

La escritura en los procedimientos de resolución de problemas de suma y resta: un proceso constructivo

Susana Wolman*

1. Introducción

En este trabajo se analiza el papel que juega la escritura en los procedimientos que despliegan alumnos para resolver sumas y restas. Referimos para ello a una investigación didáctica¹ en la que se estudiaron intervenciones docentes y su incidencia en la adquisición y el progreso de procedimientos numéricos puestos en acción para resolver problemas aditivos con niños de primer grado de escuela primaria.

El conjunto de situaciones de este estudio contempla que los alumnos resuelvan de manera autónoma problemas de suma y resta, *anoten* cómo los pensaron y en un momento posterior a cada resolución –guiados por su docente– reflexionen sobre las distintas soluciones encontradas y los medios empleados que permitieron desplegarlas.

El objetivo del pedido de anotar radica en promover que los niños expliciten sus procedimientos a través de la utilización de sus propios modos de representación gráfica y puedan recordar lo realizado en el momento de la puesta en común, posterior al de la resolución. El pedido de anotar las resoluciones intenta que los modos de pensar de los niños se exterioricen, en principio como una expresión no pública, destinada al mismo autor y al docente.

2. Antecedentes

En la práctica escolar se reconoce –y así lo señala un amplio abanico de investigaciones– que los niños no comprenden los fundamentos de los métodos clásicos para obtener el resultado de las operaciones enseñados en la

* Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA), licenciada en Psicología (UBA) y Magíster en Didáctica (UBA). Docente de Psicología y Epistemología Genética. Facultad de Psicología y Ciencias de la Educación (UBA). Codirectora de Proyectos UBACyT sobre la adquisición infantil del Sistema de Numeración.

1 Se trata de la Tesis de Maestría en Didáctica de la autora "Las intervenciones docentes y su incidencia en la adquisición y el progreso de procedimientos numéricos no convencionales empleados por los niños en la resolución de situaciones de suma y resta en primer grado" dirigida por la Lic. Delia Lerner. Facultad de Filosofía y Letras (UBA).

escuela. (Kamii, 1985; Lerner, 1992a; Ginsburg, 1989; Resnick y Ford, 1990; Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1996; Brissiaud, 1993).

La enseñanza habitual del sistema de numeración (SN) y de los algoritmos clásicos correspondientes a las operaciones aritméticas en los primeros años no facilita que los alumnos comprendan las razones de los pasos que se siguen para obtener el resultado. En efecto, los errores que cometen los niños al resolver algoritmos² o las explicaciones que brindan acerca de los procedimientos empleados incluso cuando obtienen el resultado correcto –fundamentalmente en las famosas cuentas de “llevarse o pedir prestado”– testimonian la dificultad de los alumnos para comprender que dichas reglas están íntimamente relacionadas con los principios de nuestro sistema de numeración. (Lerner 1992b; Lerner, Sadovsky y colab. Wolman, 1994; Wolman, 1999; Quaranta y Wolman, 2000).

La investigación de la que se desprende este artículo se aboca al estudio de un proyecto de enseñanza y surge a su vez de otra investigación (Lerner *et al.*, 1994) –marco de esta– que estudia una manera diferente de la usual de abordar la enseñanza del sistema de numeración y de las operaciones y que se caracteriza en términos muy generales por las siguientes notas centrales:

Se propone que los alumnos participen en situaciones didácticas donde se use la numeración escrita sin dosificaciones y sin utilizar recursos mediatizadores de los distintos agrupamientos; es decir, se propone la interacción con el objeto de conocimiento en toda su complejidad. Usar la numeración significa proponer problemas en los cuales los alumnos tengan que producir e interpretar escrituras numéricas, así como compararlas, ordenarlas y operar con ellas para resolver diferentes problemas. De esta manera los alumnos –lo hemos verificado– detectan regularidades y llegan a desentrañar aquello que la numeración escrita –menos transparente que la numeración hablada por ser posicional– no muestra. Desde esta perspectiva, un principio didáctico que guía la enseñanza ha sido formulado como del uso a la conceptualización: el punto de partida del trabajo didáctico es el uso de la numeración escrita, procurando que las situaciones didácticas generen condiciones para la elaboración de las conceptualizaciones que subyacen a una utilización cada vez más efectiva, y esperando que por sucesivas aproximaciones se llegue a la comprensión del principio posicional del sistema (Terigi, Quaranta, Wolman, 1999; Wolman, 2000; Lerner, 2005).

Con respecto a la enseñanza de las operaciones se propone que los alumnos resuelvan situaciones problemáticas de suma y resta sin haberles mostrado previamente algún método de resolución. Ya afirmábamos en 1994 que: “cuando los chicos se enfrentan a situaciones problemáticas, generan –además de estrategias propias para resolverlas– procedimientos originales para

2 Existe una amplia literatura en la que se ilustran los diferentes errores en la ejecución de los algoritmos clásicos. Véase, entre otros, Dikson, Brown y Gibson, 1991; Resnick y Ford, 1990; Baroody, 1988.

encontrar los resultados de las operaciones involucradas, procedimientos que están vinculados a la organización del sistema de numeración decimal” (Lerner, *et al.*, 1994). Los procedimientos numéricos que los niños utilizan para resolverlas ponen en juego el conocimiento que ellos están construyendo acerca del SN, facilitando de esta manera el establecimiento de los vínculos que existen entre este y sus procedimientos de resolución.

Las reflexiones sobre el lugar de la escritura de los procedimientos –de las que nos ocuparemos aquí– surgen entonces del estudio del proyecto de enseñanza en lo que se refiere a los procedimientos numéricos puestos en acción por los alumnos para resolver operaciones aditivas. Partimos del momento en que se comienza a enfrentar a los niños con adiciones y sustracciones con números de dos cifras, lo que nos permite estudiar el principio de esta historia.

