un matemático: “dónde se encuentra la materia sólida, antigua y perfecta que obedece a leyes matemáticas precisas. La piedra que el Dr. Johnson partió una vez para demostrar la realidad de la materia, se ha disipado hacia una distribución difusa de posibilidades matemáticas.” Y esto es exactamente lo Uds. tienen entre manos. ¿Está bien? Y lo que hemos tratado de desarrollar durante toda esta segunda parte del curso. Bueno ¿vamos a ver algunas fotos interesantes en la media hora que falta? Espero que cuando yo toque una tecla acá. Bien, bueno. Esperen, que necesito mi machete para ver el orden de estas cosas
[Se inicia una presentación en Power Point] ¿Apagamos la luz? ¿Les parece? ¿O ven bien? Bueno, vamos a ver. Bueno, lo primero que vamos a ver. Lo primero que vamos a ver es, una imagen de interferencia de electrones. ¿Está bien? No es una imagen preparada con PP ni nada por el estilo. Donde, fíjense lo que ustedes ven. Observen cómo, variando el número de electrones, recuerdan que las probabilidades siempre corresponden a conjuntos estadísticos. Entonces, si yo tengo un número pequeño de electrones, sobre una pantalla (esto por ejemplo es el experimento de la doble rendija), uno ve que caen erráticamente. Ningún electrón, cada electrón cae en un, digamos, determinando un punto, como una cantidad entera, como caería una bala, pero erráticamente. A medida que va aumentando el número de electrones, entonces es cuando se va observando esta figura de interferencia.

216. A:

217. P: Dejan una marca, eso podría ser una placa fotográfica.

218. A: (no se escucha)

219. P: ¿Cómo? … Ya aparece directamente la franja de interferencia de la luz.

220. A3: ¿Se puede considerar el spin ahí? ¿Qué algunos vayan para un lado y otros para el otro por el efecto del spin?

221. P: Eh. No, porque el spin entraría como un efecto magnético. O sea, ahí no, porque ahí son partículas independientes y cada una con su propio estado. ¿Está bien? Así que ahí el spin juega poco, juega poco. Veamos una figura de difracción.

222. A5: El concepto de… ya se borró, no?

223. P: ¿En qué sentido?

224. A5: …. Ya no hay ninguna justificación de por qué interfiere.

225. P: No, sigue siendo lo mismo. Lo que no, la cualidad de las partículas sigue estando. Lo que no es cierto es que las partículas sean ondas, sino que tienen un concepto ondulatorio asociado. ¿Está bien? Fíjense esto es una figura de difracción. Primero es una figura muy bonita.

226. A1: ¿Es experimental?

227. P: Sí, es experimental, es experimental.

228. A: [no se escucha]

229. P: ¿Qué les pasa? [Hay mucho ruido] Cristal… Fíjense, es un cristal, aluminio 60, cobre 11, níquel 19. Y fíjense lo que dice ahí, que la Unión... Mundial determinó, es 1992, o sea, que un cristal es una estructura que produce difracción discreta. O sea, sirve para definir lo que es un cristal. Ya no que es una estructura periódica, etc., etc. Si no que, la estructura que produce una figura de difracción discreta cuando, por ejemplo, se la bombardea con electrones.

230. [Comentarios superpuestos que no se oyen bien]

231. P: Qué le pasa a mi máquina hoy! Las leyes de Murphy! Acá les voy a mostrar otra, esta es germana.

232. A: Ah!! Un caleidoscopio!

233. P: Ésta es por transmisión. La otra era por reflexión, ésta es por transmisión. Fíjense. Bien. Lo que vamos a ver ahora es una película, una pequeña película, de cómo se va deformando un paquete gaussiano. Se acuerdan cuando hablamos de que una partícula no podía ser una onda, contradiciendo a la primeras hipótesis, justamente porque, digamos, una función de onda, un…, un paquete, se va deformando con el tiempo. ¿Por qué? Porque tiene una relación entre omega y… ¿Está bien? Entonces vamos a verlo. Difícil… la pantalla. Hoy mi máquina no quiere saber nada.

234. A: [Risas, asombro]

235. P: Lo vamos a ver otra vez. Si puedo. Fíjense, ahí tenemos un paquetito gaussiano. Acá lo observan desde arriba, acá lo observan en perspectiva. ¿Vemos cómo va…? ¿Está bien? Efectivamente, como las partículas tienen una vida media casi infinita, una vida media casi infinita, un electrón no puede ser un paquete de Gauss. Lo que vamos a ver ahora también es una

película. Estoy tratando de detenerla. Sobre (silencio). Vieron las leyes de Murphy. Vamos a ver cómo se comporta un paquete frente a una barrera. Una barrera que no es exactamente una barrera cuadrada, pero es una barrera de potencial. En el primer caso, a ver si les dije bien, en el primer caso, uno está teniendo en cuenta, eh… por ejemplo, es un electrón que no tiene suficiente energía como para superar la barrera clásicamente. Y por lo tanto, clásicamente tendría que, tendría que reflejar. ¿Está bien? En el segundo caso que vamos a ver, el electrón tiene suficiente energía, o sea que tendría que transmitirla, sin embargo, parte se refleja. Ven, ésta es la barrera.

236. A6: Vamos a ver cómo se comporta la función de onda.

237. P: Claro, vamos a ver cómo se comporta la función de onda. Ven, ese es el paquete, ven cómo se frena. Esta es la barrera, ¿ven cómo se divide? Ahí pasa la parte que se transmite, lo que sería por efecto túnel, y el resto es lo que se… Es exponencial es n a la menos x a la 4.

238. A6: ¿La vemos otra vez?

239. P: ¿La vemos otra vez?

240. A6: Sí.

241. P: Fíjense, el cero está en la barrera, ¿ven cómo se va dividiendo? Parte se transmite. La parte que se transmite por efecto túnel y parte se refleja. ¿Qué representa esta función de onda? Está representando, o sea, recuerden que las probabilidades se ponen en evidencia con un conjunto estadístico. Si yo tuviera un conjunto estadístico de electrones, con esa energía, que los tiro contra esta barrera de potencial, el flujo de electrones se dividiría de esa manera. Una parte corresponde a… ¿Está bien? Bien, vamos a ver qué pasa en otro caso en el que la probabilidad clásica me dice que tiene que transmitirse totalmente. Fíjense. Ahí viene. ¿Lo ven? Fíjense, hay una gran parte que se transmite, pero parte se refleja. También es un efecto cuántico. ¿Lo ven? Fíjense la diferencia, en el otro caso la parte que se transmite es mucho menor. Y acá es al revés, porque prácticamente también, debería transmitirse totalmente. Bueno, lo que vamos a ver ahora es un haz de, lo que sería un haz de electrones, representado por supuesto, por su función de onda, contra una doble rendija. ¿Está bien? O sea, para ver la figura de… Voy a tratar de detenerlo. Ahí está.

242. A3: Ah!

243. P: Vieron cómo se imprimió y como parte también se reflejó. ¿Está bien?

244. A2: Ay! No.

245. P: Lo vamos a ver otra vez.

246. A3: ¿Se puede bajar la velocidad?

247. P: Lo voy a ir deteniendo. Ven, ahí comienza a dividirse, a enfrentarse con la doble rendija. Ven cómo se va dividiendo, va cambiando incluso su impulso, lo mismo que sucede con un haz de fotones. ¿Está bien? Y va. Y fíjense cómo, lo que vuelve también interfiere con lo que llega. ¿Está bien? Y por eso también se forma una especie de figura de difracción del otro lado. Hasta que finalmente uno obtiene la figura. Vamos a verlo ahora variando. Lo mismo que uno hace con fotones, ahora variando la distancia entre las dos ranuras y el ancho de la ranura. Recuerden que igual que con el caso de las ondas electromagnéticas, esta doble rendija para que produzca la difracción, tanto la distancia entre las ranuras como el tamaño de la rendija, tienen que ser del orden de la longitud de onda. ¿Está bien? Entonces, imaginen que, estas longitudes de onda que son del orden del Amstrong, estas rendijas también, obviamente, tiene que ser del orden del Amstrong. Ahora, vamos a ver otro caso, donde la separación entre las rendijas es mayor, es muy parecida, pero van a ver que se separan… ¿Lo ven? ¿Lo pasamos de nuevo, más despacio? Por supuesto, estas son simulaciones de computadora, demás está decirlo, no?

248. A1: ¿Qué pasa si…?

249. P: ¿Cómo?

250. A1: ¿Qué pasa si la rendija es menor que…?

251. P: Difracta, difracta más. O sea, cuanto más angosta es la rendija, más marca la campana de difracción. Bien, ahora lo que vamos a ver es también, un paquete de ondas. Siempre son paquetes gaussianos, siempre las representaciones con computadora son paquetes gaussianos. O sea, las gaussianas se portan muy bien, son fáciles de reflejar, que se enfrenta a un pozo de potencial. Ven, ahí se ve, bueno, y cuando llega a los bordes es como si estuviera en una caja con potenciales infinitos por eso se producen esos rebotes. Vamos a pasarlo otra vez despacito, para que vean cómo se separan. Y ahí están llegando, pasó, ven. ¿Cuál es el efecto cuántico acá? Que podría, en realidad, clásicamente debería. Es una partícula con una energía mayor que cero frente a un pozo de potencial. Y, entonces, clásicamente tendría que pasar totalmente. Transmitirse… Y sin embargo, tiene una probabilidad distinta de cero de ser reflejada. Cuando llega a los bordes es como si tuviera potenciales infinitos, como si estuviera dentro de una caja y por eso rebota contra este potencial, no tiene probabilidad de transmitirse y lo que está todavía en camino, interfiere con lo que rebotó y por eso se produce esa división. Vamos a ver ahora cuando se enfrenta a una, cuando se enfrenta ahora a una barrera de potencial. Y lo que vamos a ver es, justamente, el efecto túnel. Ven, tiene una probabilidad altísima de pasar. ¿Está bien? De acuerdo a las características, las tengo que tener anotadas. Creo que la energía de la partícula era la mitad de la altura del agujero. ¿La vemos despacito? ¿Ven cómo se van separando? ¿Está bien? Por supuesto, la barrera está donde está la línea roja. Y ahí rebota, otra vez, contra esos potenciales, contra esos potenciales….

252. A1: …el efecto túnel es mayor que la barrera?

253. P: No. En ese caso vos tenés, el efecto cuántico es que puede rebotar. El efecto túnel es solamente cuando su energía es menor que la de la barrera. Sin embargo, vos tenés probabilidad no nula de encontrarlas del otro lado. Bueno, lo que vamos a ver ahora es, ¿se acuerdan cuando hablamos del microscopio de efecto túnel? Bueno, lo que es el equipo de acá. ¿Está bien? Vamos a ver una foto del equipo. Este es el cabezal y acá tiene la famosa punta, ahí es donde se pone la muestra, ahí abajo. Y ahora les voy a mostrar una ampliación de varios millones de veces, de la punta.

254. A2: ¿Cómo la sacan?

255. P: No tengo ni idea. Son… [No se escucha]
A ver si puedo correr la imagen. No sé porqué me sale la imagen cortada. La punta teóricamente tendría que terminar en un átomo. Uds. recuerdan que el microscopio de efecto túnel tenía un principio físico que era, si uno acepta el efecto túnel, que era bastante sencillo de entender ¿Está bien? La puesta, digamos, la tecnología que hay que detrás de poner este principio sencillo de física en marcha, es terrible, porque esta punta, esta punta que termina en un átomo, prácticamente en un átomo, tiene una tecnología terrible. ¿Está bien? Es lo que hablábamos alguna vez del principio no escrito de conservación de la dificultad. Cuando algo es sencillo por un lado, seguro que es complicado por el otro. Bueno, lamentablemente no sé porque no puedo… Bien, y ahora, vamos a ver imágenes, son imágenes que obtuvo IBM, un poco de propaganda. Son imágenes obtenidas con microscopio de efecto túnel, pero además… ¿Está bien? Recuerden que lo que mide el microscopio de efecto túnel es la densidad de probabilidad de… ¿Está bien? Que esa densidad de corriente túnel depende de la distancia entre la punta y la muestra que uno está, pero que tiene una resolución del orden del Amstrong. Entonces uno puede ver, después de un montón de software, de un montón de software, puede ver la estructura a nivel atómico. ¿Está bien? Por supuesto, después uno le pone los colores que quiere a la imagen, después de reconstruirla con la computadora y puede hacer cosas muy bonitas. Esta gente de IBM además… manipula los átomos de tal manera de, con este microscopio de efecto túnel, con la punta,

desplazar estos átomos y formar imágenes. ¿Está bien? Por ejemplo, ustedes habrán visto quizás en el diario, cuando esto estaba en auge, un logo de IBM, escrito con átomos. El logo más pequeño que se había podido escribir hasta ese momento. Bueno, ahora les voy a pasar estas imágenes que son, estas imágenes que son… Vamos a ver primero, un cristal de cobre. ¿Está bien? Espero que se vea bien. ¿A alguien se le ocurre cómo correrlo? …. No sé. Lo vamos a ver muy chiquito… así, OK.

256. A3: ¿No tiene algo el proyector para moverle…?

257. P: Sí, tiene, pero no conozco este cañón lo suficiente como para, como para ver cómo… Esto es un cristal de cobre. Parece, parece una foto de algún desierto. Por supuesto, los colores son totalmente artificiales. El tema es, lo interesante de esta foto, ¿ven estos círculos concéntricos? ¿Saben qué son? Estados electrónicos de superficie. Están representando estados electrónicos, corrientes electrónicas. ¿Está bien? Superficiales en el cobre. Estas rayitas, son corrientes electrónicas, de estados electrónicos que se producen en la superficie del cobre.

258. A: (no se escucha)

259. P: Sí. Ahora lo interesante de esto es que son estados estacionales, por eso son estados ligados. ¿Está bien? Insisto, por supuesto, no es que uno con un microscopio de efecto túnel ve por un ocular. Es una reconstrucción a partir de la información que provee esa corriente electrónica.

260. A6: ¿Ahí uno podría distinguir alturas?

261. P: Sí. Ahora van a ver, ahora van a ver.

262. A: (no se escucha)

263. P: Esto también. Van a ver.

264. A7: Quiero ver lo de la escala.

265. P: Fíjense que, esto es níquel. Esto es un cristal de níquel y lo que ustedes están viendo ahí son los átomos. ¿Está bien? Están coloreados para que queden bonitos

266. A: (no se escucha)

267. P: ¿Cómo?

268. A7: ¿Por qué parecen los átomos, digamos… el cobre que…?

269. P: Porque es una reconstrucción. Lo que estábamos viendo, acá, lo que estamos viendo… es una resolución del orden del Amstromg, en el otro caso era…. Fíjense, lo que estamos observando ahí no son los núcleos, es la densidad electrónica.

270. A6: Una pregunta. Esto está visto de costado, para ver.

271. P: Está visto con cierta, insisto, es una reconstrucción a partir de la densidad. Si los vieras desde arriba sería como circulitos.