3. Los procedimientos de resolución y su escritura: para qué, cuándo y cómo pedirles que anoten

En todas las situaciones de la investigación en las que se planteaba un problema,³ tanto de suma como de resta, las maestras indicaban a los alumnos que, además de intentar resolverlo de la manera en que ellos pudieran hacerlo, anotaran en un papel cómo lo habían pensado. La utilización del término “anotar” permitía albergar cualquier graficación que los alumnos realizaran sobre el papel.⁴

Pedirles a los niños que anoten es una intervención fundada en la *función mnémica de la escritura* y que –en nuestro caso– les permite guardar las marcas de lo realizado y así “recordar” sus propias formulaciones y evocarlas en otros momentos sin modificaciones ni olvidos. Cuando se explicitan y comunican a otros –compañeros y maestros– los caminos seguidos para obtener el resultado

3 El tipo de problemas que se plantea a los alumnos corresponde a la segunda categoría que conforman las “estructuras aditivas” estudiadas por Gerard Vergnaud (1991). Dentro de esta categoría, se distinguen diferentes problemas según el lugar en que se ubique la incógnita. El problema elegido es el que se conoce como un estado inicial, se plantea una transformación que puede ser negativa o positiva (en este estudio corresponden las dos) y la incógnita recae en el estado final. “En esta caja hay 24 fichas, le agrego 16, ¿cuántas fichas hay en total?”. Hasta el momento en que se inicia esta secuencia, los alumnos habían resuelto este tipo de problemas con números más pequeños a través del conteo o del sobreconteo. El manejo por parte de los niños de este modo de resolución es una condición para el desarrollo de la secuencia. Anticipamos entonces que plantear a los alumnos –que ya contaban con este procedimiento de base– problemas con números altos y continuar aumentándolos sucesivamente permitiría que desplegaran otros caminos de resolución, superadores del conteo. La *magnitud de los números* constituye así una variable didáctica de la situación sobre la que hemos elegido intervenir para incitar a los alumnos a elaborar procedimientos nuevos. Los términos de las sumas y de las restas son mayores de diez y requieren para operar –de acuerdo con el algoritmo clásico y tal como se denomina en la cultura escolar– “llevar y pedir prestado”.

4 La escritura de los números y los signos de las operaciones como +, – e = ya estaba instalada en los grupos para el planteo de cálculos aunque, como veremos, no siempre fue utilizada por los alumnos en sus producciones; también aparecieron algunos números invertidos o la escritura solo de algunos de los signos formando parte de las anotaciones.

la escritura funciona como apoyatura para la comunicación ya que sobre ella se realizan los intercambios, abriendo de esta manera la posibilidad de volver sobre las anotaciones, analizarlas y comparar los distintos modos de resolución y de representación del proceso seguido en la búsqueda de la solución.

El papel que juegan las anotaciones fue abordado anteriormente desde la línea de la Psicología Genética que investiga sobre los procedimientos de resolución de problemas, y si bien no realizaron un estudio en profundidad de este tema, Inhelder y Caprona (1999: 21) afirman que la anotación se convierte en “*object to think with*”. “El aspecto instrumental –dicen los autores– de las diversas representaciones de naturaleza simbólica desempeña un papel particularmente importante en tanto “objetos para pensar”.

La escritura cumple también una importante *función epistemológica*: no solo ayuda a recordar y comunicar lo pensado, sino que también engendra nuevas posibilidades cognitivas. (Martí y Pozo, 2000) Esta afirmación es válida tanto en el desarrollo de la disciplina misma –el desarrollo de la matemática está estrechamente vinculado con la escritura (Catach, 1996; Duval, 2000; Martí, 2000)– como en el proceso de aprendizaje. En efecto, las anotaciones que realizan los niños permiten que se exterioricen los modos de resolver, se objetiven (expresión privada, independiente de su comunicación) permitiendo a los alumnos pensar sobre sus conocimientos. La explicitación del modo de resolución, en este caso por escrito, los ayuda en el proceso de toma de conciencia de los procedimientos que emplean.

Ahora bien, no esperamos que los niños por sí mismos, sin mediar algún tipo de intervención, realicen anotaciones *específicamente aritméticas* desde el inicio. Cuando comienza este estudio, los alumnos ya escribían cálculos de manera aritmética, como por ejemplo: $5 + 4 = 9$. Sin embargo, hasta el momento en que se inicia esta secuencia no habían tenido necesidad, para resolver una operación, de anotar cálculos parciales en base a diferentes descomposiciones de los números. El momento oportuno para *aprender a escribir aritméticamente* todos los pasos que siguen está señalado por el despliegue de algún procedimiento basado en la descomposición decimal de los números.⁵ Es en ese momento que las docentes “traducen” en escritura aritmética aquello que los niños expresan; esta intervención apunta a tender un puente entre lo que los alumnos están pensando y la representación convencional. En ese sentido, la enseñanza de la escritura de los cálculos no es una imposición externa, que puede no tener significado, sino un medio de representación aritmética que coincide con lo desplegado por los alumnos y brinda la oportunidad de ir aprendiendo la representación matemática.

Pedirles que escriban y que interpreten producciones de sus compañeros ofrece entonces –y específicamente frente a los procedimientos de cálculo– la posibilidad de convertir las escrituras aritméticas en objeto de enseñanza.

5 Aunque no logren anotarlos o lo hagan utilizando palabras.

Son estas las razones por las que propiciamos que los alumnos produzcan anotaciones de sus procedimientos y que los maestros ofrezcan el modelo de la escritura aritmética en correspondencia con lo expresado por ellos.

Hemos establecido, entonces, dos intervenciones docentes fundamentales con respecto a la escritura: solicitar a todos los alumnos que anoten –pedido que se reiteraba en todas las actividades como parte de la consigna– y “traducir” en escritura aritmética solo aquellos procedimientos de los niños que involucran la descomposición decimal. Estos procedimientos son detectados por el maestro ya sea cuando los niños los anotan con palabras o cuando los explicitan oralmente. En estos casos la escritura aritmética que la maestra realiza y muestra se corresponde con lo explicitado, sea oralmente o por escrito.

4. Las escrituras de los niños y sus funciones

Aclaremos ante todo que los procedimientos de resolución empleados por los niños y sus anotaciones no siempre mantienen una correspondencia estricta y, por lo tanto, sus producciones escritas no siempre nos proporcionan el acceso al procedimiento efectivamente utilizado. Si bien en algunos casos las producciones infantiles nos permiten de alguna manera identificar un procedimiento, en otros encontramos anotaciones en las que es difícil o imposible hacerlo: solo indican el cálculo que anuncia la operación con la que se resuelve el problema y el resultado, –con el agregado o no de alguna explicación de los medios empleados– sin dar cuenta de cómo lo resolvieron.

En el conjunto de las producciones infantiles encontramos una gran variedad. Algunas incluyen solo “leyendas” como por ejemplo: “Lo pensé con los dedos”, “Lo hice con los lápices”, “Yo me puse uno de los 25 en la cabeza y conté 25 con los dedos” y en general estas se presentaron en los primeros problemas, tanto de suma como de resta, aunque en este último caso en menor cantidad. Otras producciones son aquellas en las que se puede identificar con seguridad el empleo del conteo: cuando realizan marcas gráficas en correspondencia biunívoca con las cantidades a sumar o restar.

Cuando los alumnos emplean un procedimiento de cálculo a través de la descomposición decimal de los números, este puede ser expresado en sus hojas empleando palabras y números. Las producciones que permiten inferir claramente un procedimiento de cálculo escrito aritméticamente presentan una gran variedad que hemos agrupado según indiquen:

- descomposición de las decenas de los números de ambos términos en los dieces que lo constituyen;
- descomposición en dieces de solo uno de los términos;
- descomposición decimal en los nudos de las decenas y unidades y cálculos parciales
- descomposición en decenas y unidades, pero cuya solución consiste en tratar las cifras de las decenas como si fueran unidades.

Estas anotaciones presentan diferencias –que iremos señalando a lo largo de este artículo– según se trate de resolver sumas o restas.

Ahora bien, esta variedad significa también que la escritura del modo de resolución cumple diferentes funciones para los niños, incluso para un mismo niño en distintos momentos. En lo que sigue, analizaremos las producciones considerando la función que en ellas cumple la escritura desde la perspectiva de los niños. En este sentido, distinguimos producciones en las que *la escritura es necesaria y funciona como sostén para el despliegue del procedimiento*; otras, en las que *si bien no se puede establecer estrictamente si la escritura es o no un soporte necesario para el despliegue del procedimiento, permite controlar los pasos seguidos y el resultado obtenido y, finalmente, otras producciones en las que la escritura cumple solo una función comunicativa, relato de lo realizado*.

4.1. Producciones en las que las anotaciones son un sostén necesario para el despliegue del procedimiento

Algunas producciones de los niños nos indican que las marcas que realizaron en sus hojas fueron para ellos necesarias como apoyatura para encontrar la solución. Dentro de este grupo incluimos tanto aquellas que dan cuenta de que el procedimiento empleado es el conteo o el sobreconteo como aquellas que dan cuenta del despliegue de algún procedimiento de cálculo. En este sentido distinguimos:

a) Con respecto al conteo y el sobreconteo:

Las producciones incluyen *marcas gráficas* que representan los elementos de las cantidades en juego. Los niños realizan una correspondencia término a término entre las marcas – abstractas o similares a los objetos utilizados en el enunciado del problema – y cada uno de los elementos de las cantidades. Estas anotaciones, además de testimoniar el procedimiento empleado para resolver el problema, tienen el valor de *funcionar como sostén para las acciones desplegadas: los niños se apoyan en las marcas que realizan en el papel para desplegar sus acciones de conteo o sobreconteo e incluso, en algunos casos, para controlarlo*. Este tipo de producción apareció frente a los primeros problemas de suma: allí los niños *recurrieron a la representación de las cantidades para resolver el problema*. También producciones de este tipo son las que realizan muchos alumnos en el primer problema de resta, por ejemplo para $36 - 17$, dibujan 36 marcas y tachan, marcan o borran 17 de ellas. Hacer una marca por cada elemento es una manera de representar las cantidades *que les permite tener presente la cantidad de elementos y efectuar el conteo “sin perderse”*, sobre todo cuando las cantidades a sumar o restar son mayores que diez. Utilizar marcas parecería asegurarles un control mayor del proceso.

Sin embargo, dibujar palitos o cualquier otro elemento que permita superar la dificultad que presenta utilizar los dedos puede ser a la vez un proceso complicado, sobre todo en el caso de la suma, ya que deben controlar la cantidad de rayitas que dibujan para representar las cantidades de los dos términos de la suma. Tal es la dificultad de emplear este recurso que algunos chicos abandonan el intento sin lograrlo. *Esta dificultad no aparece en el caso de la resta, porque obviamente alcanza con dibujar solo marcas correspondientes a la cantidad del minuendo para luego tachar o borrar las que corresponden al sustraendo.*

Algunos chicos optan por “especializar las marcas” –especialmente en el segundo problema planteado que involucra la suma de “dobles” como $25 + 25$ – dibujando 25 rayitas y debajo otras 25, lo que les permite un mayor control sobre ellas. Otros alumnos, considerando la reiteración de los números que hay que sumar en este problema, eligen dibujar solo 25 palitos y contarlos dos veces o sobrecontar a partir de 25.

En general, las anotaciones infantiles en las que se observan marcas gráficas que representan la cantidad de uno o ambos términos de la suma, o en el caso de la resta, la representación de los elementos correspondientes al minuendo y tachados los del sustraendo –aunque bien puede pensarse que surgen de la demanda del docente de “anotar”– *son útiles y en cierto sentido necesarias para sus autores porque funcionan como sostén sobre el cual efectúan el conteo. Son un testimonio de su procedimiento pero también un medio –y en algunos casos, por cierto bien eficaz – para desplegarlo sin recurrir al material concreto.*

b) Con respecto a los procedimientos de cálculo que emplean la descomposición decimal.

Las producciones infantiles que manifiestan algún procedimiento de resolución basado en la descomposición aditiva de los números involucrados presentan una gran variedad a lo largo de la secuencia que depende tanto del dominio de los autores sobre los aspectos numéricos como de la magnitud de los números en juego. Cuando los niños descomponen la cifra correspondiente a las decenas de ambos términos de una suma en los dieces que lo constituyen, la escritura de los dieces y las unidades es, para algunos niños, absolutamente necesaria como sostén para lograr el resultado. Veamos un ejemplo.