272. A6: Y la máxima altura sería…

273. P: Sí, son todos iguales. Es por la forma, digamos, de la densidad de probabilidad. Es reconstrucción, insisto, ustedes no están viendo esto directamente. Entre lo que uno tiene con, con este, digamos, en el dato de la corriente de efecto túnel hasta esto, hay un montón de software en el medio. ¿De acuerdo? Pero digamos, es bastante apasionante esto de observar

átomos, de alguna manera, poder observar incluso la forma de las corrientes electrónicas. Acá ahora sí vamos a ver, esto es. Estos son dos efectos, o sea dos átomos, no de cobre, sobre una superficie de cobre. ¿Está bien? Entonces, fíjense lo que uno observa acá es cómo se deforma la corriente electrónica alrededor de estos dos ejes. ¿Está bien? Es un cristal de cobre, en la cual han metido dos átomos de otra cosa en el medio, que están rompiendo la estructura cristalina del cobre. Acá tenemos, estos son cristales, déjenme ver bien, les digo enseguida de qué. Esto es, son cristales de sodio y yodo, otra vez sobre una superficie de cobre. Lo interesante que lo que ustedes ven ahí son 12 átomos de sodio y 16 de yodo formando una estructura única sobre esa superficie de cobre. Y lo interesante y lo que les asombró, es la forma en que espontáneamente esos átomos se juntaban entre sí para formar esas estructuras sobre el cristal, sobre le cristal de cobre.

274. A7: Una pregunta, ¿la diferencia de color que hay ahí representa algo?

275. P: La diferencia de color en este caso yo creo que son, digamos, decorativas. Pero en general esas diferencias de color tratan de mostrar diferencias en cuanto a las densidades electrónicas y ese tipo de cosas. Depende de lo que uno quiera ver. El color se lo pone de afuera. Entonces lo que hace es tratar de determinar superficies de igual densidad electrónica, etc. A ver otra. Bueno, esto es justamente un átomo de hierro, sobre una superficie de no me acuerdo qué. Sí, sobre una superficie de cobre. Se ve que el cobre… Átomos de hierro sobre una superficie de cobre, formando esos caracteres…

276. A7: ¿Cómo se manipula?

277. P: ¿Cómo?

278. A7: ¿Cómo se manipula?

279. P: Con la punta, justamente con la punta se va dibujando. O sea, se van arrastrando los átomos para formar esa figura.

280. [Muchas voces superpuestas]

281. P: Fíjense,… Encontraron de 71 Amstrong. ¿Está bien? Y lo que ustedes ven, lo que a ellos les asombró. Digamos, les resultó… Esos son átomos de cobre. Lo que les resultó asombroso o, digamos, es ver, fíjense, estos círculos concéntricos dentro del corral, dentro del corral, eh… son eh, cómo se llama... Son estados electrónicos de, otra vez, de electrones de superficie. Entonces fíjense cómo, los átomos esos son átomos de hierro sobre la superficie de hierro que los manipularon para formar esos corrales cerrados. Lo que les asombró, digamos o, les impactó, más que nada porque ~~no~~ era lo que uno esperaba que sucediera, es que los electrones dentro del corral, se comportaban como la solución que tiene la ecuación de Schrödinger para electrones dentro de una caja. Es decir, formando, estas ondas estacionarias, estas ondas… que corresponderían a una caja como ésta, circular.

282. A6: Lo que debería pasar.

283. P: Lo que debería pasar pasó.

284. A: (no se escucha)

285. P: Eso es lo

286. A: (no se escucha)

287. P: …sobre una superficie de cobre

288. A7: ¿Son estables?

289. P: Ni idea. Yo supongo que dado que son estados estacionarios, estos son estado estacionarios, no.

290. A5: Digo, la disposición de los átomos, si yo agarro, no sé,…

291. P: Esta es estable. La que vamos a ver ahora no es estable. O sea es…

292. A5: Como si fuera una barrera de potencial…

293. P: ¿Cómo? ¿Cómo?

294. A5: Porque hay como una especie de barrera de potencial en la caja, en donde están…

295. P: ¿Cuáles decís?

296. A5: Los que están formando la corona, están formando se ve como una pared.

297. P: Una barrera de potencial para los electrones que quedan adentro.

298. A5: ¿Y por qué?

299. P: Pero justamente, lo que quería ver era justamente si se formaban estados estacionarios…

300. A3: ¿Por qué los átomos esos generan una barrera de potencial?

301. P: … Tenés núcleos de electrones….

302. A: (no se escucha)

303. P: Tenés Coulon, tenés intercambio, tenés todo… Pero de todas maneras, eso es más que nada espacial. Es decir que, fundamentalmente… ¿Sí?

304. A2: La forma que tiene la densidad que vemos ahí, es casi siempre con forma de… ¿eso es por la interacción que tiene con la punta del microscopio?

305. P: No, no creo. Eh… No sé, digamos, por qué es exactamente así, no sé. Además hay otra cosa, estos átomos están muy cerca entre sí y eso seguramente va deformando la nube electrónica. En principio, en principio, el átomo… tendría que tener una simetría razonablemente esférica. Pasa que al estar tan cerca entre sí, eso probablemente deforme la…

306. A2: Deforma la punta del microscopio…

307. P: Eso no sé, eso no sabría decirte, si la punta. Una vez que vos obtuviste la estructura, la punta deja de interactuar. Eso no sé.

308. A2: Claro.

309. P: Ahora les voy a mostrar otra. Es una misma vista, pero desde otra perspectiva. Por supuesto insisto, coloreada para que quede muy bonito. Y todas esas cosas. Pero lo interesante es cómo se forman

310. A: (no se escucha)

311. P: y atraen a las otras corrientes con… las corrientes superficiales

312. A5: tan ordenaditas digamos?

313. P: Bien, este es otro corral que hicieron, también de hierro. Pero con otra forma y lo que observaron… el error estacionario, o sea que los electrones se escapaban, se escapaban por los intersticios del corral, los postes del corral. Se terminaban escapando, o sea no se formaban ondas estacionarias.

314. A5: Pero hay como una…

315. P: Claro, es una primera… pero desaparecían. Sí, tiene esta pinta. Pero insisto, lo que sucedía era que los electrones terminaban escapándose…

316. A5: El efecto túnel a la larga no…

317. P: El efecto túnel o el no efecto túnel. El tema era que no se formaban ondas estacionarias. Bueno, a ver. Esto era, esto era, ya les digo enseguida. Es un superconductor, era para mostrar un poco la respuesta de un superconductor a una impureza. La impureza era aluminio en una estructura de. O sea, son 3 átomos de aluminio, sobre un cristal de molibdeno, que se comporta como un superconductor… Y lo que generaba, este es un mapa de la facultad, es el tipo de información que uno puede traer, es decir, cómo se modifica la conductancia del material, o sea del miobio en presencia de estas…
Bien, lo que les voy a mostrar ahora, ya falta poco, son orbitales híbridos. ¿Está bien? Nada tan espectacular como lo recién, simplemente la imagen de los orbitales híbridos en el caso de una molécula de… Bien, la molécula es ésta. Es lo que se llama ácido fólico. Está formado por un carbono, dos hidrógenos, ligados con ligadura simple y por una ligadura doble. ¿Está bien? Recuerdan que esta ligadura doble significaba un…

318. A: (no se escucha)

319. P: Claro, era una estructura, una unión de tipo covalente o una unión de tipo sigma, o sea una molécula plana y una unión de tipo pi. O sea, solamente formada por orbitales tipo beta. Eh, fíjense que esto tiene una estructura trigonal, más o menos son 120 grados entre uniones. ¿Sí? Así que, los orbitales que forman estas uniones tienen un estado de… … O sea, formado por un orbital f y dos orbitales t, que es lo que me da la dirección en el plano. ¿Está bien? Entonces,… Orbitales st, unidos con el orbital de éste otro, formando una unión… Los distintos colores representan superficies de igual densidad de probabilidad. ¿Está bien? Acá está el hidrógeno y acá, o sea, donde se concentra la densidad, está el hidrógeno y donde se concentra acá la densidad. ¿Está bien? ¿Pero ven la estructura? Que es el orbital este de carbono unido a dos orbitales t, que es lo que da esta dirección, formando 120º con la horizontal, o sea estarían formados, si este es un plano x, y, con un orbital ts, un orbital tx y un orbital ty, unidos al orbital.. Ahora les voy a contar lo mismo pero para la unión carbono, oxígeno, sigma que está formado por dos uniones que es ft2, una unión, perdón, un orbital sp2 del oxígeno y un orbital ft2 del carbono. Ven, acá está el oxígeno y acá está el carbón. Fíjense que no es simétrica, porque la contribución del orbital ft2 del oxígeno y la del carbón, son iguales.

320. A2: ¿Te puedo hacer una pregunta?

321. P: Sí.

322. A2: ¿Cómo sabes que el, o sea, por qué el oxígeno es ft 2 también?

323. P: Esto es f2 porque toda la pared… ¿Está bien? Y porque el oxígeno tiene también dos pares no ligados. Y esos dos pares no ligados también esta en la etapa, en la etapa número dos, o sea que también están formando, o sea también forma un, digamos, forma ángulos de 120º. Ahora les voy a mostrar justamente un par de religantes que van a ver que justamente, que está dirigido como si fuese una unión, también siguiendo una diagonal de 120º. ¿Está bien? Este es un

par no ligante sigma, que está justamente formado por orbitales de oxígeno, un orbital de… Y dos orbitales de…
Ahora les voy a mostrar una unión fi, para la unión fi, la unión fi, lo que les voy a mostrar es en un plano perpendicular al plano de la molécula. En el plano de la molécula, la unión fí tiene un nodo. Recuerden que los orbitales fi, los orbitales t, tienen esta pinta. Son dos, dos lóbulos. ¿Está bien? Dos nódulos con un nodo en la posición del átomo. ¿Está bien? Entonces, por eso en el plano de la molécula, el plano del orbital en estas uniones, fi es cero y solamente se pueden ver en un plano perpendicular. Si nos ubicamos en un plano perpendicular, tenemos acá la unión, fíjense, acá sería los orbitales fi, los orbitales p, el orbital p del oxígeno y el orbital p del carbón, que se juntan los dos para formar una sola unión en pi. Fíjense como para… fíjense como los nódulos no son perfectos, porque justamente, para atraerse se deforman para formar esta unión. Bueno y finalmente, lo que sería la densidad total de todas las moléculas, la densidad electrónica total de todas las moléculas. Acá hay un hidrógeno, acá hay otro de hidrógeno, el carbono y el oxigeno. Bien. Y ahora vamos a las partículas idénticas. Lo que los voy a mostrar no es estrictamente, funciones de... Son algo que se llama… No importa qué son. Pero, sirven para ilustrar qué pasa cuando partículas idénticas se acercan entre sí. Las funciones de onda. Y yo los reto a que me digan, van a ver 4 funciones de onda que se están acercando entre sí. De cierta manera, antes de estar demasiado cerca conservan su individualidad. Una vez que interactuaron, quiero que me digan cuál era cuál. [Pasa la animación. Risas] A ver. ¿Otra vez despacito? Si alguien puede darse cuenta cuál era cuál. Ahí se ve cada una, las podemos identificar con un numerito cada una. [Vuelve a pasar la animación] Sí, ¿se entendió? Ven, perdieron totalmente su individualidad. No hay forma de determinar cuál era la que habíamos llamado partícula 1, digamos, y ahora dónde están esas partículas. Bueno, les voy a mostrar un Condensado de BOSE, finalmente. Les voy a explicar qué es, qué es lo que van a ver. OK. Fíjense, ¿qué es esto? Lo que ustedes están viendo ahí, no es ni más ni menos que lo que sería algo así como la distribución de velocidades o de impulsos, digamos, una distribución tipo Maxwell. ¿De acuerdo? ¿Teoría cinética? Hay distintas temperaturas. ¿Está bien? Y esto está formado por, ehhhhh aproximadamente 70 átomos, pero no me acuerdo de qué. Esperen que me fijo, 70 átomos de rubidio, a distintas temperaturas. Fíjense cómo el último de la 7º n. Todos esos átomos están, prácticamente concentrados alrededor de un único valor. ¿Está bien? De un único valor. ¿Saben a qué temperatura es eso? La primera imagen corresponde a 400º nano kelvin, a 400 por 10 a la menos 9 de kelvin. La 2º corresponde a 200 nano kelvin y la última a 50 nano kelvin, o sea, a un valor de 50 por 10 a la menos 9 grados por encima de la temperatura más baja alcanzada hasta el momento. Y fíjense cómo, a esta temperatura tan baja, todos los átomos tienden, todos estos bosones, tienden a estar en un mismo estado. Eso es lo que se llama un condensado de Bose. Lo que decían, los físicos que, digamos, pudieron determinar esto por primera vez, es que el hecho de que no estén todos, digamos, concentrados así en un único valor, o mejor dicho, que no tengan una energía exactamente igual a cero, ¿sí? ¿a qué corresponde? ¿Por qué es eso?

324. A3: Incertidumbre.

325. P: Exacto, por el principio de incertidumbre. Es justamente es la mecánica cuántica la que impide la demostración de que todos esos átomos, digamos, que por el principio de incerteza que todos esos átomos no estén concentrados en un único punto. Bueno. Y finalmente…

326. A4: ¿Pero qué efecto tiene esto? Para el estado de la materia ¿qué efecto va a tener?

327. P: ¿Qué efecto tiene esto? El efecto que tiene esto es, por ejemplo, explicar, efectos como la superconductividad o efectos como la súper rigidez. ¿Está bien?

328. A4: …El estado de la materia…

329. P: qué cualidades tiene

330. A: (no se escucha)

331. P: interactúan entre sí.

332. A: (no se escucha)

333. P: Pero no solamente eso sino que no interactúan entre sí, no

334. A: (no se escucha)

335. P: Cómo se consiguió esto, deteniendo a los átomos. ¿Saben cómo se los detuvo? Había que sacarles energía para enfriarlos a esa temperatura.

336. A: (no se escucha)

337. P: ¿Saben cómo se consiguió eso? Bombardeándolos con fotones. ¿De qué manera? Se los bombardeó con fotones de todos lados, de todas las direcciones posibles. Imagínense Uds. una, que ustedes estuvieran corriendo y les tiraran piedras en todas las direcciones posibles. Eh, eso finalmente lo que va a hacer es detenerlos.