$54 + 36 = 90$	
$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 6 \\ 90 \end{array}$

La primera vez que Juli emplea la descomposición decimal de los números a sumar anota debajo de 54 cinco dieces y un 4 y debajo de 36 tres dieces y un seis. Como puede advertirse, no lo anota en forma de cálculo sino en forma vertical y es correcta la descomposición decimal de los números que tiene que sumar en todos los dieces y en las unidades que lo forman. Con este tipo de anotación se obtiene el resultado contando de diez en diez y luego las unidades. Este tipo de producciones son las que realizan –aunque no exclusivamente– alumnos que recientemente dejaron atrás el conteo.

En términos generales, escribir la descomposición en dieces de los dos sumandos para resolver sumas, más allá de la demanda del maestro de “anotar” cómo lo pensaron, se torna necesario para obtener el resultado. Para quienes emplean este procedimiento para la suma, esta escritura –sobre todo en los momentos iniciales– es necesaria en tanto sostén de las acciones de descomponer decimalmente un número y un medio de control para hacer corresponder la descomposición que efectúan con el número del que surge: a medida que van escribiendo los dieces, van monitoreando su adecuación al número del que se trata. Al mismo tiempo es la marca estable sobre la cual se aplica el conteo de diez en diez. Por este motivo creemos que la escritura es en estos casos necesaria para resolver las operaciones al mismo tiempo que –por el monitoreo que algunos alumnos realizan sobre sus escrituras– les permite avanzar en el conocimiento acerca de la organización aditiva de los números.

Ahora bien, cuando este tipo de anotación se quiere generalizar para la resta se presentan dificultades, ya que la escritura de este procedimiento no es efectiva ni facilitadora como en el caso de la suma –en el cual una vez realizada la descomposición basta luego sumar todos los números que resultan –lo que puede hacerse en cualquier orden– sino todo lo contrario.

4. 2. Producciones en las que la escritura puede o no ser necesaria pero funciona principalmente como un medio de control

A lo largo de la secuencia, y específicamente cuando los niños ya emplean procedimientos de cálculo y logran aproximarse a la formulación aritmética de los mismos, la escritura de las descomposiciones decimales puede o no ser una necesidad para obtener el resultado; esto depende de la magnitud de los números y del dominio de los alumnos sobre ellos. Pero la escritura que realizan les permite controlar tanto las descomposiciones decimales como los cálculos parciales que efectúan.

Un ejemplo de estas anotaciones lo constituyen los procedimientos de cálculo en los que se desarma solo uno de los términos para ir adicionándolo al primero y es el que más aparece en las producciones de los alumnos para resolver los *problemas de resta*.

Si bien mayoritariamente eligen comenzar restando el diez o los dieces que conforman el sustraendo, encontramos algunas escrituras que dan cuenta de que comenzaron restando las unidades. Por ejemplo para $36 - 17$ podemos leer $36 - 17 = 29$ y debajo $29 - 10$, o alternar entre los dieces que componen el sustraendo y las unidades del mismo, así para $44 - 26$, por ejemplo, restar primero un diez, luego el seis y finalmente otro diez. Considerar la composición aditiva decimal del sustraendo permite restar los números que resultan en cualquier orden y puede hacerse justamente *porque la escritura permite controlar la resta* de todos los números que surgen de la descomposición al mismo tiempo que se realizan las restas parciales.

¿Es necesaria la escritura para quienes desarman el número de uno de los términos en los dieces que lo forman? Como sucede muchas veces, la respuesta a esta pregunta no es absoluta, depende del mayor o menor dominio de los sujetos para hacerlo y de la magnitud de los números involucrados en el problema. Es cierto que como el pedido de anotar parte del maestro, algunos niños realizan anotaciones para comunicar el procedimiento empleado pero podían haberlo resuelto sin anotar. Sea o no necesaria, cuando los niños desarman uno de los términos en los dieces y las unidades es por medio de la escritura de los dieces que tienen que *agregar o sacar -y de los cálculos intermedios- que pueden ir controlando cuántos ya agregaron o sacaron y cuántos aún les falta agregar o sacar*. Algunos niños, en estos casos, hasta llegan a anotar la composición aditiva del sustraendo en un costado de su hoja.

Ahora bien, al enumerar los procedimientos de cálculo que implican la descomposición decimal, hemos mencionado que algunos niños dan cuenta en sus producciones de la descomposición decimal de ambos términos en los nudos de las decenas y las unidades que componen los números. Estos procedimientos y su escritura comportan diferencias importantes según tengan que sumar o restar. Comencemos por los de suma.

Facundo, para resolver $31 + 32^6$ escribe:

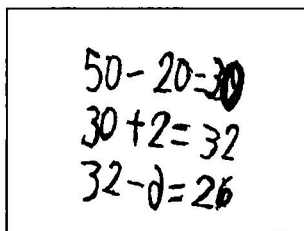
$$\begin{array}{l}
 31 + 32 = 63 \\
 30 + 30 = 60 \\
 1 + 2 = 3 \\
 31 + 32 = 63
 \end{array}$$

6 Este no es un cálculo, no surge de un problema planteado por el maestro sino de uno que los alumnos inventaron, es por esta razón que no involucra el "llevarse".

Facundo separa, como primer paso, los nudos de las decenas de las unidades de los números que tiene que sumar pero, a pesar de indicar cálculos parciales y de colocar el resultado correcto, la escritura no testimonia la manera en la que resolvió la suma de $30 + 30$ para obtener el resultado. La suma de $30 + 30$ puede realizarse de varias maneras: agregar tres dieces a treinta contando de diez en diez, o pensar: “como tres más tres es seis, entonces treinta más treinta es sesenta”.

¿Qué aporta la escritura en estos casos? Es claro que para resolver $30 + 30$ Facundo pudo haber adoptado algunas de las maneras descritas, es decir, la escritura no fue necesaria para obtener el resultado, pero anotar es una manera de controlar lo que va haciendo, de no perderse en el proceso, de testimoniar las descomposiciones aditivas que realiza y de considerarlas mientras opera. Esta escritura aritmética le permite avanzar en la toma de conciencia de la composición aditiva de los números: escribir el treinta sin descomponerlo en los dieces le ayuda a controlar el procedimiento, aunque sume de a diez para adicionar 30 al primer 30 tal como él mismo lo manifestó durante la puesta en común.