338. A: (no se escucha)

339. P: Con este…

340. [Risas]

341. A: (no se escucha)

342. P: Digamos, justamente porque la interacción con todos estos fotones, el impulso, en todas las direcciones posibles, en todas las direcciones posibles, finalmente lo que hace es detener… pero por eso consiguieron la temperatura de una millonésima de grados kelvin. Llegaron a la mil millonésima de grados kelvin. Y eso se consiguió por…

343. A: (no se escucha)

344. P: ¿Cómo?

345. A6: Es una forma de enfriarlo.

346. P: Es una forma de enfriarlo, claro. Quitarle energía cinética es enfriarlo. ¿Está bien? Bien, lo último que les voy a mostrar es. Lo que sería el hamiltoniano más o menos completo de una molécula o de un átomo si ustedes quieren, lo mismo. Eh. Esto es lo que les vamos a poner en el parcial para que resuelvan. [Risas] Por supuesto es una fotocopia terrible. Bueno, se corrió otra vez. Pero se ve. Acá tienen la energía cinética de los electrones… Esta es el potencial, la energía potencial en el campo de los otros electrones, porque esto corresponde a un único electrón. ¿De acuerdo? En el campo de los otros electrones, este campo débil. Este es, se encuentra en un cristal, sería, digamos, lo que sería el potencial cristalino, que es debido a las cargas que están fuera. No tengo el átomo pero tengo cargas que están fuera de ese átomo, digamos, los otros átomos que se encuentran en la estructura cristalina. Tiene una pinta un poco… Pinta que nosotros vimos que… ¿Está bien? Este es el término sigma… de electrón. ¿Sí? Este es el acoplamiento entre el movimiento orbital electrónico, en presencia de un campo magnético, que podría ser perfectamente el campo del núcleo, todo esto. Y esto es el potencial electrónico. Y eso está puesto en función del potencial electrónico del campo. Esto es el acoplamiento, el acoplamiento cuando hay un producto escalar de los momentos nucleares, magnéticos nucleares, son estos pi con el movimiento orbitante del electrón. O sea se acoplan también los momentos magnéticos nucleares con el l del electrón. ¿Sí? Esto es lo mismo que, no, el acoplamiento entre los spines nucleares y los spines electrónicos, pensados como momentos magnéticos, para los estados distintos, o sea para los estados p, b, etc. O sea, los estados que tienen n distinto de cero. Y esto es lo mismo, pero para los estados, o sea para n igual a cero. En la posición del núcleo… Bueno, esto es un acoplamiento con el gradiente del campo. Es un efecto… Polo nuclear

con el gradiente de un campo y este es el sigma, pero, sigma del spin nuclear. O sea, la interacción entre el campo magnético y el spin del núcleo.

347. A7: Campo magnético
Refleja el estado de ánimo de la persona que…

348. [Risas]

349. P: Ustedes dirán, esto no lo resuelve ni *Magoya*. ¿Está bien? Y por suerte no hay necesidad de resolverlo completo. Cada uno de estos términos da origen a una espectroscopía diferente o a veces se agrupan varios, pero da origen a una espectroscopía diferente y permite determinar diferentes cosas dentro de una molécula o de un átomo. ¿Está bien?

350. A5: Está corregido por relatividad

351. P: Eh, el efecto de spin órbita… Pero es un hamiltoniano clásico, esto es un hamiltoniano clásico, con corrección relativista. El tema es que cada, insisto, lo bueno de esto, lo que permite resolver esto, es que cada uno de estos términos corresponde a un rango de energía diferente. Entonces, por ejemplo, si uno se ubica dentro de un cierto rango de energía, puede observar uno de estos términos y esto da origen a una cierta espectroscopía. ¿Está bien? Acá faltan, por ejemplo, los efectos. Podrían estar contenidos acá, en la energía cinética, pero los efectos… o los efectos vibracionales, estarían por ahí, todos contenidos acá. Así que bueno, eso es lo difícil. Lo que tiene de bueno es que cada una de estas corresponde a un rango de energía diferente. Y uno lo incluye dependiendo del rango de energía que está necesitando. Bueno gente, se acabó.

352. [Aplausos]

353. Bueno, sólo me resta decirles que fue un gusto, fue un grupo relindo. Preguntón hasta el cansancio. Y, recomendarles fuertemente que den el final lo antes posible, que no la dejen estar, porque los 8 cuatrimestres son un engaño para todos, que es muy perjudicial dejar una materia tanto tiempo. No se van a acordar de qué se trataba, de qué materia era. Ahora que lo tienen fresco traten de darlo y mucha suerte en los parciales.

354. A: (pregunta sobre el examen final)

355. P: Si el final trata de ser conceptual. Qué quiere decir eso. Puede haber resolución de problemas para la parte de termo, porque termo es muy práctico, pero no para resolverlo como en un parcial sino justificando cada paso que van dando. Y en la parte de moderna, lo que me interesa más es la parte conceptual. Por ejemplo en un átomo de hidrógeno, les voy a tomar de dónde parten, por qué plantean lo que plantean, cuáles son las conclusiones, cuáles son las constantes de movimiento, por qué. No les voy a tomar la resolución de la ecuación diferencial, pero si les voy a tomar a dónde llegan y qué consecuencias sacan. ¿Está bien? La resolución de estas ecuaciones diferenciales que tienen un método fijo, a mí no me interesa porque ustedes la estudian de memoria hoy y se lo olvidan mañana, pero sí me interesa… el background. Bueno, por cualquier cosa tienen mi mail, estoy en mi oficina. Bueno gente, nos veremos.

CASO 8. PROFESOR D

1. P: Empezamos…
Entonces ¿qué tenemos?, fíjense, cómo el denominador es pi al cuadrado, para una sola partícula…

2. A: (no se escucha)

3. P: -h barra al cuadrado por el laplaciano, bueno vamos a suponer que dijeron eso, entonces que tenemos, la suma de i = 1 hasta n y fíjense, éste es el p sub i de cada partícula así que este laplaciano va a ser respecto de las coordenadas de cada partícula. ¿Está bien? Derivo respecto de la coordenada de cada partícula más… por la función de onda, igual a E…

$$V(r)$$

$$H(1,\ldots N)\,\Psi(1,\ldots N) = E(1,\ldots N)\,\Psi(1,\ldots N)$$

$$\left[\sum_{I=1}^{n} P_i^2 / 2mi + V(x_1 \ldots X_N)\right] \Psi(1,\ldots N) = E(1,\ldots N)\,\Psi(1,\ldots N)$$

$$\left[\sum_{I=1}^{n} -\hbar^2 / 2mi + \nabla_i^2 V\right] \Psi = E\,\Psi$$

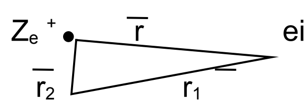
Bien. OK. En nuestro caso particular, en nuestro caso particular, fíjense que lo que tenemos es un núcleo que supongamos, que tiene…bosones dobles, ¿está bien? Que vamos a suponer que tiene una carga Z por N, cualquier número de electrones, no importa, porque los neutrones están en el campo de onda así que no interactúan prácticamente con el electrón, y un electrón. ¿Está bien? Y un electrón. Y entonces vamos a tener, supongamos esto metido dentro de un sistema de referencias cualquiera, éstas serían las coordenadas del núcleo, bue! Salió re-torcido… y ésta es la coordenada, la posición del electrón ¿está bien? Entonces, supongamos que a esta partícula la llamamos, la podría llamar… este… bueno, partícula 2, por ejemplo, así que le voy a poner esto es r2, esto es r1. ¿Está bien? Y entonces fíjense una cosa: este es un sistema acoplado ¿qué significa esto? Que el potencial de interacción entre estas dos partículas, que es el potencial electrostático, ¿de qué depende?

4. A1: De la coordinación relativa.

5. P: De la coordinación relativa… por la… Exactamente, el potencial electrostático justamente depende de esta distancia, de esta coordenada relativa, ¿está bien? Así que es un sistema y esa coordenada relativa es el módulo de r1 menos r2. O sea que este es un sistema que está acoplado. El movimiento de las dos partículas está acoplado. ¿Qué podemos hacer?

6. A2: Podemos pasar al sistema relativo. (Los alumnos responden pero no se escucha lo que dicen).

7. P: Exacto. Podemos tratar de desacoplar este sistema, pasando de tener las coordenadas R1 y R2, de resolver estas dos coordenadas… pasar a un sistema de tres coordenadas y de la partícula de masa q que tiene como coordenadas las coordenadas relativas de los dos.
Vamos a recordar que R va a ser igual a m1 por r1 más m2 por r2 sobre las suma de las masas ¿está bien? Y r chico va a ser r1 menos.



$\bar{r}_1, \bar{r}_2 \rightarrow \bar{R}, \bar{r}$

$R = (m_1 r_1 + m_2 r_2) / m_1 m_2 \rightarrow m_1 + m_2 = M$

$r = r_1 - r_2 \rightarrow M = m_1 m_2 / m_1 + m_2$

8. A: (hay una intervención de alumnos que no se escucha)…

9. P: Fíjense que r es la posición del electrón medida desde la partícula 2, ¿la ven? O sea… Bueno, entonces pasamos a este sistema donde por un lado tenemos al centro de masa, donde está concentrada toda la masa del sistema, y a esa partícula, esa partícula hipotética de masa q que se mueve con la coordenada relativa, cuya masa es la masa reducida m1 por m2 sobre m1 más m2, o sea que es exactamente lo mismo que uno hace en el caso clásico, ¿no es cierto? Es totalmente equivalente. Bien, entonces vamos a escribir el Hamiltoniano que se pone en juego para la transformación de coordenadas. Entonces el operador Hamiltoniano qué va a ser, va a ser, en principio lo escribimos…. Estoy hablando del centro de masa ¿sí? sobre la masa total, o sea, la masa del centro de masa. Dos veces, vamos a llamar a esto M dos veces M, más p por… de la partícula de masa mu, sobre dos mu, más el potencial. Que ahora depende solamente de las coordenadas de la partícula de masa q. ¿De acuerdo?

Entonces, si ahora escribimos la ecuación de Schroedinger, cuantificando esto nos queda: menos hache barra al cuadrado sobre 2 eme la masa de… por el laplaciano del centro de masa más, menos, menos hache barra al cuadrado sobre 2 mu por el laplaciano de la partícula de masa mu, más V de r, todo esto aplicado a nuestra función de onda fi, que, ¿de quién va a depender?	$\hat{H} = P^2_{CM} / 2M + P^2_{M}/ 2_M{}^2 + V(r)$ $\left[- \hbar^2 / 2M\, \nabla^2_{CM} - \hbar^2 / 2M\, \nabla^2_{M} + V\right](r) \quad \Psi(R, r) = E\, \Psi(R, r)$

De r grande, de r chica, igual a la energía del sistema por fi de R grande, de r chica. ¿Y qué característica importante tiene esta ecuación? ¿A ver quién se da cuenta?

10. A: (no se escucha)

11. P: ¿Qué pasa con las coordenadas de (… dos) y las coordenadas de la partícula de masa mu? ¿Qué les pasa?

12. A3: Se separan.

13. P: Se separan. Exactamente. Fíjense que esto se puede escribir como un operador que depende solamente de las coordenadas del centro de masa. ¿Si? Es solamente eso. Y todo esto que depende solamente de la coordenada de R. ¿Está bien? O mejor dicho de las coordenadas de la partícula de masa mu, entonces es como si tuviera la suma de dos hamiltonianos, uno con el centro de masa y otro con la partícula de masa mu, sin ningún término que los acople. Entonces, ¿qué vimos? ¿Qué se puede hacer en ese caso?

14. A: (los alumnos responden pero no se escucha).

15. P: Exacto, proponer una función de onda que sea el producto de las dos funciones de onda y entonces, si hacemos todo lo mismo que hicimos la clase pasada, uno tiene una ecuación de Schroedinger para el centro de masa y otra ecuación de Schroedinger para la partícula de masa mu y desacoplamos el movimiento del sistema. ……o sea que el electrón y el núcleo se muevan desacopladamente.

Nosotros pasamos a un sistema equivalente en el cual esas dos partículas hipotéticas, se mueven en forma desacoplada. Después, si uno quiere, puede volver atrás y recuperar la solución para el…. Igual que…	$- \hbar^2 / 2\,(m_1 + m_2)\, \nabla^2_{CM}\, \Psi_{CM}(R) = E_{CM}\, \Psi_{CM}(R)$

Bueno, pero el tema es entonces, que las dos ecuaciones que quedan así: menos h barra al cuadrado sobre 2 m, voy a poner nuestras dos masas, m1 más m2, por el laplaciano de la coordenada del centro de masa, por una función que depende solamente de las coordenadas del centro de masa, la función para el centro de masa, igual ¿igual a qué?

16. A2: Energía...

17. P: La energía ¿de quién?

18. A: (no se escucha)

19. P: Del centro de masa, la energía del centro de masa. Digamos, es la constante de separación, pero en el caso que uno pueda separar partículas, uno puede pensar que ésta es la energía del centro de masa. Que no es la energía del núcleo, en principio. ¿Está bien? Porque, fíjense, uno no puede separar en energía del núcleo y en energía del electrón. Pero sí puede separar en energía del centro de masa y en energía de la partícula hipotética del núcleo ¿está bien? Con una pequeña salvedad, fíjense, la masa de un protón solo es aproximadamente 1.860 veces más grande que la masa de un electrón. Si además tengo z de estas masas y algunos neutrones por ahí, podría tener unos neutrones acá, m2 puede estar siendo algunos neutrones también, la masa del núcleo seguro es, por lo bajo, unas 2.000 veces, aproximadamente 2.000 veces más grande que la masa del resto. Entonces, ¿qué va a pasar con el centro de masa?

20. A2: Va a estar en el núcleo.

21. P: Prácticamente va a estar en el núcleo. O sea que todas las conclusiones que saquemos respecto del centro de masa, prácticamente uno puede decir que lo que está haciendo es resolver para el núcleo. Y lo mismo con la partícula de masa mu. Fíjense, que si el centro de masa coincide prácticamente con el núcleo, esta coordenada es la coordenada del electrón, desde el núcleo, y esta masa mu es prácticamente la masa del electrón. Así que prácticamente con esta separación, en este caso particular, uno está resolviendo por un lado, para el electrón y por el otro lado, para el núcleo. En algunos libros… directamente se paran en el núcleo y… Digamos, si uno quiere ponerse quisquilloso, tiene que hacer esta separación. Lo otro es una aproximación, esto es exacto.
Bien, entonces tenemos, psi, del centro de masa, de R por un lado, una primera ecuación del centro de masa y una ecuación entonces, para… sobre 2 mu por el laplaciano sb mu más V de r, todo esto aplicado a psi de mu que depende de r y esto va a ser igual a E sub mu por psi sub mu de r. Entonces, recordando que la energía total de un sistema va a ser igual a E del centro de masa más E sub mu.

$$\left[- \hbar^2 / 2M \, \nabla^2_M + V (r)\right] \quad \Psi_M (r) = E_M \, \Psi_M (r)$$

$$E = E_{CM} + E_M \qquad \Psi (R, r) = \Psi_{CM} (R) \, \Psi_M (r)$$

Y que la función de onda del sistema, va a ser igual al producto de estas dos. Bueno, ¿cuál resolverían ustedes primero?

22. A: (algunos alumnos contestas pero no se oye lo que dicen).

23. A4: La de arriba…

24. A1: P

25. P: Sí, obvio, ésta. Esta es muy sencilla. Esta así con los ojos cerrados me tienen que decir cuánto, cuál es el resultado. Clásicamente, ¿qué hace el centro de masa? Es un sistema, aislado ¿está bien? Un sistema con componentes aislados. O sea que se conserva ¿qué se conserva? Se conserva p, aparte de otras cosas, se conserva la energía, se conserva el momento angular, se conservan un montón de cosas. Pero se conserva p. Entonces ¿qué hace el centro de masa?