En el caso de las *restas* desarmar en los nudos de las decenas y las unidades tiene ciertas restricciones. Cuando las unidades del sustraendo son mayores que las del minuendo (por ejemplo, $36 - 17$) si se escribe la descomposición de los números en los nudos de las decenas y unidades –y con estos números se intenta operar aplicando un procedimiento exitoso para la suma consistente en sumar primero los nudos de las decenas y luego las unidades– surgen nuevos problemas: aceptar que algunas unidades deberán sumarse en el desarrollo de una resta. Parece aceptarse en producciones como la siguiente realizada para resolver $52 - 26$



A rectangular box containing three lines of handwritten mathematical work. The first line is $50 - 20 = 30$. The second line is $30 + 2 = 32$. The third line is $32 - 6 = 26$. The numbers are written in a simple, slightly slanted cursive style.

Los niños que realizan producciones como esta consideran que el dos que suman corresponde a las unidades del número del minuendo, que separaron momentáneamente de las decenas para facilitar el cálculo. Son, además, testimonio de que aceptan que los cálculos parciales de una resta pueden incluir alguna suma. *La escritura probablemente no sea en sí misma necesaria como sostén para desplegar el procedimiento pero sin duda les permite visualizar rápidamente el proceso que están realizando y no olvidar considerar de dónde surgen los números que separaron a los fines de operar.*

4. 3. Producciones en las que la escritura cumple solo una función comunicativa

En muchas producciones de los niños predomina una función comunicativa: los alumnos anotan como respuesta a la demanda de las maestras pero la escritura que realizan no sería necesaria para ellos como medio de encontrar la solución; es decir, no es la notación lo que les permite llegar al resultado. Las producciones escritas que comparten esta característica no se refieren a un tipo de procedimiento en especial: abarcan distintos modos de resolver el problema por parte de los alumnos. Sin embargo, desde el punto de vista del proceso de aprendizaje, el hecho de anotar, aunque solo consista en relatar lo realizado o los medios empleados, requiere en cierta medida *volver a pensar sobre el modo de obtener el resultado* y, en algunos casos, involucra un comienzo del proceso de toma de conciencia del camino desplegado al objetivar la acción desarrollada.

Como lo hemos mencionado ya, muchas producciones de los niños incluyen solo *leyendas*: "Lo pensé con la cabeza", "Lo hice con los dedos", "Lo pensé con los dedos", "Yo conté para atrás", escritas de la manera en que podían hacerlo de acuerdo con diferentes hipótesis de escritura. Estas leyendas son las que se presentaron en las producciones de los niños, especialmente en las primeras situaciones propuestas de suma y de resta.

Cuando los niños afirman en sus producciones que utilizaron sus dedos, puede suponerse el empleo del conteo de uno en uno de los elementos como medio de resolución; sin embargo, esta sola afirmación no da cuenta de si utilizaron un procedimiento de conteo, de sobreconteo o incluso alguno que involucre la descomposición decimal en la que los dedos son una ayuda para contar dieces.

Otras escrituras, en cambio, permiten inferir claramente que sus autores realizaron un *sobreconteo* para resolver las sumas. Por ejemplo Melina escribe en el borde superior de su hoja el cálculo a resolver y aclara: "Primero me puse 26 en la cabeza y después *seguí contando* hasta 14 y me dio 40". Sin embargo, aun cuando podemos interpretar que utilizaron un procedimiento basado en el sobreconteo, este relato y otros semejantes no son suficientes para saber *cómo hicieron para agregar o quitar la cantidad que debían sumar o restar*, especialmente con estas cantidades que superan diez.⁷ Frente a estas producciones las maestras intervienen –fundamentalmente durante las puestas en común– para alentar a los alumnos que escribieron leyendas en las que se infiere el uso del conteo o el sobreconteo a justificar cómo lo

7 Cuando las cantidades son menores, el uso de los dedos para contar es comprensible para un observador, no lo es tanto cuando son mayores. Esta es la razón por la que está previsto que las docentes indaguen –durante los momentos de reflexión sobre lo realizado– acerca de cómo supieron cuánto agregaban o sacaban a quienes manifestaron haber usado un procedimiento de conteo.

realizaron, cómo sabían cuándo detenerse al contar, cómo podían asegurar que habían sumado o restado la cantidad establecida en el problema.

Otras producciones dan cuenta claramente del empleo de un *procedimiento de cálculo* que implica la descomposición de los números involucrados y *la escritura solo se realiza para recordar y comunicar el camino seguido para la resolución*. Veamos un ejemplo de la resta. Daniela produce lo siguiente para resolver el primer problema de resta planteado ($36 - 17$).

$36 - 17 = 19$

PRIMERO ME PUSE EL 36 EN LA
CADERA Y DESPUES AL 36 LE
SAQUE EL 10 Y MEDIO 26
EN TON SE DESPUES LE
SAQUE 7 Y MEDIO 19

Parece evidente que la niña realizó un procedimiento de cálculo al descomponer el 17 en 10 y 7 y que luego relata lo que hizo por medio de la escritura.

Se pone así de manifiesto que al tener que anotar cómo lo hicieron y no solo el resultado de la operación, la tarea requiere que los niños vuelvan a pensar sobre su modo de operar lo que, sin duda, interviene en la consideración por ellos mismos del procedimiento empleado y de las descomposiciones realizadas.

Dentro de este grupo en que ubicamos las producciones infantiles que privilegian una función comunicativa incluimos otras que dan cuenta de un procedimiento de cálculo bien avanzado: los niños realizan la descomposición en decenas y unidades y operan con las cifras de las decenas, sumándolas como si fueran unidades, *sin dejar de tener en cuenta su valor*.

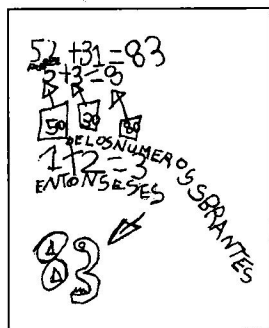
Consideraremos este procedimiento a través de dos ejemplos, en el primero se trata de sumar números que son nudos de las decenas, números “redondos” y, en el segundo, números de dos cifras sin ceros. Santiago, para resolver $80 + 80$, anota:⁸

OCHO OCHO ES DIECISEIS
LO MISMO ES OCHENTA Y OCHENTA
ES 160

$80 + 80$
160

8 “Ocho + ocho es dieciséis. Lo mismo es ochenta + ochenta. Es 160.” El seis del resultado aparece invertido

El mismo tipo de procedimiento, pero con números a sumar que no son los nudos de las decenas o centenas, lo encontramos en la producción que realizan Carolina y Belén. Ellas tenían que resolver $52 + 31$ e hicieron lo siguiente:⁹



Esta es otra de las escrituras más explícitas que se presentaron para este tipo de procedimiento; aquí desarman decimalmente los números en las decenas e indican la suma de $5 + 3$ y su correspondencia con los nudos de las decenas (50 y 30) y luego la suma de las unidades, lo cual nos permite interpretar que no contaron de diez en diez.