26. A: (no se escucha)

27. P: Se mueve con un movimiento rectilíneo uniforme. ¿Está bien? Bueno. ¿Cuál sería el equivalente cuántico de eso? O sea, partícula libre. ¿Qué equivalente cuántico tiene?

28. A2: Onda plana.

29. P: Onda plana, exactamente. O sea que lo que uno tendría que obtener acá si esto es equivalente a lo cuántico, es una onda plana. Y… ¿tenemos una onda plana ahí? ¿Es una onda plana?

30. A5: Sí (en voz baja).

31. P: Fíjense, esto es, bueno, fijense esto son las derivadas de… si yo paso, esto me queda: Laplaciano de psi del centro de masa. Fíjense que esto es, esto es las autofunciones y los autovalores de p cuadrado. ¿Está bien? De p cuadrado. Son los mismos que de p así que, y justamente los autovalores de las proposiciones de p son los del lado… ¿Está bien?
Entonces el Laplaciano me queda igual a menos 2 m1 más m2, sobre hache barra al cuadrado, por la energía del centro de masa ¿está bien? Todo esto por psi del centro de masa y esto tiene entonces como solución, bueno se los dejo para que lo resuelvan ustedes, esto tiene como solución que psi del centro de masa es igual a una constante, por e a la i, por un número k escalar de R, ¿está bien? Donde esto va a remplazar la energía del centro de masa. La energía del centro de masa justamente son h barra al cuadrado, k cuadrado sobre 2 m1 más m2. ¿Está bien? O sea fíjense que esto es h barra al cuadrado, el autovalor de p, o sea h barra al cuadrado, k cuadrado con el autovalor de p cuadrado con un k cualquier cosa sobre 2 m1 más m2.

$$\nabla^2 \Psi_{CM} = - 2 (m_1 + m_2) / \hbar^2 E_{CM} \Psi_{CM} \Rightarrow$$

$$\Psi_{CM} = Ce^{ikR}$$

$$E_{CM} = \hbar k^2 / 2 (m_1 + m_2)$$

Entonces esto es totalmente equivalente, totalmente equivalente al caso clásico, o sea, una onda plana es la función de onda de una partícula libre. ¿Está bien? En realidad, siempre recordemos la propiedad, en realidad ya lo repetí unas cuatrocientas cincuenta veces, pero fíjense que en realidad una onda plana no es una buena función de onda. ¿Está bien? Pero lo que me dice que en realidad la partícula se comporta como una partícula libre. ¿Está bien? Si uno quiere darle una buena función de onda al núcleo tendría que pensarlo ¿cómo? Como que esto es una componente de qué, de un?

32. A4: De un paquete.

33. P: Claro, de un paquete de ondas…. Espantoso. Pero bueno, lo que les dije es que el centro de masa se comporta como una partícula libre. Este es el dato que contamos. Pero no es lo que realmente tenemos que resolver. Lo que vamos a resolver es la segunda y esa ya no es tan sencilla. Así que vamos a empezar a transpirar un poco, con esta ecuación. Entonces vamos a ver. Entonces empecemos con la segunda que es prácticamente la ecuación Schroedinger para el electrón, prácticamente porque, bueno, por todo lo que dijimos recién.
Entonces tenemos: nuestro hamiltoniano, lo voy a volver a repetir, es menos h barra al cuadrado sobre 2 mu, ¿está bien? Laplaciano sub mu, más V de r. ¿Está bien? Donde, vamos a ver cómo escribimos el laplaciano. Este con el valor complicado. Fíjense que en lo que hice hasta ahora, V de r es cualquier cosa. ¿Está bien? Lo único que n es un potencial que depende solamente de la coordenada radial, así que es totalmente… Bueno, ¿cómo escribimos el laplaciano en esféricas? El laplaciano en esféricas se escribe así: uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces por r, más, uno sobre r cuadrado, (se puede escribir todo) derivada segunda respecto de tita dos veces más uno sobre tangente de tita, derivada respecto de tita, más uno sobre seno cuadrado de tita (imposible acordarse de esto de memoria) derivada segunda respecto de fi dos veces, bueno…

$$\hat{H}_M = \hbar^2 / 2M \nabla^2_M + V(r)$$

$$\nabla^2_M = 1/r \ \delta^2 / \delta r^2 \ r + 1 / r^2 (\delta^2 / \delta r^2 + 1/tg\delta \ \delta/\delta\sigma + 1/ sen^2\sigma \ \delta^2 / \delta\gamma^2)$$

$$= 1/r \ \delta^2 / \delta r^2 \ r + \nabla^2\sigma\gamma$$

Y eso lo tenemos que resolver. ¿Alguien tiene alguna buena idea? Si yo fijo esto de esta manera por ahí tienen alguna buena idea. Uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces por r, más Laplaciano tita fi. ¿Alguien tiene alguna buena idea?

34. A3: Con el impulso angular… (Algunos alumnos dicen cosas pero no se escucha bien).

35. P: ¿Con quién está relacionado el laplaciano tita fi? Con el impulso angular. Con el impulso angular. Así que, en principio toda esta… ¿no lo reconocen? Lo estuvimos resolviendo la clase pasada… así que… ¿está bien? Nos llevó la clase… Con el trabajo que nos dio esto, no lo van a resolver otra vez, entonces fíjense que con lo que hicimos la clase pasada hicimos una buena inversión porque resolvimos eso que nos costó bastante, pero eso ya es, como les decía, las dos terceras partes de cualquier problema con simetría esférica.

Así que vamos a escribir esto como uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces, por r, bueno, y esto es, el laplaciano es entonces, sí, está bien, uno sobre r cuadrado, ¿está bien? Sí. h barra al cuadrado por el impulso angular al cuadrado, por el operador impulso angular al cuadrado.

$$= 1/r\ \delta^2/\delta r^2\ r - (1 / r^2\ \hbar^2)\ L^2$$

Bien. Esto nos va a servir, esto nos va a servir, si L cuadrado es constante de movimiento. ¿Está bien? Entonces vamos a ver, vamos a analizar cuáles son las constantes de movimiento del problema. [Borra el pizarrón] Cuando uno resuelve un problema, cualquier problema en cuántica, salvo que sea un problema unidimensional más o menos pavo, pero cuando uno resuelve un problema en cuántica, tiene que resolver una ecuación de Schroedinger para algún sistema, lo primero que observa, al igual que en el caso clásico, se fija cuáles son las constante de movimiento. Porque de la misma manera que en el caso clásico, las constantes de movimiento le ayudan a uno mucho, le facilitan mucho la vida. ¿Está bien? Entonces, lo primero que vamos a hacer es encontrar las constantes de movimiento. ¿Cómo identificamos las constantes de movimiento? ¿Quiénes son? Aquellos operadores que ¿qué hacen qué?

36. A6: Que conmutan con…

37. P: Que conmutan con el Hamiltoniano. ¿Sí? Eso acuérdense que proviene de considerar que una constante de movimiento es, aquel observable que ¿qué le pasa a su valor medio?

38. As: Permanece constante (responden varios alumnos a la vez)

39. P: Mantiene constante su valor en el tiempo. Eso tiene como consecuencia que el Hamiltoniano y la constante de movimiento conmuten. Bien. Los escucho. ¿Qué constantes de movimiento podemos tener? Fíjense una cosa: cuando uno estudia las constantes de movimiento, tanto en el caso clásico como en el cuántico, ¿sí? porque fíjense, si uno se pusiera a hacer los conmutadores del Hamiltoniano con todos los observables que a uno se le pueda ocurrir, es una cosa bastante fastidiosa. El tema es que hay que tratar de obtener algún criterio físico para encontrar esas constantes de movimiento. Si uno tiene simetría esférica, ya, con los ojos cerrados sabe que cuales son las constantes de movimiento, pero vamos a analizar un momento. ¿Está bien? Fíjense, en vez de hacer los conmutadores, pensemos justamente en la simetría que tiene el problema. El problema tiene simetría esférica, ¿está bien? Tiene simetría esférica. Nosotros vimos la vez pasada que cuando yo tengo un sistema con simetría esférica, ¿qué era lo que se conservaba? Ese sistema tiene un Hamiltoniano que es invariante ¿frente a qué?

40. A6: A rotaciones…

41. P: A rotaciones de cualquier ángulo y en cualquier dirección. Entonces, ¿qué magnitudes se van a conservar?

42. As: (Algunos alumnos responden pero no se escucha lo que dicen).

43. P: Exacto, todo L, o sea, todas las componentes de L, cualquier componente de L y fíjense que si yo tengo un problema con simetría esférica, ¿en qué dirección lo escribiría para tener…?

…., así que yo puedo poner a L en cualquier dirección, puedo poner a L en cualquier dirección ¿sí? y puedo cambiar el sistema de coordenadas, de manera de obtener las componentes de l, cualquier componente de L. Así que todas las componentes de L se conservan. [Escribe en el pizarrón: CONSTANTES DE MOVIMIENTO] El que quiera convencerse, hace el conmutador, pero en principio un argumento de simetría alcanza para decir justamente que las componentes de L se conservan.

Fijense que otra manera de verlo es la siguiente: los operadores, componentes de L, son operadores que dependen solamente de los ángulos. Se hacen derivadas respecto de los ángulos, etc. y nada más.

$$[H, L_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Porque R no aparece para nada. ¿Está bien? Y nuestro Hamiltoniano, escrito en función de L cuadrado, solamente depende de R. ¿Está bien? Solamente depende de R. Así que tengo una función de R con un operador que opera solamente sobre los ángulos. ¿Está bien? El operador depende solamente de los ángulos, entonces eso va a contar siempre, porque cuando encuentro una derivada, hago la derivada respecto de algún ángulo, e interpongo el Hamiltoniano, este Hamiltoniano es totalmente transparente, es como una constante para esto. Así que, es otra forma de verlo, un poco más matemática, de que esto va a conmutar. Y si conmutan todas las componentes de L, ¿quién más va a conmutar?

44. A4: Todas las componentes de L.

45. P: L cuadrado. O sea, el módulo de L o, lo que es equivalente, L cuadrado, que es una combinación, es una función de las componentes de L.

Así que H, L cuadrado, también conmutan. $[H, L^2] = 0$

Bien, entonces, uno puede apelar a la simetría esférica del problema ¿está bien? Y ya sabe que si el problema tiene simetría esférica, el Hamiltoniano es un invariante rotacional y por lo tanto conmuta con cualquier componente de L y obviamente también con L cuadrado. ¿Está bien? También con L cuadrado. Esto parece redundante, ¿no es cierto? Si conmuta con las componentes de L, parece redundante que uno meta también L cuadrado. Pero ¿porqué mete uno también L cuadrado? Fíjense, éstas son las constantes de movimiento, ¿puedo usarlas todas para resolver mi problema?

46. A6: No, porque… (No se escucha el final de la frase).

47. P: De estas constantes de movimiento, yo tengo que extraer ¿qué? ¿Cómo lo llamamos la vez pasada? Yo lo que quiero es poder plantear la ecuación de todos los observables que comparten autofunciones, ¿está bien? Que comparten autofunciones. Entonces, para poder obtener eso, digamos, l comparte autofunciones con el x, comparte autofunciones con el y, comparte autofunciones con el z, y comparte autofunciones con L cuadrado. ¿Está bien? Pero ¿qué pasa? El Lx con el Ly no comparten autofunciones, Ly con Lz tampoco comparten autofunciones, entonces tengo que encontrar el conjunto de observables que comparten las mismas autofunciones. ¿Cómo llegábamos a eso? ¿Se acuerdan?

$$\left.\begin{array}{l}[H, L_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ [H, L^2] = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}H \\ L^2 \\ L_z\end{array} \text{ CCOC}$$

48. A: (Algún alumno contesta pero no se escucha lo que dice).

49. P: O sea, el conjunto completo de observables que conmutan. O sea que de estas constantes de movimiento tengo que extraer aquellos operadores que conmutan todos con todos. ¿Sí? Bueno, ¿quiénes son?

50. A: (Algún alumno contesta pero no se escucha lo que dice).

51. P: H obviamente, lo voy a meter, ¿quién más?

52. A7: L cuadrado

53. P: L cuadrado conmuta con todas las componentes de L y con H, así que ya está. ¿Y?

54. A7: Alguna componente de L.

55. P: Alguna componente de L, una sola, porque si meto dos, esas dos ya no conmutan. Así que, puedo meter cualquiera, puedo meter cualquiera, pero lo usual es meter Lz, solamente porque tiene una expresión más sencilla. Nada más que por eso. Y entonces, de estas constantes de movimiento, extraigo el (pot???)… y voy a trabajar con el (pot???)…
Fíjense, vamos a plantearlo, entonces mi sistema va a quedar así, yo sé que éstas comparten autofunciones, entonces voy a tener que H aplicado a la función de onda que me interesa, mu, H sub mu, fi sub mu, va a ser igual a E sub mu por fi sub mu. Esta es una primera ecuación.

$$\hat{H}_m \Psi_m = E_m \Psi_m$$

Puedo trabajar la ecuación para L cuadrado. L cuadrado, también sub mu, digamos, por la misma psi sub mu, va a ser igual ¿a qué? ¿Cómo escribimos el valor… de L cuadrado? ¿Se acuerdan?

56. A7: L.

57. P: L, por L más 1, por h barra al cuadrado, por la misma fi sub mu. Y tengo, Lz sub mu, digamos, el mu después me lo voy a olvidar pero por ahora para que sepan que lo estamos resolviendo desde esa ecuación, por fi sub mu, va a ser igual, ¿el autovalor de Lz?

$$\hat{L}_m^2 \Psi_m = l\,(l+1)\,\hbar^2 \Psi_m$$

$$\hat{L}_{zm} \Psi_m = m\,\hbar^2\,\Psi_m$$

58. A: (no se escucha)

59. P: m. Bien. Y este es el sistema de ecuaciones que dispongo para resolver el problema. ¿Está bien? Bien. De este sistema de ecuaciones, de este sistema de ecuaciones, ya tenemos algo resuelto. ¿Qué es lo que tenemos resuelto?

60. A6: Los dos.

61. P: Estas dos. Estas dos ya las tenemos resueltas. En cualquier problema con simetría esférica, esto ya está resuelto. Tengo que concentrarme solamente en ésta. ¿Está bien? Entonces, de acá, puedo saber que la fi sub mu de r, se va a escribir, ¿de qué manera? ¿Cómo se va a escribir?

$$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Psi_m(r) = R(r)\,\gamma_m(\sigma, \gamma) \quad \otimes$$

3)

62. A6: Como una función de onda.

63. P: Una función de onda que dependa de n, que dependa perdón, no es lo mismo, que dependa de r ¿por quién?

64. A: Por los armónicos.

65. P: Por los armónicos esféricos y aquí ya me saqué de encima toda, toda, toda la dependencia angular. Tengo que concentrarme solamente en esta parte. La solución de L cuadrado y Lz me dice que las funciones de onda son, de L cuadrado y Lz, son cualquiera función de r por los armónicos esféricos. Listo, ya está. Y ahora tengo que concentrarme, digamos, el Hamiltoniano, y en particular el potencial que yo tenga en este Hamiltoniano, me va a fijar quién es el…rever? ¿Está bien? En realidad, con estas dos, ya está. Hay que ver una cosa interesante, tengo tres observables, tres operadores que conmutan entre sí. ¿Está bien? Y eso me introduce

tres números cuánticos, tres números cuánticos, porque acá voy a tener un número cuántico, porque acá tengo un número cuántico que tiene que ver con la energía, tengo m y tengo l. Eso me va a determinar tanto el impacto del sistema como su energía. ¿Está bien? Esto es lo mismo que uno tiene clásicamente, yo tengo una partícula, tengo tres grados de libertad, necesito tres ecuaciones para poder determinarlo. Acá pasa exactamente lo mismo. ¿Está bien? Tengo tres números cuánticos que me van a fijar el estado del sistema. Bueno, entonces, vamos a ver esto ⊗ en esta ecuación (1), 2), 3)), ahora sí ya vamos a escribir el potencial que interesa a este problema, que tiene este problema y vamos a empezar a resolverlo. [Borra el pizarrón] O sea, empezamos la matemática. Entonces, vamos a escribir nuestra ecuación de Schroedinger, la tenemos aquí arriba:

menos h barra al cuadrado sobre 2 mu y ahora sí voy a escribir el Hamiltoniano, el Laplaciano, perdón, por uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces por r y fíjense..., el Laplaciano, la parte angular la escribimos como menos uno sobre r cuadrado derivada al cuadrado sobre L cuadrado.

$\left[-\hbar^2/2_m \;\; 1/r \;\; \delta^2/\delta r^2\, r + L^2/2_m\, r^2 + V(r)\right] \;\; R(r)\, \gamma_m\, (\sigma, \gamma) =$

¿Está bien? Así que, eso que queda, si yo lo multiplico por menos hache barra al cuadrado sobre 2 mu, me queda, más L cuadrado sobre 2 mu, r cuadrado, más, mi potencial. Bueno, vamos a seguirlo con V de r hasta el final, para que se vea que siempre vale para el mismo, para cualquier problema… Todo esto aplicado a R de r por el Y sub lm de tita, fi,

igual a E por R de r por el Y sub lm de tita fi.

$= ER\,(r)\, \gamma_m\, (\sigma, \gamma)$

Bien. ¿Qué puedo hacer? Fíjense.

66. A4: Tachamos γ.

67. P: ¿Tachamos? ¿Tachamos así, alegremente?

68. A4: No.

69. P: ¿Tachar el Y? ¿Si? Fíjense que L está cuadrado. ¿Qué hace L cuadrado? L cuadrado, ese operador, a ese R de r no le hace nada. Bah, en realidad lo multiplica por uno sobre r cuadrado ¿está bien? Pero no le hace ninguna derivada, ninguna cosa rara. ….Pero L cuadrado aplicado al Y sub lm ¿qué hace?

70. A6: Multiplica por L…

71. P: Exacto. Lo multiplica por, o sea, tenemos esto, aplicado a esta ecuación. ¿Está bien? Entonces ese operador L cuadrado, que es un operador, lo vamos a remplazar simplemente por el autovalor.

Y entonces, ¿qué queda? menos h barra al cuadrado sobre 2 mu, uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces por r, más h barra al cuadrado por l, por l más uno, ¿está bien? Faltaba un hache barra al cuadrado, sobre 2 mu, hache barra al cuadrado, r cuadrado más V de r por R de r por el Y sub lm igual a E por R de r por el Y. ¿Está bien? Y fíjense ¿qué es lo que sucede? Ahora no tengo ningún operador que opere sobre la parte angular. Entonces esto que solamente depende de los ángulos, no, fuera, y solamente me queda una ecuación para r.

$\left[-\hbar^2/2_m \;\; 1/r \;\; \delta^2/\delta r^2\, r + \hbar^2\, l\,(l+1)\,/\,2_m\, r^2 + V(r)\right] \;\; R(\cancel{r})\, \gamma_m =$

$= ER\,(r)\, \cancel{\gamma_m}$

Eliminé todo ese operador ahí, lleno de derivadas respecto de los… y me queda una ecuación solamente para R de r, complicada o no. Y esto es lo que uno [ ] lo que uno puede hacer para [ ] lo que uno puede hacer con cualquier potencial con simetría esférica.

Entonces ahora estas derivadas parciales pasan a ser derivadas totales porque ahora solamente tengo R de r y entonces finalmente, ahora sí voy a escribir mi potencial.

$V(r) = -ze^2 / r$
$e^2 = q^2 / 4\pi E_0$

Y mi potencial ¿quién es? Es el potencial de una carga z e positiva, por una carga e negativa ¿está bien? Que, en el sistema gaussiano eso se escribe como menos z por e positivo por e, el menos viene de la carga escrita por e, por menos e sobre r. Ustedes están acostumbrados a escribir en el sistema MKS pero el sistema MKS no es el que conviene para este tipo de problemas, o sea que en realidad piensen que la diferencia entre las expresiones que ustedes conocen y esta forma de escribir el potencial, es que este e cuadrado es igual a la carga que es q 2 ¿sí? sobre 4 pi que es menos e. ¿Está bien? …esta expresión se entiende más en el sistema MKS.

Bueno, y entonces se tiene un concepto así, menos h barra cuadrado sobre 2 mu, por uno sobre r, derivada segunda respecto de r dos veces, por r más ele por ele más 1 sobre 2 mu, r cuadrado, más V de r. Ahora vamos a escribir V de r como menos z e cuadrado sobre r sobre R de r igual a E por R de r.

$\left[-\hbar^2/2_m \quad 1/r \quad \delta^2/\delta r^2 + l\,(l+1)\ \hbar^2/2_m\ r^2\right] Ze^2/r$
$R(r) =$

$= ER\,(r)$

Y esta es la ecuación que uno tiene que resolver. Bien, ahora fíjense una cosa, teníamos un movimiento en tres dimensiones ¿sí? Teníamos un movimiento en tres dimensiones y pasamos a una ecuación que solamente depende de R. ¿Sí? Si alguien entrara por esa puerta y no viese todo lo que hicimos antes y viese esta ecuación, ¿qué diría? ¿Es un movimiento de qué tipo? O, digamos, una ecuación, ¿de qué tipo? En una sola dimensión. ¿Está bien? O sea, hicimos lo mismo que uno hace en física clásica. ¿Está bien? En mecánica clásica. ¿Qué hicimos? Reemplazamos la parte de la energía cinética ¿sí? Reemplazamos la parte, esta parte que es la parte de la energía cinética, lo reemplazamos por algo que tiene la pinta de un potencial. ¿Está bien? ¿Cómo llamamos a ese potencial? Digamos a algo que tiene la misma pinta. …(unas palabras que no se entienden). Fíjense, este potencial, o sea, mejor dicho este término que tenemos acá, que es parte de la energía cinética, que ahora tiene la pinta de un potencial, ¿se acuerdan cómo se llama?

72. A7: Potencial centrífugo.

73. P: Potencial centrífugo. ¿Está bien? Es un potencial además, que si uno lo mira, es un potencial recursivo. ¿Y saben porqué se llama potencial centrífugo? Justamente, si eliminamos, al eliminar el movimiento angular de un sistema, ¿qué es lo que uno tiene que hacer? Yo tengo una partícula que se está moviendo en R ¿está bien? Pero también de acuerdo con ángulos, caminando, para eliminar ese movimiento angular, para no verlo, ¿qué es lo que tengo que hacer?

74. A7: Subir a un sistema…

75. P: Exacto, subirme a un sistema que rote con la misma velocidad angular que la partícula. Eso es un sistema rotante. ¿Está bien? Entonces si yo giro con la misma velocidad que la partícula, lo único que veo es el movimiento en R. ¿Está bien? Pero claro, en un sistema rotante que es un sistema no inercial ¿qué pasaría?

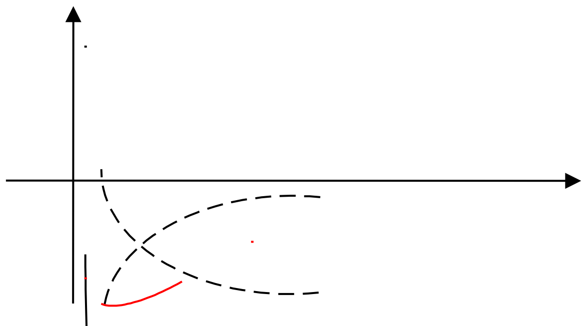
76. A: (no se escucha)

77. P: …Si ustedes gráficamente derivan ese potencial… ¿Está bien? Eso en términos de la energía cinética, pero si me paso a este sistema rotante, este término corresponde al potencial de la fuerza centrífuga. ¿Por qué no aparece Coriolis? ¿Por qué no aparece un término de Coriolis? Que eventualmente podría haber. Estoy, en realidad es Física 1. ¿Cómo es Coriolis? No pretendo que se acuerden, pero es perpendicular a la velocidad del sistema rotante. ¿Está bien? Entonces si es perpendicular a la velocidad del sistema rotante, ¿hace trabajo?

78. A7: No.

79. P: Entonces no tiene un potencial asociado. Fíjense que Coriolis sería un término disipativo porque depende de… si tiene un potencial asociado, es una fuerza disipativa, porque depende de la velocidad. Sin embargo, no hace trabajo, así que, no tenemos problema. Por eso solamente aparece el potencial centrífugo.

Bueno, y si uno se traslada entonces en este sistema, tiene un potencial efectivo, en este caso, tiene un potencial efectivo que corresponde, por un lado tiene, la barrera centrífuga ¿está bien? Y por el otro lado, tiene el potencial de Coulomb. Que es atractivo. Pero que decrece más lentamente que la unidad continua. Fíjense que uno va como uno sobre r cuadrado y otro va como uno sobre r. Si uno compone las dos cosas le queda un potencial bastante conocido, ¿ven?



Bueno. Ahora tenemos que abandonar la física un minuto y entonces resolver esta ecuación. A ver. Ya no nos queda más remedio que resolver esto. Bueno, hacemos cinco minutos de intervalo y lo resolvemos.

INTERVALO

80. ¿Se acuerdan lo que les comenté la vez pasada, sobre poner una clase y esas cosas? ¿Cómo se ven el lunes? ¿Qué tienen? ¿Qué opinan? Por eso, la hora la ponen ustedes, me da lo mismo cualquier hora. Puede ser a esta misma hora o puede ser a la tarde, como quieran. ¿Tienen mecánica? ¿A qué hora? A las 9. Y bueno. Va a ser una clase corta, no va a ser una clase muy larga, es simplemente para dar una serie de temas, o sea, en general, dar los temas de parcial, pero para que el miércoles podamos dar la última clase que solamente es para finales. ¿Está bien? Así que bueno, si pueden… Puede ser a esta hora, a las dos, si quieren. Podemos hacer otra cosa: puede ser el jueves. También tienen mecánica. Bueno, no sé, lo ven ustedes, yo tengo disponibilidad…

(Sigue la discusión sobre la clase adicional).

81. P: Bueno, entonces lo que vamos a hacer es resolver esta ecuación que es una ecuación unidimensional, ¿está bien? Así que eh… pero en realidad fíjense que es una ecuación unidimensional pero no se parece estrictamente a la ecuación Schroedinger en una dimensión. ¿Está bien? Porque, la ecuación de Schroedinger en una dimensión, ¿qué tendría? Sería, supongamos que esto…lo llamamos x. ¿Está bien? Tenemos este uno sobre r, y este r acá, todo el resto sí, es un potencial, depende de la coordenada, pero este uno sobre r y este r, molestan. ¿Está bien? para que se parezca realmente a una ecuación unidimensional de Schroedinger. Entonces, lo que se hace, y esto es método para cualquier potencial con simetría esférica, es una suerte de reemplazo para que la ecuación se parezca lo más posible a una ecuación unidimensional. ¿Está bien?

Y entonces se hace lo siguiente: la solución, que es R de r ¿sí?, ¿qué se propone? Que sea una función u a determinar, de r, sobre r. Siempre se hace este reemplazo en cualquier potencial o simetría esférica, ¿está bien? ¿Por qué? Porque entonces, si uno hace esto, y este término uno sobre r por la derivada segunda (esta es una derivada total), derivada segunda respecto de r dos veces de r por r ¿sí? De r por r. Eh… si reemplazamos r por u de r, bueno, por lo pronto sacamos este r que está dentro de la derivada, ¿está

$R(r) = \mu(r) / r \rightarrow 1/r \ d^2/dr^2 \cancel{r} \ \mu/\cancel{r} = 1/r \ d^2\mu/dr^2$

bien? Entonces nos queda uno sobre r por la derivada segunda de u respecto de r dos veces.

Entonces esto, uno lo hace siempre, para cualquier potencial con simetría esférica. Y entonces, en la ecuación nos queda un uno sobre r afuera, ¿está bien? después nos queda este r cuadrado, nos queda este r y vamos a ver qué pasa.

Escribimos: podemos sacar este uno sobre r factor común, y nos queda: menos hache barra al cuadrado sobre 2 mu, derivada segunda de mu respecto de r dos veces, más, ele por ele más uno, por hache barra al cuadrado, sobre 2 mu r cuadrado, menos z e cuadrado sobre r, por u, ¿está bien? por u, igual a E por u sobre r.

$$1/r \left\{ -\hbar^2/2\mu \; d^2\mu/dr^2 \left[+ l\,(l+1)\; \hbar^2/\,2\mu r^2 - \right] Ze^2/r \; \mu \right\} =$$

$$= E\,\mu\,/\,r$$

¿Está bien? Entonces fíjense que este uno sobre r, vuela, y me queda una ecuación que realmente tiene la pinta de una ecuación unidimensional de Schroedinger. Y es una ecuación en u. Otra cosa que uno hace ahora ya sí para este potencial en particular, es trabajar para, fíjense que hay un montón de constantes dando vueltas y molestas, ¿está bien?, entonces, bueno, uno puede arrastrarlas hasta el final, no hay problema, pero como, digamos para limpiar lo más posible la ecuación, ya que de por sí ya es difícil de resolver, uno trata de limpiarla lo más posible. ¿Está bien? Entonces lo que vamos a hacer es adimensionalizar. Vamos a trabajar, en vez de trabajar con esta energía y con esta variable r, vamos a trabajar con una coordenada adimensional que vamos a llamar ro, y una energía, digamos, una energía, que, también adimensional, o un número adimensional en lugar de la energía. Entonces la pregunta es: ¿cómo adimensionalizamos? Este ro será igual a erre sobre alguna constante que tenga dimensiones de energía, ¿está bien?, versus dimensiones de coordenadas de longitud, ¿está bien? Ahora, para elegir esa constante, ¿sí?, para elegir esa constante uno tendría que seguir algún criterio físico, entonces, digamos, que, estamos resolviendo el átomo de hidrógeno, ¿está bien? Eh, este átomo, ¿qué longitud característica apareció alguna vez, ¿sí? con alguien que resolvió el átomo de hidrógeno por primera vez, aunque lo haya hecho, digamos, no de esta manera, sino, este, digamos…

82. A: (un alumno interviene pero no se escucha lo que dice)

83. P: Con un método que conceptualmente manejaba bien.

84. As: (Varios alumnos dicen: Bohr).

85. P: Exacto, estoy hablando de Bohr, o sea, fíjense una cosa, Bohr resolvió el átomo de hidrógeno, ¿está bien? Lo resolvió y, si bien siguió un camino equivocado, llegó al resultado que conformaba muy bien con la experiencia. Acá fijense…

86. As: (Varios alumnos dicen cosas que no se escuchan).

87. P: Que las magnitudes que le aparecieron a Bohr tengan algo que ver con Bohr, es más, que aparezcan de alguna manera. Entonces las vamos a buscar, porque seguramente van a aparecer. Porque insisto, por más que el resultado de Bohr era conceptualmente incorrecto, eh, cuantitativamente sí era correcto. ¿Está bien?