Estas escrituras nos permiten comprender que los niños emplean un procedimiento que implica haber construido conocimientos más avanzados sobre el sistema de numeración: sus autores se basan en el valor de las cifras que componen un número, es decir que han descubierto o están descubriendo el aspecto multiplicativo que el sistema encierra y pueden usar este procedimiento sin efectuar el conteo de los dieces.¹⁰

Es notorio que ambos autores incluyen la escritura de palabras junto con signos aritméticos; creemos que lo hacen así para comunicar un procedimiento del cual desconocen su escritura aritmética. Esta es también la razón que lleva a algunos alumnos, cuyos conocimientos acerca de los números les permiten realizar este tipo de procedimientos, a no manifestar en sus producciones alguna explicación del procedimiento empleado y solo escribir el cálculo con el que se resuelve el problema y el resultado correspondiente.

No hay dudas de que las anotaciones que estamos considerando aquí no fueron espontáneas, ni tampoco necesarias como medio para encontrar la solución desde la perspectiva de los niños; se realizan como respuesta a la demanda de las maestras y cumplen con la *función de comunicar un modo de resolución* (conté para atrás; me puse 26 en la cabeza; contamos con los

9 $52 + 31 = 83$ porque $5 + 3 = 8$ [salen de las flechas] 50 30 80. De los números sobrantes $1 + 2 = 3$ entonces 83."

10 Estos procedimientos han sido analizados como el empleo de la estructura "si... entonces" en Lerner et al. (1994).

dedos de 10 en 10) o los números considerados como en el caso de las producciones de quienes utilizan el procedimiento del si... entonces... y/o la utilización de materiales: (Lo hice con la cabeza, dedos, lápices). Son un relato de lo realizado, prueba de esto último es que los alumnos generalmente las producen una vez que ya han obtenido el resultado.

Estas producciones involucran igualmente un desafío para los niños: *pensar sobre lo que hicieron para anotarlo*, desafío que todos enfrentan y algunos resuelven mejor que otros, pero sin duda el esfuerzo que realizan interviene en el avance de sus conocimientos: *no es lo mismo buscar un resultado que pensar sobre el modo en que se obtuvo para registrarlo por escrito, es otro el conocimiento en juego*. Aun cuando la escritura solo cumple la función de comunicar un procedimiento, a la hora de anotar se pone en primer plano el modo de resolver el problema, lo que sin duda repercute en cierta toma de conciencia de la resolución y por ende en la conceptualización que se realice.

Acerca de las intervenciones docentes

La intervención prevista consistente en solicitar a todos los niños que anoten cómo lo pensaron logró que algunos niños lo realizaran por sus propios medios; sin embargo, con otros, fue necesario que las maestras intervinieran específicamente para que logaran anotar y para que progresaran hacia la escritura aritmética.

En efecto, la intervención general no fue suficiente y fue necesario construir con las maestras otras intervenciones para ser desplegadas durante el momento de la resolución con aquellos niños que obtuvieron el resultado pero no sabían o no lograban anotar el procedimiento, especialmente cuando empleaban uno de cálculo. En este sentido los maestros sugerían escribir con números y signos, pedían explicaciones cuando se obtenía el resultado correcto y proporcionaban el inicio de la escritura aritmética.

Estas intervenciones apuntan a que los alumnos, cuando ya logran un procedimiento de cálculo, puedan “traducirlo” al lenguaje aritmético, incluyendo tanto los números en los que descomponen los números originarios del problema como los pasos intermedios para poder sumarlos o restarlos.

Unas palabras especiales merece la *intervención prevista consistente en que la maestra escriba todo el procedimiento* –especialmente durante los momentos de reflexión conjunta– cuando los alumnos explicitan oralmente un procedimiento de resolución basado en la descomposición decimal. Esta intervención se puso en acción desde el inicio de la secuencia.

Frente al primer problema solo un alumno emplea una descomposición decimal, que explicita durante la puesta en común. Durante el momento de reflexión, la maestra pregunta si alguien encontró otra forma de resolver el problema que no fuera contando de uno en uno. Gabriel pasa al frente con su hoja en la que solo tenía escrito: $24 + 16 = 40$ y explica su estrategia diciendo: “Le

sumé primero diez y es treinta y cuatro y seis más y me da... (lo hace con los dedos) cuarenta". La maestra le pregunta por qué no lo escribió así en su hoja, frente a lo cual, el niño como respuesta, solo se encoge de hombros. Le pide entonces que vuelva a explicarlo, que ella va a ir escribiéndolo en el pizarrón para que todos lo vean y puedan entenderlo. A medida que Gabriel va explicando, la maestra escribe en el pizarrón lo siguiente:

$$24 + 16 =$$

$$24 + 10 = 34$$

-Maestra: ¿Por qué le sumaste diez?

-Gabriel: Porque yo sabía cuánto daba... 34.

-Maestra: De acuerdo, ¿pero de dónde sacaste el diez?

-Gabriel: De dieciséis que es diez más seis.

-Maestra: Pero... en el número dieciséis [lo señala] ¿se ve el diez?

-Gabriel: El uno es el del diez.

-Maestra: Pero en el dieciséis se escribe un uno, no un diez...

-Gabriel: Es que el cero es como que está escondido, el seis está en ese lugar, por eso sé que es diez más seis.

-Maestra: Chicos, ¿están de acuerdo con lo que dice Gabriel?

La mayoría asiente.

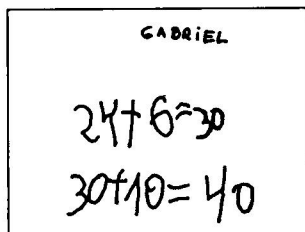
Gabriel continúa explicando que luego a treinta y cuatro le agregó seis más, lo que le dio cuarenta. La maestra escribe en el pizarrón a medida que el niño relata y señala por qué el treinta y cuatro se vuelve a escribir abajo: de lo contrario quedaría $24 + 10 = 34 + 6 = 40$ que no es correcto porque señala igualdades que no lo son. En el pizarrón queda, finalmente, escrito lo siguiente:

$$24 + 16 =$$

$$24 + 10 = 34$$

$$34 + 6 = 40$$

Creemos interesante señalar que cuando el niño vuelve a su banco, anota algo sobre el mismo papel. Finalizada la clase, la investigadora se lleva las producciones de todos los niños. Al leerlas fuera de la clase, observa que la escritura realizada no es copia de la que su maestra había realizado en el pizarrón. A continuación se transcribe su producción:



CABRIEL

$$24 + 6 = 30$$
$$30 + 10 = 40$$

La escritura que realiza la docente facilitó un modelo de escritura del cual Gabriel se apropia. Prueba de ello es que no la repite exactamente, como simple copia, sino que la aplica a otra posibilidad para resolver el mismo cálculo.

El interés de esta intervención docente y el episodio que la ilustra radica en que nos permite pensar que si bien el simbolismo aritmético con estas cantidades no es necesario para resolver los cálculos –Gabriel resolvió la situación sin necesidad de marcas– cuando se presenta un modelo de escritura relacionada con lo que se piensa, es decir, que exterioriza el pensamiento seguido para encontrar la solución, su apropiación se produce sin dificultades e incluso se transfiere para representar otro camino de resolución.

Aprender a escribir sus procedimientos de cálculo tal como pensaron les permite a los alumnos reorganizar, reelaborar un conocimiento que ya poseen, los incita a pensar, a tomar conciencia de lo realizado. En este sentido la escritura que la maestra provee permite una modificación de los conocimientos infantiles. Esta reelaboración, permitiría sostener una influencia recíproca entre la asimilación de estas escrituras y la conceptualización de los contenidos numéricos. Podemos afirmar que en esta relación entre la escritura que la maestra proporciona vinculada con lo que los niños piensan, no solo los niños se apropian de un modo aritmético sino que se establece un proceso dialéctico complejo entre las representaciones internas y externas que transforma la comprensión inicial de cualquier fenómeno (Tolchinsky, 2003; tomado de Martí, 2005).

Los alumnos aprendieron en principio a escribir los cálculos que realizaban en un lenguaje aritmético, lo aprendieron cuando la maestra realizaba la escritura de aquello que pensaban y decían, tendiendo de esta manera, como expresa Delia Lerner (1992a), un puente constante entre la acción y la representación. *Lo aprendieron también quienes, aunque no hubieran utilizado como procedimiento alguna descomposición decimal, estaban cerca de poder hacerlo y por eso podían comprenderlo.* En efecto, en el mismo grupo de Gabriel, para la resolución del siguiente problema, aparecen muchas escrituras de este tipo. Para muchos niños poder entender una representación les permitió considerar un procedimiento que todavía no empleaban y utilizarlo luego para resolver otro problema.

No se trata naturalmente solo de plantear la enseñanza de escrituras numéricas para garantizar los aprendizajes, atribuyendo a los sistemas semióticos en sí mismos una primacía exclusiva. Los cálculos escritos que las maestras presentan responden al “cálculo mental” y, además de sus propias especificidades, son bien diferentes del “cálculo en columna”.

Conclusiones

A través de este análisis y de los ejemplos propuestos, tratamos de señalar la diversidad de escrituras que los alumnos producen para resolver las situaciones problemáticas.

Destacamos también las diferentes funciones que cumple la escritura: si bien se propicia que los niños anoten para recordar lo que se hizo y así poder comunicarlo en un momento posterior a la resolución, producir una anotación siempre implica volver a pensar en lo que se hizo, como en los casos en los que las producciones de los niños solo tuvieron un carácter comunicativo o de "relato". Como hemos visto estas producciones pueden brindar o no información acerca del modo de resolución, posiblemente dependa de la posibilidad de tomar conciencia del procedimiento empleado.

En otros casos, en cambio, la anotación se convierte en una buena herramienta: cumple la función de ser sostén de las acciones que los niños realizan tornándose para ellos en un recurso necesario; para muchos otros es un medio de control de lo que se va sumando o restando a partir de las descomposiciones decimales que realizan sobre los números con los que tienen que operar.

Cuando las anotaciones exceden las leyendas que no brindan información acerca del procedimiento empleado, el anotar –por sí mismos o gracias a las intervenciones de la maestra– les permite a todos los niños *exteriorizar* su procedimiento, controlar lo realizado y reflexionar sobre los medios que emplearon. Además, la escritura de la descomposición decimal de los números les ayuda a operar, pero también a tomar conciencia de la composición aditiva de los números tomando en cuenta aspectos intrínsecos de los mismos, de acuerdo con la organización de nuestro sistema de numeración.

Representar por escrito lo que se piensa permite a los alumnos reflexionar sobre sus procedimientos y sobre los pasos intermedios seguidos. Como afirma Smith (1982: 32-33): "No podemos observar nuestros pensamientos, pero podemos observar los productos del pensamiento. Y una de las más poderosas herramientas para hacerlo es escribiendo". (...) "escribiendo descubrimos qué sabemos, qué pensamos". (...) "la escritura (...) es un magnífico instrumento no solo para explorar el potencial del pensamiento sino para desarrollarlo también".

Durante las puestas en común las reflexiones giran en torno a esas anotaciones, se copian en el pizarrón, se hacen públicas, se interpretan, se analizan, se comparan, se justifican. Al comparar las escrituras realizadas se reflexiona sobre el valor de los números que se han considerado, se verifica si se ha sumado o restado la cantidad que establecía el problema; las producciones escritas de los procedimientos se convierten en un objeto para pensar, movilizándolo toda una elaboración de naturaleza cognitiva.