Así que, vamos a usar una variable adimensional ro, que sea r sobre el radio de Bohr. Y ahora les recuerdo cuál es el radio de Bohr. El radio de la energía atómica de Bohr, ¿recuerdan? que es hache barra cuadrado sobre mu e cuadrado. Bien. Y esto tenía un valor de aproximadamente 0,529167 o setenta y siete A.

$$\delta = r/a_0$$

$$a_0 = \hbar^2/\mu e^2 \cong 0{,}529167 \text{ A}$$

Y vamos a usar un número epsilon que contenga la energía y la contenga de la siguiente manera: va a ser la raíz, también es adimensional, pero va a ser la raíz de la energía que tenemos que encontrar, sobre la energía de Bohr, del primer, del primer, del estado inicial de Bohr, con signo menos, dado que, eh, o bien planteamos, esta energía va a ser negativa…

tenemos estados ligados, ¿está bien?, y ésta es cero, la vamos a poner así sin signo negativo. Si la pusiéramos con el signo negativo, con el signo negativo, entonces bueno, el signo menos… Entonces E cero era mu por e a la cuarta sobre 2 hache barra al cuadrado y era aproximadamente, como vimos aquella vez, 13,6 eV.

van a ser sus estados ligados

$E = \sqrt{-E/E_0}$

$E_0 = \mu e^4 / 2\hbar^2 \sim 13.6$ eV

Entonces vamos a hacer las dos, la energía, una energía adimensional y una variable adimensional… Para los que llegaron recién, una cosa importante, hicimos el reemplazo: en vez de escribir R(r), escribimos, lo escribimos, como una u(r) sobre r y esto se hace siempre, para cualquier potencial con simetría esférica, en general. Porque eso, ese reemplazo, nos transforma la ecuación, esta ecuación en r, en una ecuación que tiene exactamente la pinta de una ecuación unidimensional de Schroedinger. ¿Eh? Menos hache barra al cuadrado sobre 2n, derivada segunda de u respecto de r dos veces, más potencial aplicado a u igual a E por u. ¿Está bien? Eso se hace siempre. Por eso quería aclararlo. Bueno, empezamos a trabajar. [Borra el pizarrón]

Ok. Entonces, con este…reemplazo, la ecuación ahora queda: derivada segunda respecto de ro dos veces, voy a pasar por alto los pasos matemáticos aburridos pero directos, digamos, menos ele por ele más uno sobre ro cuadrado más dos z sobre ro menos, paso todo lo que, voy a igualar la ecuación a cero, así que voy a pasar la parte de energía también a cero, digo, eh, a, al primer miembro, fíjense que acá lo que queda es el cuadrado, ¿está bien?

$d^2/de^2 - l\,(l+1) / e^2 + 2z\,/e - E^{1/2}\ \mu = 0$

$\delta \to \infty \qquad \Psi \to 0$

Porque definí e o sea epsilon como la raíz de menos E sobre E cero, e cuadrado, todo esto aplicado a u igual a cero. Y esto es lo que hay que resolver. Bien, ¿cuál es el procedimiento? ¿Qué es lo primero que hacemos siempre que tenemos una ecuación diferencial? Sabiendo que lo que uno está encontrando es una, función de la otra. ¿Qué hacemos?

88. As: (Los alumnos dicen cosas que no se escuchan).

89. P: Estudiamos, claro, qué pasa en los extremos para que esta función digamos, se porte bien. ¿Está bien? Para evitar posibles divergencias. Entonces, ¿cuáles son los extremos de r, o de ro, en este caso?, ro y r tienen los mismos extremos. ¿Quiénes son?

90. A: (no se escucha)

91. P: Claro, su rango de variación es entre cero y infinito. Así que vamos a ver qué pasa, digamos el comportamiento asintótico de r o de ro, digamos, de ro tendiendo a infinito, y sabemos que cuando ro tiende a infinito, ¿a qué tiene que tender la función de onda?

92. A1: A cero.

93. P: A cero. Así que nuestra función de onda completa, tiene que tender a cero. La función de onda. Ni u, ni R pasa, en realidad, R porque, claro, la parte de los armónicos esféricos ya la cuidamos, ya la tenemos bien determinada, así que en realidad la R(r), tiene que tender a cero. Bien, entonces, veamos, si ro tiende a infinito, ¿cómo nos queda esta ecuación? ¿Cuál sería la ecuación asintótica? Tenemos por un lado la derivada y después tenemos por acá una cosa que va como uno sobre ro cuadrado, una cosa que va como uno sobre ro y una cosa que va como un número.

94. As: (Los alumnos opinan pero no se escucha).

95. P: Claro, ¿qué pasa?, ¿qué nos queda? Fíjense, estas dos cosas tienden a cero, mientras que esto tiende a una constante, es una constante. Así que vamos a tirar estos dos términos, la derivada no, por supuesto, si no, nos quedamos sin ecuación, pero esta parte, estos dos términos los tiramos y nos quedamos igualmente con el resto.
Entonces la ecuación asintótica sería derivada segunda respecto de ro dos veces menos epsilon al cuadrado, aplicado a la u asintótica digamos, igual a cero.

0

$$(d^2 / d\delta^2 - E^2)\, \mu_{as} = 0 \Rightarrow \mu_{as} = Ae^{-E\delta} + B\, e^{-E\delta}$$

Bueno, ésta es una ecuación sencilla, ¿está bien? cuya solución, es más, ya nos apareció alguna vez. ¿Qué solución tiene esto?

96. A2: Exponencial.

97. P: Claro, son exponenciales. Viene apareciendo desde Física 1 en realidad, son exponenciales reales. O sea, la u asintótica, es igual a constante por e a la menos epsilon ro, más constante por e a la epsilon ro. ¿Está bien? Si nosotros queremos que esa ecuación tienda a cero para ro tendiendo a infinito, ¿qué hacemos?

98. A1: B, cero...

99. P: B es cero, fíjense que eso es aplicar una condición de contorno. Tenemos estados ligados, la función de onda tiene que ir a cero en infinito. Así que por eso, B tiene que ser cero. Veamos el otro límite. Para el otro límite es para ro tendiendo a cero. Si ro tiende a cero, ¿con qué nos quedamos de la ecuación? Bueno, me voy a ver esta derivada y ¿qué más? Este término se hace muy grande. ¿Sí? éste se hace grande pero un poco menos, un orden de magnitud menos, digamos, y éste, se queda igual. Así que, ¿con qué nos quedamos?

100. A1:… respuesta.

101. P: Con éste, es el más grande. Tenemos menos L por L más uno, sobre ro cuadrado, todo esto, aplicado a u, igual a cero, para u asintótica, otra vez, buen. Bien, ¿qué solución puede tener esto? A ver si la miran un poco así, cerrando un ojo, a ver si se dan cuenta. Fíjense, si ponemos el signo igual acá, ¿está bien? uno tiene que la derivada segunda respecto de ro dos veces, es igual a un número ¿sí? por la misma función dividido por ro cuadrado.

$f \rightarrow 0$

$$(d^2 / d\delta^2 - l\,(l+1) / \delta^2)\, \mu = 0 \Rightarrow \mu = \delta^s$$

102. A3: Es un polinomio...

103. P: Aja, ¿por qué?

104. A3: Porque...

105. P: Exacto, porque una derivada segunda me va con ro, una derivada primera me va con ro, una derivada segunda me va con ro cuadrado. ¿Está bien? Así que lo que voy a hacer es proponer una solución del tipo igual a ro a la algo, en realidad no sé ro a la cuánto. Ro a la ese. ¿Quién me va a decir quién es ese? ¿Cómo hago para determinar ese?

106. As: (Los alumnos opinan pero no se escucha lo que dicen).

107. P: Meto esto en la ecuación y me fijo para qué valor de exponente, ro a la ese es solución. ¿Está bien? ¿Lo ven todos eso? Ok. [Borra el pizarrón]
Bien, entonces, meto esta solución adentro, entonces me queda, derivada segunda me queda, ese por ese menos uno, por ro a la ese menos dos, menos, ele, por ele más uno, y acá tengo ro a la ese dividido por ro al cuadrado, me queda ro a la ese menos dos, igual a cero. Como esto tiene que valer para cualquier valor de ro, ¿qué tiene que pasar?

$s\,(s-1)\,\delta^{s-2} - l\,(l+1)\,\delta^{s-2} = 0$

108. As: (Un alumno dice algo).

109. P: Ese, por ese menos uno, menos ele por ele más uno, tiene que ser igual a cero. Entonces me queda una cuadrática para ese. ¿Está bien que me quede una cuadrática? Eso me va a dar dos valores de ese en principio. ¿Por qué me tiene que quedar una cuadrática? ¿Qué tipo de ecuación tengo?

$s = -l$

$s\,(s-1) - l\,(l+1) = 0$

$s = l+1$

110. A3: De segundo orden.

111. P: De segundo orden: necesito dos constantes de integración. ¿Está bien? Que no van a ser los dos valores de ese, pero van a ser las dos constantes que acompañen a los ro a la S que son solución. Entonces bueno, uno tiene como solución, tiene dos soluciones, tiene ese igual menos ele y ese igual ele más uno. ¿Está bien? Con lo cual, la u para ro tendiendo a cero, tiene una pinta que es constante, otra vez, por ro a la menos ele más B por ro a la ele más uno. ¿Me puedo quedar con las dos? Cuando ro tiende a cero, ¿qué pasa?

$\mu\,(\delta \rightarrow 0) = A\,q^{-l} + B\,q^{l+1}$

0

112. A: (no se escucha)

113. P: Claro, ésta, ésta, explota, así que tengo que hacer que A sea cero y me quedo con eso. Bueno, entonces ahora ¿qué hago?, ¿qué hago? Voy a decir que mi u de ro, ¿si?, va a ser igual a ¿qué? Al producto de las dos funciones que son resultado del resultado asintótico, por, otra cosa. Fíjense otra vez lo que hicimos, sacamos las divergencias en los extremos. ¿Está bien? Las posibles divergencias en los extremos. De tal manera de tratar de garantizar, de tratar de garantizar, que la función se comporta bien. No lo garantizamos del todo, por lo menos ya sacamos posibles divergencias, posibles problemas en la función de onda, fijamos la condición de contorno así a priori. ¿Está bien?
Entonces escribimos esto como e, la constante no importa, se la fagocita la otra función, e a la menos epsilon ro, por ro a la ele más uno. ¿Está bien? Por una función que es efe de ro que es a determinar.

$\mu\,(q) = e^{-E\delta}\, C^{\,l+1}\, f(\delta)$

¿Está bien? Y suponemos que en principio, efe de ro se va a portar bien en cero y en infinito.
Bueno, y ahora ¿qué hacemos para esto? La metemos en la ecuación, metemos toda esta solución en la ecuación diferencial de aquí arriba, ¿sí? y nos va a quedar una ecuación para f de ro.
Y eso queda: derivada segunda de f respecto de ro dos veces, más dos veces L más uno sobre ro, menos epsilon por derivada de f respecto de ro, más dos zeta menos dos epsilon por L más uno, todo sobre ro por la f, igual a cero.

$d^2f/d\delta^2 + 2\,[\,(l+1/\delta) - E]\,df/d\delta + \{\,[2z - 2E(l+1)]/\delta\,\} = 0$

Bien, habiendo extraído las posibles singularidades que pueda tener esta función, ¿qué puedo proponer para efe de ro? O sea, miro esa ecuación, no se me ocurre nada, cómo integrarla, entonces, ¿qué hago?

114. A6: Una serie.

115. P: Una serie, o sea, cuando no sé qué hacer, meto una serie. Y en realidad esa ecuación ya tiene nombre. Si ustedes la buscan en un libro de ecuaciones diferenciales, sobre todo aplicadas a la física, es una ecuación conocida, ¿está bien?, es una ecuación conocida y es lo que se llama la ecuación de Laguèrre. Que por supuesto, su solución, son los polinomios de Laguèrre. Pero bueno. Bueno, vamos a, de todas maneras, vamos a encontrarlos. También es otra de las ecuaciones que aparece mucho.

Bien, entonces propongo, propongo que f de ro sea una serie, en principio infinita, suma de ciertos coeficientes a sub i por ro a la i. Bien, no vamos a hacer lo que hacemos siempre, ¿qué hago con esto? Lo meto en la ecuación y entonces paso de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica. ¿Está bien? ¿Y qué, qué es lo que tiene que pasar con esa ecuación? Claro, me va a quedar algo así como suma, ¿está bien? suma de coeficientes por ro a la i = a 0.

Propongo $f(\delta) = \sum_{i=1}^{\infty} aip^{i}$

$\Sigma(\ )\ \delta^{i} = 0\ \mathrm{V}\ \delta$

¿Está bien? Y entonces, como eso tiene que valer para todo ro, ¿qué es lo que tengo que pedir?, ¿qué es lo que tengo que pedir?

116. A: (no se escucha).

117. P: Claro, que los coeficientes que acompañan a cada potencia de ro, sean iguales a cero. Y eso ¿qué me va, con suerte, qué es lo que me va a dar? Una relación de recurrencia, exactamente. ¿Está bien? Bueno, paso ese paso así rápido para no aburrir y la relación de recurrencia que queda, es ésta:

A a la i más uno, igual a dos epsilon por i, perdón, por i más ele más uno, menos dos zeta, sobre i más uno por i más 2 L más 2 por a i. O sea una buena relación de recurrencia.