Al producir estas notaciones los modos de resolución y las composiciones aditivas de los números se convierten en objeto de análisis. Las anotaciones que realizan los niños ponen en juego procesos constructivos ya que favorecen abstraer, objetivar, construir regularidades, establecer relaciones propias del dominio matemático. En palabras de Martí (2005)... “la elaboración externa de las representaciones, dependiendo de las restricciones propias de cada sistema (lenguaje, dibujo, notación numérica), conduce a ciertas precisiones, modificaciones y transformaciones de lo elaborado internamente”. En otras palabras, cumplen una función epistémica clave para avanzar en la explicitación y conceptualización que subyace a los procedimientos matemáticos.

Bibliografía

- Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid, Aprendizaje Visor.
- Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid, Aprendizaje Visor. (Versión original en francés publicada en 1989.)
- Catach, N. (1996). Participación en: “William Hass: Sobre la escritura de los números”, en Catach, N. (comp.) *Hacia una teoría de la lengua escrita*. Barcelona, Gedisa, pp. 257-270. (Versión original en francés publicada en 1988.)
- Dikson, L.; Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. España, Labor (versión original en inglés publicada en 1984.)
- Duval, R. (2000). “Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques”, en *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20, (2) 135-169.
- Ginsburg, H. (1989). *Children's Arithmetic*. Texas, Pro-ed.
- Inhelder, B. y Caprona, D. (1996). “Hacia el constructivismo psicológico: ¿estructuras?, ¿procedimientos? Los dos indiosociables”, en Inhelder, B. y Cellier, G. (comps.). *Los senderos de los descubrimientos del niño*. Barcelona, Paidós, pp. 25-55. (Versión original en francés publicada en 1992.)
- Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid, Visor. (Versión original en inglés publicada en 1985.)
- Kaplan, R.; Yamamoto, T. y Ginsburg, H. (1996). “La enseñanza de conceptos matemáticos”, en Resnick, L. y Klopfer, L. *Currículum y Cognición*. Buenos Aires, Aique, pp. 105-139. (Versión original en inglés publicada en 1989.)
- Lerner, D. (1992a). *La Matemática en la escuela. Aquí y ahora*. Buenos Aires, Aique.
- (1992b). “Constructivismo y Escuela”, en *Cuadernos de la Fundación*. Buenos Aires, EPPEC.
- (2001). “Didáctica y Psicología: una perspectiva epistemológica”, en Castorina,

- J. A. (comp.). *Desarrollos y problemas en Psicología Genética*. Buenos Aires, EU-deBA, pp. 273-290.
- (2005). “¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración”, en Alvarado, M. y Brizuela, B. (comps.). *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. México, Paidós Mexicana, pp. 148-197.
- Lerner, D.; Sadovsky, P. y colab. Wolman, S. (1994). “El sistema de numeración: un problema didáctico”, en Saiz, I. y Parra, C. (comps.). *Didáctica de Matemáticas*. Buenos Aires, Paidós, pp. 98-184.
- Martí, E. (2000). “Los mecanismos de internalización y externalización”, en Tryphon, A. y Vonèche (comps.). *Piaget - Vygotsky: la génesis social del pensamiento*. Buenos Aires, Paidós, pp. 81-113. (Versión original en inglés publicada en 1996.)
- Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). “Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación”, en *Infancia y Aprendizaje*, Nº 90, 11-30.
- Martí, E. (2005). “Las primeras funciones de las notaciones numéricas. Una mirada evolutiva”, en Alvarado, M. y Brizuela, B. (comps.). *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia*. México, Paidós Mexicana, pp. 51-80.
- Quaranta, E. y Wolman, S. (2000). “Procedimientos numéricos de resolución de problemas aditivos y multiplicativos. Relaciones entre aspectos psicológicos y didácticos”, en *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, Año VIII, Nº 16, 50-57.
- Resnick, L. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. España: Paidós (Versión original en inglés publicada en 1981.)
- Smith, F. (1982). *Writing and the Writer*. Londres, Heinemann Educational Books.
- Terigi, F.; Quaranta, E. y Wolman, S. (1999). “La relación entre situaciones didácticas y conceptualizaciones infantiles en el aprendizaje del sistema de numeración: avances de un estudio en curso”. Ponencia presentada en el Simposio: Conocimientos sobre el sistema de numeración, procedimientos de resolución de operaciones aritméticas y situaciones didácticas, llevado a cabo en el marco del 29º Simposio Anual The Genetic Epistemologist organizado por la Jean Piaget Society. México, D.F. 2-5 de junio de 1999.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México, Trillas. (Versión original en francés publicada en 1985.)
- Wolman, S. (1999). “Algoritmos de suma y resta. ¿Por qué favorecer desde la escuela los procedimientos infantiles?”, en *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, Año VIII, Nº 14, 53-59.
- (2000). “La enseñanza de los números en el Nivel Inicial y en el primer año de la EGB”, en Kaufman, A. M. (comp.). *Letras y Números*. Buenos Aires, Santillana (Aula XXI), pp. 161-254.

RESUMEN: En este trabajo se analiza el papel que juega la escritura en los procedimientos que despliegan alumnos para resolver sumas y restas. Referimos para ello a una investigación didáctica en la que se estudiaron intervenciones docentes y su incidencia en la adquisición y el progreso de procedimientos numéricos no convencionales con niños de primer grado de la escuela primaria.

Una cuestión esencial contemplada en el diseño de las situaciones que se estudiaron en dicha investigación es la función que juega la *anotación*. En el momento de resolución se les pide a los alumnos que anoten cómo resolvieron el problema. Su objetivo es promover que los niños expliciten sus procedimientos a través de la utilización de sus propios modos de representación gráfica y puedan recordar lo realizado en el momento de la puesta en común, posterior al de la resolución.

PALABRAS CLAVE: Investigación didáctica - escritura - procedimientos - intervención docente

ABSTRACT: In this paper we analyze the role of writing in the procedures displayed by pupils when solving additions and subtractions. To this effect we refer to didactic research intended to study teachers' interventions and its incidence in the acquisition and progress of non-conventional numerical procedures in children in the first year of basic education.

An essential issue taken into account in the design of the situations analyzed in the above mentioned research is the role of *annotation*. Pupils are asked to annotate at the time of solving a problem how they get the solution. This is a teachers' intervention directed to all pupils at the time of the proposal of problems. The objective is for children to state explicitly their procedures by means of their own graphic representation and to remember what they have done at the time of the experience sharing exchange subsequent to the solution procedure.

KEY WORDS: Didactic research - writing - procedures - teacher's intervention