$\Rightarrow a^{i} +1 = [\,2\,E\,(i+l+1) - 2z\,] / (i+1)(i+2l+2)\ ai$

Ahora, eh, todavía tendríamos que cerciorarnos que, de todas maneras esta función se porte bien. En realidad no la u de raíz de ro, ni siquiera la u de ro sino la R de ro. Tiene que portarse bien. Portarse bien significa que, hay que acordarse que es una función de onda, y que se tiene que portar bien en los extremos. ¿Está bien? Entonces, ¿qué hacemos? Vamos a estudiar, vamos a ver qué pasa con esta serie infinita cuando tiende a infinito, a ver si efectivamente la serie converge, en principio converge, y si converge, a qué función converge. ¿Está bien? Porque no alcanza con que converja, ¿sí? Uno estudia que una serie converge estudiando para i tendiendo a infinito cuál es la, digamos, a qué tiende el cociente entre dos, entre dos, coeficientes sucesivos. En cualquier serie. Bueno, si eso tiende a cero, entonces uno sabe que esa serie va a converger. Tiene un criterio de convergencia. Pero puede converger a alguna función, o sea puede portarse en infinito como alguna función que para ro tendiendo a infinito, ¿sí? tienda a otro número, digamos, psi de erre y eso no es una buena función de onda. ¿Está bien? Entonces tendré que aplicar mi condición de contorno para que eso sea una buena función de onda y efectivamente, esto así no es una buena función de onda, porque esta serie, así como está escrita, esta serie, como está escrita, para ro tendiendo a infinito se comporta igual que e a la 2 epsilon ro [$e^{2E\delta}$]. Ahora lo vamos a ver enseguida. Entonces, por más que, por más que tiende a una función, ¿sí? fíjense, que si empiezo a juntar pedazos, esto es, la efe de ro va como e a la 2 epsilon ro, Lo mismo acá. Este ro, digamos, no hace nada, mientras tenga este término, pero si yo tengo e a la dos epsilon ro, por e a la menos epsilon ro, toda la u de ro se comporta como e a la epsilon ro y eso me explota en el infinito. ¿Está bien? Así que, ¿qué es lo que voy a tener que hacer?

118. A3: Cortar la serie.

119. P: Cortar la serie, y eso es aplicar la condición de contorno. ¿Está bien? Pedir que la serie se corte para que en vez de ser una serie infinita que tiende a esto, sea un polinomio. Y un polinomio, siempre, siempre, va a ser parado por este e a la 2 epsilon, cualquiera sea la potencia que tenga el polinomio. ¿Está bien? Entonces, bueno, si uno hace el cociente de estos dos coeficientes, el límite para i tendiendo a infinito, de a sub i más uno, sobre a sub i, esto es igual ¿a qué?

Fíjense, para i tendiendo a infinito, puedo tirar este L más uno que se tiene que ir, puedo tirar este uno, puedo tirar este 2 L más 2, ¿está bien? Entonces me queda, 2 epsilon por i, sobre i cuadrado, o sea esto va como 2 epsilon sobre i, sobre i.

$$\lim_{i \to \infty} (ai + 1) / ai = 2E / i$$

¿Está bien? Que tiende a cero, o sea la serie converge, está bien. Pero, digamos, tengo este cociente de coeficientes. ¿Por qué estudio el comportamiento para i grande cuando lo que me interesa es el comportamiento para ro grande? ¿Por qué? ¿Se acuerdan?

120. A4: Porque...

121. P: Claro, porque si yo tengo una serie donde cada término es ro a la algo, ¿sí?, ro a la i, ¿sí? cuando ro se hace muy grande, cuando ro tiende a infinito, los términos que realmente me van a pesar, ¿cuáles van a ser? Los que tengan el exponente grande, ¿ven? Comparen ro, con ro a la mil. Por ejemplo. ¿Está bien? Entonces ro a la mil va a tener un peso mucho más importante, me va a decir mucho más cómo es el comportamiento de la serie que ro. Entonces, por eso uno estudia qué pasa para los, para cuando quiere estudiar para ro tendiendo a infinito, estudia qué pasa para los íes tendiendo a infinito. ¿Está bien? Para los términos.

Bien, y e a la 2 epsilon ro es una serie, que si ustedes hacen el desarrollo en serie de esto, tienen la suma desde i igual cero hasta infinito de 2 epsilon ro a la i sobre i factorial, así que pueden ver fácilmente, aquí tengo para ustedes, que el coeficiente a sub i más uno, sobre el coeficiente a sub i, justamente, también tiene, tiende, a 2 epsilon sobre i.

$$E^{2E\delta} = \sum_{I=0}^{\infty} (2E\delta)^i / i! \Rightarrow ai + 1/ai \rightarrow 2E/i$$

Así que no sirve la serie infinita y lo que tenemos que hacer es aplicar la condición de contorno otra vez y pedir que la serie se corte en algún punto. ¿Podemos hacer eso? ¿Sin ser arbitrarios? ¿Hay algo que todavía nos haya quedado indeterminado? Acá está metida la energía. Y eso justamente entonces nos va a dar cuáles son las energías posibles, ¿está bien? pidiendo que esta serie se corte. Bien. ¿No hay un poco de expectativa? ¡Cuanta razón habrá tenido Bohr! ¿No? Vamos a ver. Bien, entonces, tenemos que pedirle que se corte. Y 2 epsilon, fíjense, ahí está i más L más uno, son tres números, los voy a juntar en un solo número. ¿De acuerdo?

Para que no nos queden separados. Lo voy a llamar ene. Eh, menos 2 zeta, con la única salvedad que ahí está el número cuántico ene, así que eso me dice que como es i más ele más uno, éste es un número ene que va a ser un número cuántico, tiene que ser estrictamente mayor que ele, ¿lo ven? Perdón, sí, dije bien. No, no, sí, está bien. Entonces, esto tiene que ser igual a cero, ¿está bien? Por lo cual, este epsilon que definimos, nos queda como, nos queda como zeta sobre n, ¿no? Y con epsilon, teníamos que epsilon era la raíz de nuestra energía menos E sobre epsilon cero, (comete un error, no es epsilon sino E cero), ¿está bien?, igual a zeta sobre n con lo cual la energía, que fíjense que queda acotada por este número ene, así que yo le voy a poner el subíndice así, queda igual a menos zeta cuadrado, por E cero sobre ene cuadrado.

$$2\,En - 2Z = 0$$

$$E = Z/n$$

$$\sqrt{-E/E_0} = Z/n \Rightarrow E_n = -z^2\, E_0 / n^2$$

¿Y?, ¿lo obtuvimos o no lo obtuvimos? ¿Obtuvimos las energías de Bohr o no obtuvimos las energías de Bohr?

122. As: (Algunos alumnos dicen algo pero no se escucha).

123. P: Exactamente las energías de Bohr. Esa es la energía del estado fundamental y la energía de todos los estados excitados, de todos los estados excitados, iban como esta energía sobre ene cuadrado. Este zeta cuadrado que apareció acá, es porque acá pusimos la energía del átomo de hidrógeno y esto es un átomo de hidrógeno, así que efectivamente, la energía que obtuvo Bohr, estaba bien.

Si juntamos y ponemos el valor de E sub cero, esto queda ¿cómo? Menos, zeta cuadrado, por mu, e a la cuarta, sobre 2 hache barra al cuadrado por, sobre ene cuadrado.

$E_n = -z^2 E_0 / n^2 = - z^2 \mu e^4 / 2\hbar^2 n^2$

O sea, las energías de Bohr. Ustedes dirán, todo el lío que hicimos, y Bohr, en dos renglones, obtuvo sus energías, bueno, en cuatro renglones obtuvo sus energías, ¿sí? Pero ¿qué pasa? Conceptualmente la idea de Bohr estaba mal. Bohr planteaba órbitas estacionarias. Hoy sabemos que no podemos hablar de órbitas. ¿Está bien? No podemos hablar de órbitas justamente por el principio de incerteza. Así que, por más que su energía coincide, coincide con la energía, con la energía del átomo de hidrógeno, pero, pero digamos conceptualmente, Bohr partió de algo falso. Bien, así que bueno, éstas son las energías, vamos a juntar todos los pedazos de la función de onda y ya lo tenemos. [Borra el pizarrón] Bien, entonces tenemos, la parte radial de la función de onda, R de r, va a ser igual a una constante, que es la constante de normalización, ¿está bien? y empecemos a juntar los pedazos. Teníamos, era u de ro sobre ro, ¿está bien?

Entonces u de ro era todo esto, y entonces nos queda, e a la menos epsilon ro, ese ro a la n más uno, como es dividido ro, es uno ro sobre ro, me queda ro a la ene, ro a la ene, por nuestra efe de ro, nuestro polinomio, ro, donde este polinomio fíjense, que depende, depende de ele y ene, así que vamos a escribirlo en función de ele y ene, de ro. Y esta es la parte radial de la función de onda. Como ésta, como todo esto depende de ene y ele, entonces esta parte radial, depende de ene y ele. Bien, este polinomio, el polinomio, se llama polinomio asociado de Laguèrre.

Polinomio asociado de Laguèrre

$R_{nl} (r) = C e^{-E\delta} \delta^l f_{nl} (\delta)$

$\Psi_{n\,l\,m} (\delta, \sigma, \gamma) = C e^{-E\delta} \delta^l f_{nl}(\delta)$
$Y_{ln}(\sigma, \gamma)$

Nº cuántico magnético
Nº cuántico orbital
Nº cuántico principal

La solución de esta ecuación es la serie de Laguèrre pero bueno, cuando uno la corta, son los polinomios asociados de Laguèrre. Bien, o sea que la función de onda radial, la función de onda compleja, mejor dicho, fíjense, que depende de tres números cuánticos. Depende del número cuántico ene que es el que está relacionado con la energía, depende de ele, a través del polinomio y a través de los armónicos esféricos, y depende de eme. Y es entonces C por e a la menos epsilon ro, fíjense que este ro es erre sobre a sub cero, ¿está bien? Ahora puede estar en función de ro, si quieren, por ro a la ele, por el efe ene ele de ro, por nuestros armónicos esféricos Y sub ele eme de tita fi. Y esta es la función de onda completa. Entonces fíjense, esta función de onda depende de estos tres números cuánticos, donde ene, lo que representa es la energía, es el número cuántico asociado a la energía. ¿Está bien? Y se llama número cuántico principal. Justamente es el que sale de la ecuación, digamos, de la parte de la energía. Ele, es lo que se conoce como el número cuántico orbital, porque es lo que tiene que ver con ele, ele cuadrado. Y eme, es lo que se llama el número cuántico magnético, nombre que no se entiende ahora pero que bueno, lo vamos a entender la clase que viene. Y la energía de todo número cuántico ¿de qué depende?

124. A2: De ene.

125. P: Solamente de ene. Fíjense estos números cuánticos, guardan una cierta relación entre sí. Eh, porque, ya habíamos visto que había una relación entre L y eme, ¿está bien? Y eme tenía que estar ¿entre qué valores?

126. A: (no se escucha).

127. P: Entre menos L y L, ¿está bien?
Y ahora vemos además, vemos además, que ele es estrictamente menor que ene, o ene es estrictamente mayor que ele. ¿Está bien? Así que, donde ele además era un número positivo. Ele es un número positivo, mayor que cero, mayor o igual que cero.

$-l \leq m \leq l$

$0 \leq l \angle n$

Esto lo habíamos visto la vez pasada. Así que, estos números cuánticos no pueden ser cualquier cosa sino que están relacionados de esta manera. Pero la energía solamente depende de ene, mientras la función de onda, depende de varios números cuánticos. ¿Qué es lo que tenemos en este caso, entonces?

128. A3: Degeneración.

129. P: Degeneración, tenemos degeneración. ¿Está bien? Es decir, hay varios estados que corresponden a una misma energía. Varios estados que corresponden a una misma energía. ¿Está bien? Eh, vamos a estudiar un poquito esa degeneración antes de meternos a estudiar la función de onda. Fíjense, vamos a hacer una especia de tablita.
Pongamos acá el número cuántico ene, pongamos acá ele y pongamos acá los posibles valores de eme y de ge. Entonces ene, empieza en uno. ¿Está bien? ¿Qué valores puede tomar ele? Cero, ¿cero o? Sí está bien, ¿no?, sí, está bien, estrictamente igual, solamente cero. ¿Qué valor puede tomar eme?

n	l	m	g
1	0	0	1
2	0	0	4
	1	-1,0,1	
3	0	0	9
	1	-1,0,1	
	2	-2,-1,0,1,2	

n^2

130. A4: Cero.

131. P: Cero. Y nada más. O sea el estado fundamental, el estado de la energía más baja, ¿qué degeneración tiene?

132. A4: Uno.

133. P: Uno. Es decir, hay un solo estado, hay un solo estado con esa energía. Veamos qué pasa para ene igual a dos. ¿Qué valores puede tomar ele? ¿Qué valores puede tomar ele? Cero, o uno. ¿Está bien? ¿Qué valores puede tomar eme? Si ele toma el valor cero, ¿qué valores puede tomar eme?

134. A3: Cero.

135. P: Cero. Si ele vale uno,

136. As: (algunos alumnos contestan pero no se escucha).

137. P: Exacto, menos uno, cero y uno. ¿Cuál es la degeneración? ¿Cuántos estados tengo asociados con el nivel dos?

138. A4: Cuatro.

139. P: Cuatro, exactamente. Fíjense que lo que me indica el grado de degeneración es justamente los valores de eme, la suma de los valores de eme. (Error: Debería haber dicho la cantidad de valores de eme y no la suma). ¿Para tres? Ahora supongamos una regla general. Ele puede

valer cero, uno o dos. ¿Qué valores puede tomar eme? Si ele es cero, eme vale cero, si ele es uno, otra vez, menos uno, cero y uno. Si ele es dos, menos dos, menos uno, cero, uno o dos. ¿Cuánto vale la degeneración?

140. As: 8 o 9.

141. P: Uno, tres, cuatro, más cinco, nueve. Bien, ¿necesito saber más valores para saber cuál es la degeneración de cualquier nivel?

142. A7: Ene cuadrado.

143. P: Ene cuadrado, exactamente, la degeneración vale ene cuadrado. En realidad no necesitamos hacer esto para ver cuál es la degeneración. Uno puede pensarlo, un poco más, digamos, sin hacer una tablita. Fíjense, lo que fija la degeneración son los valores de, la cantidad de valores de eme, ¿está bien?, entonces, siempre uno tiene que tener, para cada valor de ene, ¿cuántos valores de ele tiene? Para un valor de ene, ¿cuántos valores de ele tengo?

144. A7: Dos ele.

145. P: Dos ele más uno, ¿está bien? Tengo el valor cero, y los valores que llegan hasta, contando de a uno, digamos, los valores que llegan hasta ene. Entonces tengo dos ele más un, valores de eme, ahora, ¿cuántos valores de ele tengo? Esto lo tengo que sumar sobre estos dos valores de ele que tengo. ¿Está bien? ¿Cuántos valores de eme tengo? Desde ele igual a cero hasta ene menos uno. Hasta ene menos uno. Bueno, y ahí tenemos la sumatoria. ¿Está bien? Y esta sumatoria, la

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2\,(l+1)$$

$$=2\sum_{l=0}^{n-1} l + \sum_{l=0}^{n-1} 1 = n(n-1)+n = n^2$$

podemos dividir y esto es igual, quedan dos espacios, a dos veces la sumatoria desde ele igual a cero hasta ene menos uno de ele más la sumatoria desde ele igual a cero hasta ene menos uno de uno. Y esto ¿a qué es igual? Esta sumatoria es ene, perdón, es ene por ene menos uno sobre dos que por el dos me queda ene por ene menos uno. ¿Conocen la sumatoria de una serie así de, la suma de, ele cuánto vale, no? Siempre es ele por ele más, o sea es el ¿cómo se llama?, bueno, el límite superior, gracias, el límite superior por el límite superior más uno sobre dos. ¿Está bien? Entonces, acá, empezando de cero o empezando de uno. Empezando de cero, esto igual a cero. Entonces acá tengo: ene por ene menos uno, sobre dos, con este dos, queda ene por ene menos uno. Y esta suma, ¿cuánto vale? Estoy sumando el número uno, ¿cuántas veces?

146. A1: Límite superior...

147. P: No, ene. Porque éste sí lo sumé, entonces, más ene. Y esto es igual a ene cuadrado. Se dice que es una degeneración grande. Fíjense que a medida que aumenta ene, esto se hace, tengo un montón de estados que están relacionados con la energía. Varios son al cuadrado. Se dice que estos estados están fuertemente degenerados. Pero acá tienen dos tipos de degeneración. ¿Está bien? Dos tipos de degeneración. No son dos degeneraciones, hay una degeneración que viene por el lado de ele. ¿Está bien? Es decir, porque para cada valor de ene tengo una cantidad de valores de ele. Y hay otra degeneración que proviene de que, para cada valor de ene, tengo varios valores de eme. (La pronunciación entre ene, eme y ele es confusa). Son dos degeneraciones diferentes. Hay una degeneración que va a aparecer en cualquier problema con simetría esférica. ¿Cuál es?

148. A2: La del eme.

149. P: La de eme, exactamente. La de eme. Por eso esta degeneración se llama esencial. ¿Está bien? En cualquier problema con simetría esférica ustedes van a tener una degeneración que proviene por el lado de eme. Y ahora vamos a expresar qué es lo que significa esto. Entonces ahora, la que viene por el lado de ele se llama accidental. ¿Por qué? Porque esa degeneración apareció, fíjense, cuando resolvimos la ecuación radial. Y la ecuación radial depende del potencial. ¿Está bien? Y el potencial, bueno, en este caso es un potencial de Coulomb pero podría haber sido cualquier otra cosa. Así que es una degeneración que depende del potencial que uno está resolviendo. Por eso es accidental. El caso del potencial de Coulomb, es el que acá tenemos, en otros casos no lo vamos a tener. Y vamos a tener solamente la degeneración esencial. Ahora analicemos un poquito qué significa esa degeneración esencial. Fíjense, eh, proviene de que para cada valor de impulso angular, de modo de impulso angular, tengo diferentes valores de eme. Y eme ¿con quién está relacionado? Con ele zeta. ¿Está bien? Es el autovalor de ele zeta. ¿Y ele zeta quien es? Ele zeta es una componente arbitraria del impulso angular. Para resolver el problema tuvimos que elegir por ele zeta, pero este problema tiene simetría esférica, entonces, zeta, ¿qué dirección del espacio es?

150. A1: Cualquiera.

151. P: Es cualquier dirección del espacio. ¿Está bien? Bueno, entonces, eso ¿cómo lo resolvemos? Bueno, supongamos que yo fijo una dirección como zeta, ¿está bien? Pero si yo fijo, bueno, fijo también un sistema de coordenadas con un L coincidiendo con esa dirección y fijamos zeta, arbitrariamente. ¿Está bien? Y entonces tengo, el vector ele, y la proyección sobre ese eje que es lo que yo llamo ele zeta. ¿Está bien? Pero fíjense lo siguiente: si yo roto mi sistema de coordenadas, si yo roto mi sistema de coordenadas, cambio la proyección del vector ele. ¿Sí? Pero,

¿me cambia algo en el problema? ¿Cambia algo en el problema si yo roto mi sistema de coordenadas?

152. A1: No.

153. P: ¿Por qué no? Porque cualquier dirección del espacio es totalmente equivalente. ¿Está bien? Porque tengo simetría esférica. Entonces, al rotar mi sistema de coordenadas, estoy cambiando la proyección del vector ele. ¿Sí? Estoy cambiando el valor de ele zeta, estoy cambiando el… y el problema no me va a cambiar. ¿Está bien? Entonces, está bien que la energía no dependa de que yo rote mi sistema de coordenadas. ¿Se entiende este tema? ¿Sí? Entonces, por eso, en cualquier problema con simetría esférica, aparece esta degeneración esencial. ¿Está bien? Porque no depende de qué es lo que yo llamo zeta en... ¿De acuerdo? Vamos a analizar un poquito en los últimos minutos que quedan, eh, las funciones de onda. [Borra el pizarrón] Bien, eh… Ah, una cosa importante para mí es la notación que uno usa con esto. Fíjense, las funciones de onda dependen de estos tres números cuánticos. ¿Está bien? Y en general unos puede rotularlos así psi sub ene, ele, eme. Sin embargo, la gente que trabaja con estas cosas, en general por ejemplo los espectroscopistas, los químicos, gente que hace molecular, gente que hace atómica, etc., etc., rotula a estos estados de acuerdo, dándole digamos, dándole un cierto nombre, dependiendo del valor de ele. ¿Está bien?

Entonces, a los estados con valor de ele igual a cero, ¿sí?, los llama estados ese, notación, simplemente. A los estados con ele igual a uno, los llama estados pe, a los estados con ele igual 2 los llama estados ce, ¿sí?, tres son efe, y así sucesivamente. A partir de acá, g, etcétera. ¿Está bien? Y entonces la notación es la siguiente: hay un primer número que indica el número cuántico ene, que es lo que me indica el nivel de energía. Después viene la letra que corresponde al ele y acá como un subíndice, el eme. ¿Está bien? Entonces, por ejemplo, tengo el estado: uno ese y en realidad acá no hace falta poner el eme igual a cero porque para un estado ese que tiene ele igual a cero, el eme seguro es cero.

l 0 1 2 3 4

s p d f g…

nl_m 1_s 2_{po}

Así que sería importante para algún sector. Para un estado pe, ahí sí, voy a tener por ejemplo el estado, no puedo tener un estado uno pe, porque digamos, con ene igual a uno, solamente tengo ele igual a cero, así que tendría dos pe cero, uno o menos uno, pongamos, dos pe cero. Y así sucesivamente. ¿Ven? Y esa es la notación que se usa en general, que ustedes van a encontrar, que usan los espectroscopistas, los químicos, los moleculares, los atómicos, etc. En realidad nuestra pequeña modificación respecto de esto, pero eso lo vamos a ver después. Vamos a pensar un poquito la función de onda radial, la parte angular ya la estuvimos viendo la pinta que tenía la clase pasada. Pero vamos a ver un poquito la función de onda radial. [Borra el pizarrón] Y con eso terminamos. Bien, eh, fíjense, vamos a analizar, vamos a analizar la función de onda, esas funciones de onda radiales que se encuentran en todos los libros. ¿Está bien? Yo ahora les voy a dar la lista que tienen, la vez que viene, si quieren, armamos una lista, pero el tema es así, fíjense, pensemos en las funciones de onda con cualquier ¿p? y con ene igual a cero. Vamos a hacer una distinción entre las que tienen ene igual a cero y las que tienen ene distinto de cero. ¿Por qué? Porque fíjense, aquéllas que tiene ene igual a cero, están viendo ¿qué tipo de potencial? ¿Se acuerdan? Recién dibujamos un potencial que era, un potencial efectivo, que tenía una barrera centrífuga y la parte de Coulomb. ¿Está bien? Pero si ene es cero, ¿qué pasa con la barrera centrífuga?

154. A4: Se va.

155. P: Vale cero. ¿Está bien? Se va. Y solamente tenemos el potencial de Coulomb. Y eso marca una diferencia fundamental, ¿cuál es? Clásicamente, ¿qué pasa? La partícula, si tiene ene igual a cero, puede pasar por el centro de momentos, ¿sí?, en cambio si tiene ene distinto de cero, la barrera

centrífuga se deprime, no puede llegar al centro de momentos. ¿Está bien? Clásicamente pasa una cosa similar. Cuánticamente pasa una cosa similar.

Las funciones de onda, tienen esta pinta. Voy a hacer, bueno, aquí tienen una función de onda, en este caso. No, vamos a dibujarlo poniéndolo con el potencial como hacemos siempre. Recuerden que hago un doble gráfico, éste de las ordenadas representa, por un lado, potencial y por otro lado, función de onda, ¿de acuerdo? Entonces, vamos a dibujar el potencial que corresponde a tener ene igual a cero, tendríamos algo como esto. Bien, entonces tenemos, por ejemplo, para ele igual a uno, para ele igual a uno, tendríamos una función de onda radial, que tiene esta pinta, que solamente es una exponencial decreciente.

R_{10}

Esto sería la erre uno cero. Para ele, para ele igual a dos, la voy a poner más arriba, tengo una función de onda que también tiene esta pinta pero tiene un cierto, un nodo, luego tiene una especie de montañita y luego decrece exponencialmente como la otra. ¿Está bien? Y a medida que van aumentando, el número ene, el número cuántico principal o sea van creciendo en energía, tienen esta pinta, siempre tienen una especie de decrecimiento exponencial que, cerca del origen, que tienen cada vez más nodos, van aumentando el número de nodos. ¿Está bien? Ahora, ¿no nos falta nada demostrar acá? Lo que estoy dibujando ahí es la densidad de probabilidad, en realidad, ¿está bien? Porque si no, los lóbulos pueden ir para abajo vamos a hacerlo algo al cuadrado. ¿Qué pasa con la densidad de probabilidad cerca del origen?

156. A3: Es grande.

157. P: Es grande, es muy grande. Pero, ¿quién está en el origen?

158. A: (Un alumno dice algo que no se escucha).

159. P: Y eso ¿qué significa?

160. A: (Algunos alumnos dicen cosas que no se escuchan).

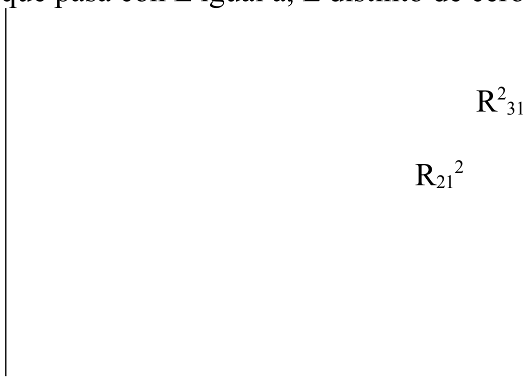
161. P: ¿Qué significa? Que el electrón tiene probabilidad no nula de encontrarse ¿dónde? en la posición del núcleo. ¿Está bien? Y esto es así para los estados tipo ese, justamente, con ele igual a cero, para los estados tipo ese, el electrón tiene probabilidad no nula de estar en la posición del núcleo. Eh, recuerden que la probabilidad nunca se tiene para un punto, nunca se mide para un punto, sino que siempre se toma un pequeño intervalo. ¿Está bien? Pero el tema es que efectivamente eso es así y hay propiedades, propiedades físicas, tanto de los átomos como de las moléculas, que justamente se basan en ese contacto íntimo que explicamos, que puede tener el electrón en la posición del núcleo. Así que bueno, eso efectivamente, es así. Sin embargo, tenemos que tener en cuenta una cosa, fíjense, eh, hemos hecho una aproximación en todo este tratamiento. ¿Cuál es? ¿Qué estamos considerando? Estamos considerando…

162. A4: Partículas puntuales.

163. P: Partículas puntuales. En realidad el núcleo no es puntual, y al considerarlo puntual, despreciamos lo que podría ser un potencial dentro del núcleo. ¿Está bien? La gente que hace nuclear, la gente que hace nuclear, modela ese potencial, que recuerden que es una especie de, es un pozo de potencial con una barrera, eh, modela este potencial, pero de todas maneras, aún considerando un potencial de ese tipo, o sea considerando realmente que el núcleo tiene

dimensiones finitas, uno tiene probabilidad muy importante de que el electrón se encuentre en la posición del núcleo. ¿Ven? Así que bueno, no es un resultado debido a nuestra aproximación sino que es realmente un resultado correcto. Bien, ¿qué pasa con L igual a, L distinto de cero?

Entonces, en ese caso, uno tiene algo así. Solamente dibujo acá abajo. Uno tiene un potencial que tiene esta pinta. ¿Sí? Y entonces, acá, la barrera centrífuga impide que el electrón pueda llegar al núcleo. O sea solamente eso pasa para los estados tipo ese. Para estados ya tipo pe, de, etcétera, etcétera, uno tiene funciones de onda o densidades de probabilidad que tienden a cero, o sea son cero, en la posición del núcleo.



Y entonces, por ejemplo, la primera, es un estado que tiene más o menos esta pinta. ¿Está bien? Esto correspondería a una erre dos uno al cuadrado. O sea es un estado pe del nivel dos. ¿Será simétrica esta densidad de probabilidad?

164. As: No.

165. P: No, ¿por qué no es simétrica? Porque el potencial no es simétrico. ¿Está bien? Acá tiende a cero y acá va tendiendo a asintótica. Después, a medida que uno va aumentando, en energía, uno tiene este tipo de, estos lóbulos, pero, cada vez más, tiene más ceros, y por ejemplo, uno tiene algo como esto. El siguiente valor. Esto sería el erre tres uno al cuadrado y así sucesivamente. Ya estas colitas fuera del potencial, del pozo del potencial no nos asustan, ¿a qué se deben?

166. A6: Al principio de incerteza.

167. P: Al principio de incerteza. ¿Está bien? Es decir, tener probabilidad no nula fuera de las zonas clásicamente prohibidas, ya es cosa de todos los días. No nos afecta para nada. Ya estamos curados, espero. Pero es un resultado que se debe al principio de incerteza. Bueno, vamos a dejar acá. La vez que viene vamos a analizarlo todo en su conjunto, es decir, juntando también con la parte angular ¿está bien? Y entonces, esa densidad de probabilidad conjunta, es lo que vamos a llamar ¿qué? ¿Cómo la llamamos? La densidad de probabilidad de encontrar al electrón en ciertas zonas del espacio, que tiene cierta energía, ¿está bien? ¿Cómo se llama eso? ¿Los?

168. A7: Orbitales.

169. P: Los orbitales. Sí, vamos a encontrar la pinta que tienen los orbitales. Les dejo una pregunta: esa densidad de probabilidad, ¿qué tipo de simetría tendría que tener?

170. A7: r z.

171. P: ¿Cómo?

172. A: (Un alumno dice algo que no se escucha).

173. P: Digamos, la pinta del orbital justamente, va ser la que da los psi sub ene ele al cuadrado porque ésta justamente depende de erre y me va a decir cómo va decreciendo en erre. ¿Está bien? Pero justamente, los psi sub ene ele al cuadrado, nos da unas figuras de revolución alrededor del eje zeta. ¿Y eso está bien para este problema? ¿Qué tipo de simetría tiene que tener la densidad de probabilidad?

174. A1: Esférica.

175. P: ¡Esférica! ¿Entonces? En este redondel, figuras de revolución salen debido a que usamos L zeta. ¿Y entonces?

176. A1: No sabes quién es L zeta.

177. P: Claro, no sabemos cuál es ele zeta, pero igual con figuras de revolución se podría decir algo, que en alguna dirección debe estar. ¿Estará normal? Esperemos que no.

178. A: [No se escucha]

179. P: Ya vamos a hablar de lo que pasa. Justamente el hecho de que exista degeneración, vamos a ver que justamente, nos da el resultado correcto. Bien, dejemos acá, esto. De todas maneras, piénsenlo un poquito y bueno, vemos qué pasa la vez que viene.